



## **PME 3100 – Mecânica I**

# **Dinâmica do Corpo Rígido**

Prof. Francisco J. Profito

[fprofito@usp.br](mailto:fprofito@usp.br)



## Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido
3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
4. Distribuição de Massa
5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
6. Teorema da Energia Cinética (TEC)



# Conteúdo

## 1. Motivação e Objetivos

2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido
3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
4. Distribuição de Massa
5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
6. Teorema da Energia Cinética (TEC)



## ❑ Motivação e Objetivos

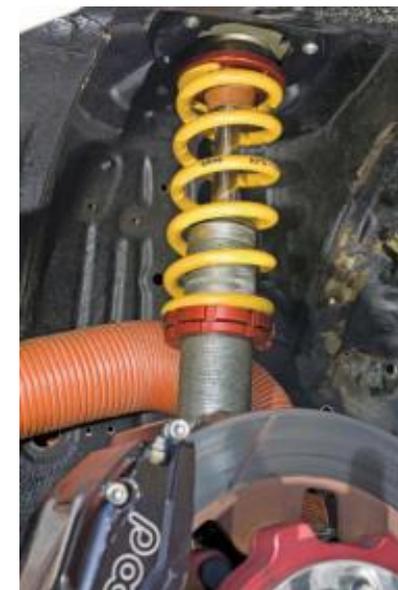
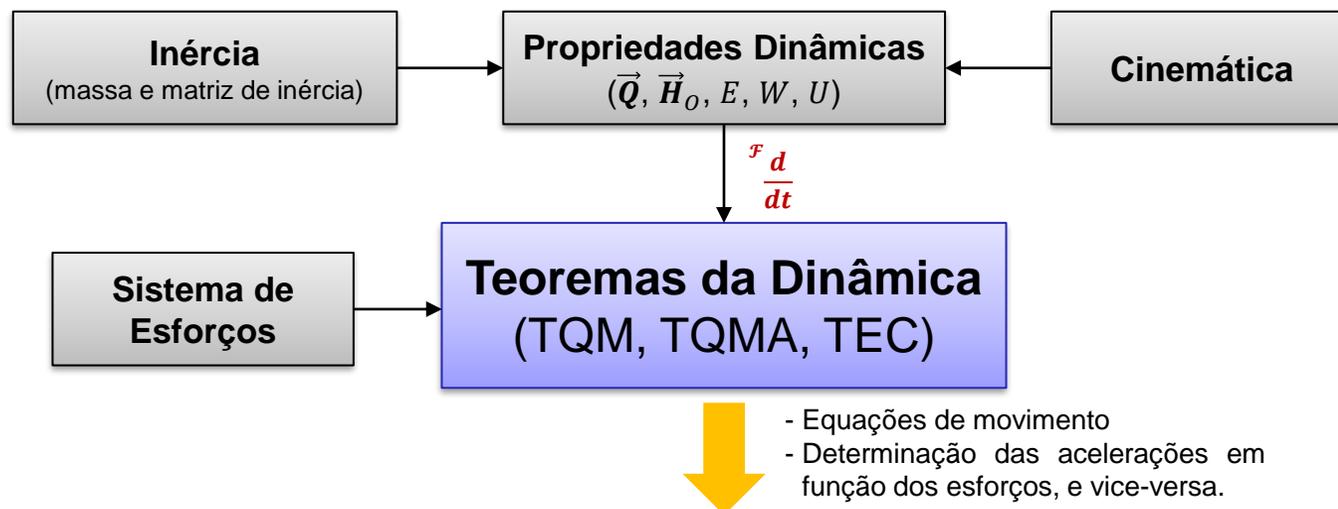
- O estudo da dinâmica consiste na análise do movimento de sistemas (partículas, sistemas de partículas e corpos) no espaço sujeitos à ação de esforços (forças e momentos).
- A análise do movimento é realizada através da **integração dos conceitos de Esforços, Cinemática e Inércia**.
- A combinação dos conceitos de **Esforços, Cinemática e Inércia** dá origem à definição das seguintes **Propriedades Dinâmicas** fundamentais:
  - Quantidade de Movimento ( $\vec{Q}$ )
  - Quantidade de Movimento Angular ( $\vec{H}_O$ )
  - Energia Cinética ( $E$ )
  - Trabalho ( $W$ )
  - Energia Potencial ( $U$ )



*Robôs utilizados na linha de montagem de automóveis (acima), e braço de robô executando uma variedade de movimentos no espaço (abaixo). Em ambos os casos, o estudo da dinâmica é importante para o desenvolvimento de sistemas de controle para o funcionamento adequado dos sistemas. Fonte [1].*

## ❑ Motivação e Objetivos

- A associação entre **Esforços e Variação Temporal das Propriedades Dinâmicas** dá origem aos seguintes **Teoremas da Dinâmica Vetorial**:
  - Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
  - Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
  - Teorema da Energia Cinética (TEC)
- Neste curso, se dará ênfase ao estudo da **dinâmica de corpos rígidos** baseada nos princípios da **Mecânica de Newton-Euler**.



Suspensão de um automóvel. As molas e amortecedores que compõem o sistema devem ser cuidadosamente selecionados para proporcionar dirigibilidade. Fonte [1].

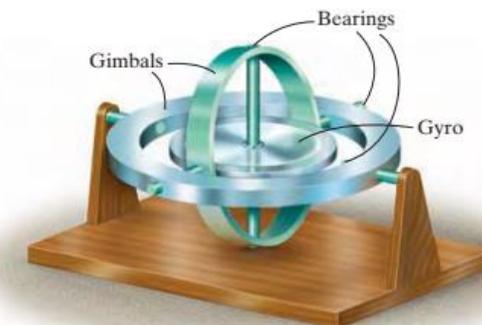


Ilustração de um giroscópio. Esse sistema é utilizado em sistemas de navegação inercial e em outros dispositivos de controle direcional e estabilização. Fonte [2].

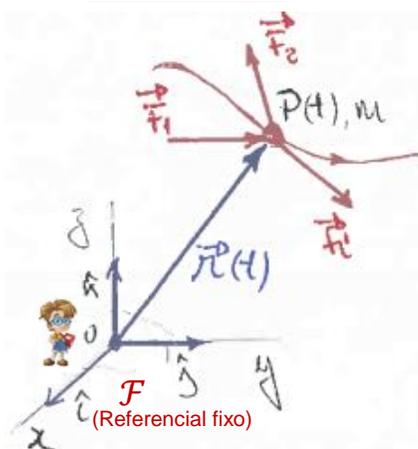


# Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
- 2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido**
3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
4. Distribuição de Massa
5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
6. Teorema da Energia Cinética (TEC)

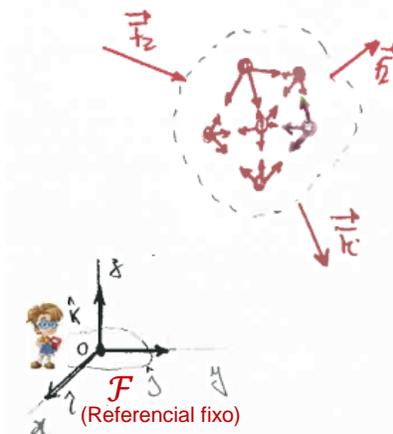
## ❑ Sistema de Partículas e Corpo Rígido

### Partícula



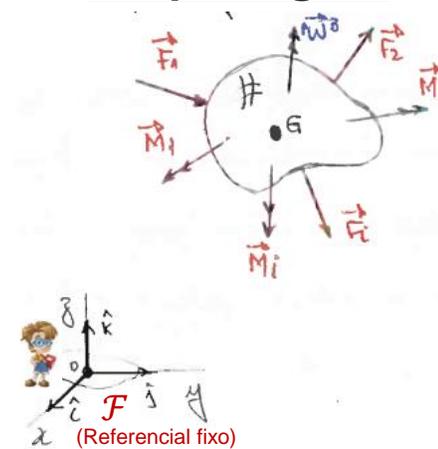
- Dimensões desprezíveis em relação às distâncias percorridas;
- Não possui estrutura interna definida (e.g. estrutura molecular/atômica);
- Massa concentrada em um único ponto cuja localização no espaço é dado pelo vetor posição  $\vec{r}_P(t)$ ;
- Não possui rotação própria, logo apenas movimento de translação é definido
- Inexistência de forças internas;
- Leis de Newton foram definidas originalmente para partículas.

### Sistema de Partículas



- Conjunto de partículas  $P_i$  de massa  $m_i$ ;
- Cinemática depende do movimento de cada partícula que compõe o sistema;
- O movimento **global** do sistema pode ser representado utilizando o conceito de centro de massa;
- Sistema **como um todo** pode rotacionar;
- Forças internas devido à interação entre as partículas devem ser consideradas na análise (geralmente se cancelam mutuamente).

### Corpo Rígido



- Conjunto de partículas rigidamente conectadas, ou seja, as distâncias entre as partículas que compõem o corpo não variam com o movimento.
- Dimensões físicas não variam quando submetido a esforços.
- Possui rotação própria;
- O movimento arbitrário de um corpo rígido consiste na sobreposição de translação (3 GLs) e rotação (3 GLs).



# Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido
- 3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)**
4. Distribuição de Massa
5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
6. Teorema da Energia Cinética (TEC)

## □ Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)

- A quantidade de movimento **linear** de um sistema composto por  $N$  partículas  $P_i$  de massa  $m_i$  e velocidade  $\vec{v}_i$  em relação a um referencial fixo (inercial)  $\mathcal{F}$  é definida por:

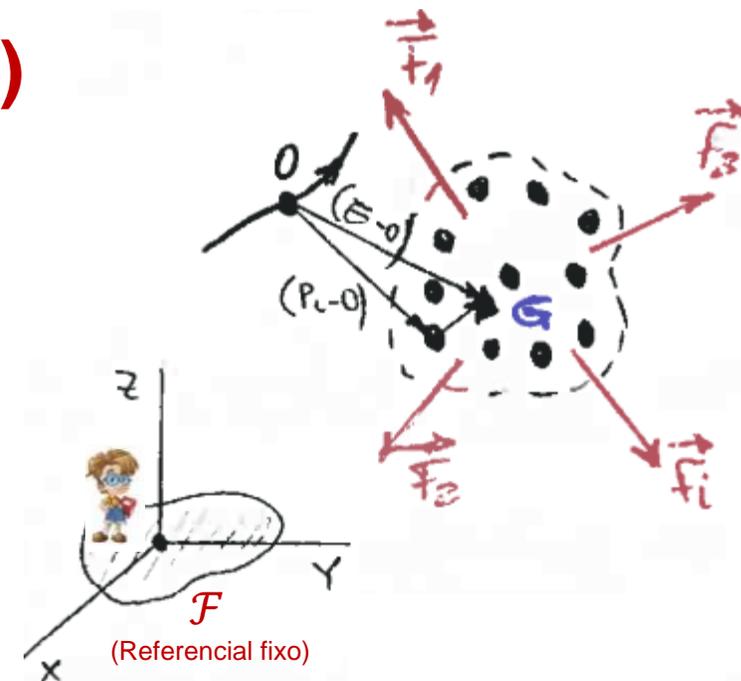
$$\vec{Q} \triangleq \sum_{i=1}^N \vec{Q}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \quad (1)$$

- Derivando no tempo a expressão geral do centro de massa do sistema, e admitindo a **massa de cada partícula constante**, tem-se:

$$m(G - O') = \sum_{i=1}^N m_i(P_i - O') \Rightarrow \frac{\mathcal{F}}{dt} d[m(G - O')] = \frac{\mathcal{F}}{dt} \left[ \sum_{i=1}^N m_i(P_i - O') \right]$$

$$m \frac{\mathcal{F}}{dt} (G - O') = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\mathcal{F}}{dt} (P_i - O') \Rightarrow m(\vec{v}_G - \vec{v}_{O'}) = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_{O'}) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i - \vec{v}_{O'} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i}_{=m}$$

$$m\vec{v}_G - m\vec{v}_{O'} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i - m\vec{v}_{O'} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_G \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i = m\vec{a}_G \quad (2)$$

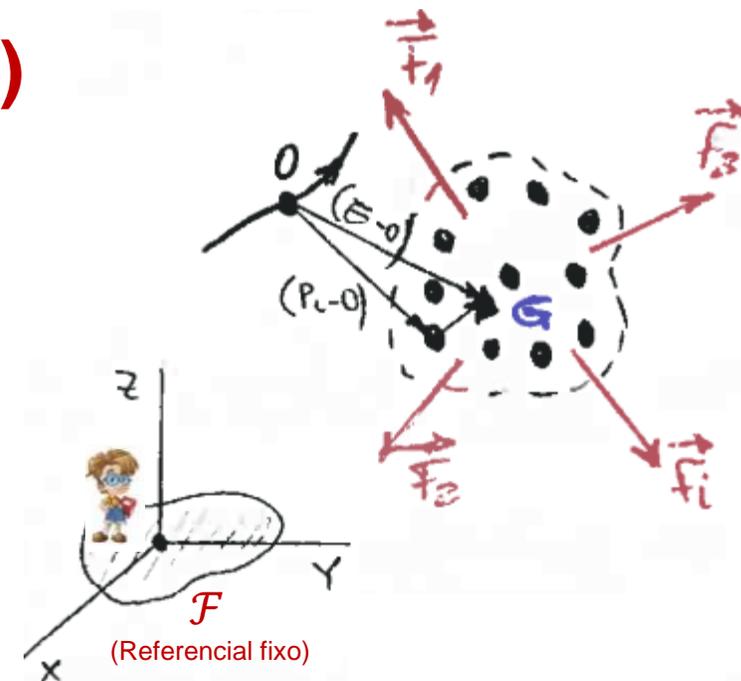


## □ Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)

- Substituindo a Eq. (2) na Eq. (1), a expressão final da quantidade de movimento **linear** de um sistema partículas é dada por:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \Rightarrow \boxed{\vec{Q} = m \vec{v}_G} \quad (3)$$

- A expressão acima é igualmente válida para corpos rígidos, uma vez que não é necessária a aplicação de nenhuma relação cinemática para a determinação de  $\vec{Q}$  em função do centro de massa do sistema.



- Considerando a variação temporal da quantidade de movimento linear (Eq. 1) em relação a um referencial inercial, e admitindo a **massa de cada partícula constante**, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{Q}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \vec{Q}_i \right) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{Q}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) \right] = \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{v}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i \quad \left( \begin{array}{l} = m \vec{a}_G \text{ (Eq. 2)} \\ \text{Somatório de todas as forças, internas e externas, atuantes no sistema.} \end{array} \right) \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{R}_i = m \vec{a}_G \quad (4) \end{aligned}$$

Resultante das forças internas e externas atuantes em cada partícula  $P_i$

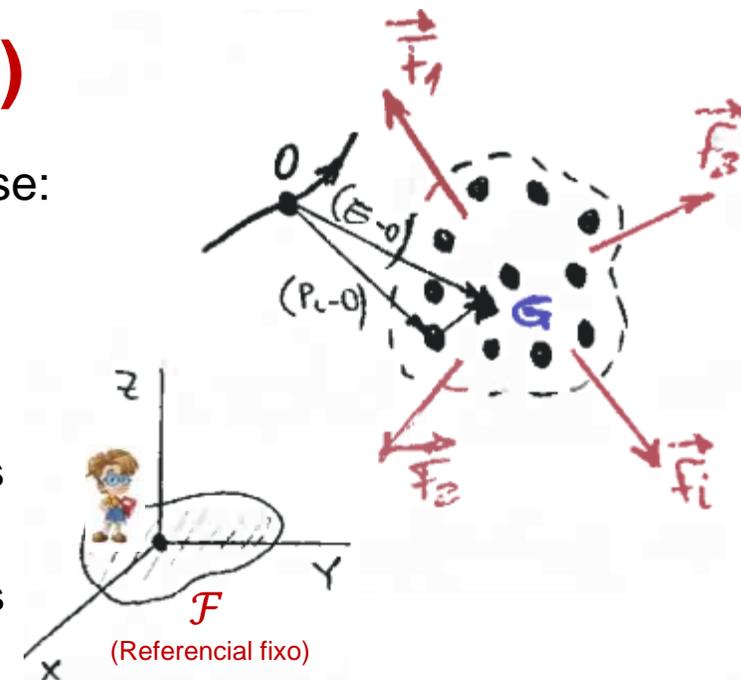
Somatório de **todas** as forças, internas e externas, atuantes no **sistema**.

## Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)

➤ Separando as forças internas e externas atuantes nas partículas, tem-se:

$$\sum_{i=1}^N \vec{R}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{R}_i^{ext} + \vec{R}_i^{int}) = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{ext} + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{int} = \vec{R}_{ext} + \vec{R}_{int} = m\vec{a}_G$$

- $\vec{R}_{ext}$ : resultante de **todas** as forças atuantes no sistema devido à **ações externas** ao sistema;
- $\vec{R}_{int}$ : resultante de **todas** as forças atuantes no sistema devido às **interações entre as partículas** do sistema.

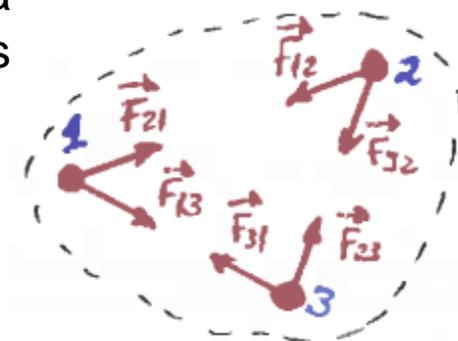


➤ A partir do Princípio da Ação-e-Reação (3ª Lei de Newton), a **resultante de todas as forças internas** atuantes nas partículas do sistema **é nula** (forças internas se cancelam mutuamente).

$$\vec{R}_{int} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{int} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{R}_{ext} = m\vec{a}_G} \quad (5)$$

Resultante das  
forças externas

Aceleração do centro de massa em  
relação a um referencial fixo (inercial)  $\mathcal{F}$



Forças internas se  
cancelam **mutuamente**:

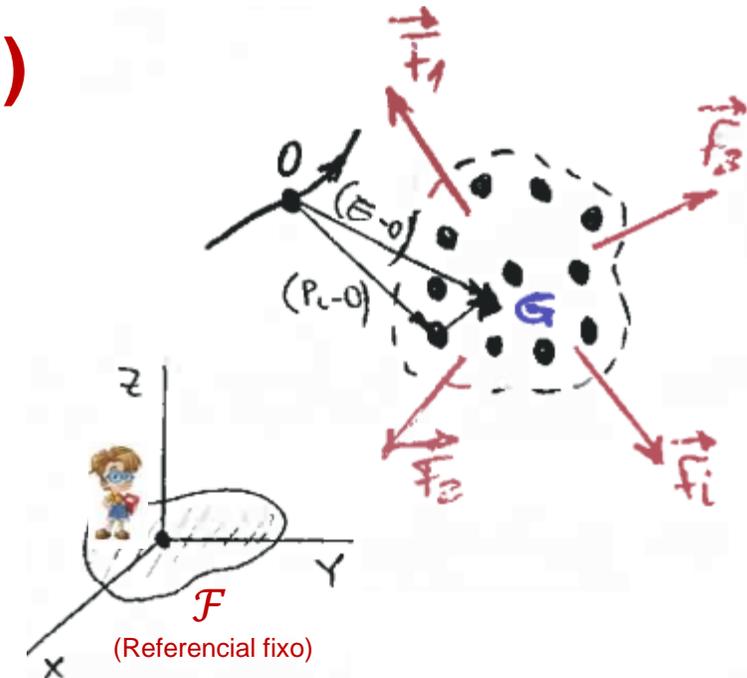
$$\vec{R}_i^{int} \neq \vec{0}, \text{ mas}$$

$$\vec{R}_{int} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{int} = \vec{0}$$

## □ Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)

### ➤ Observações:

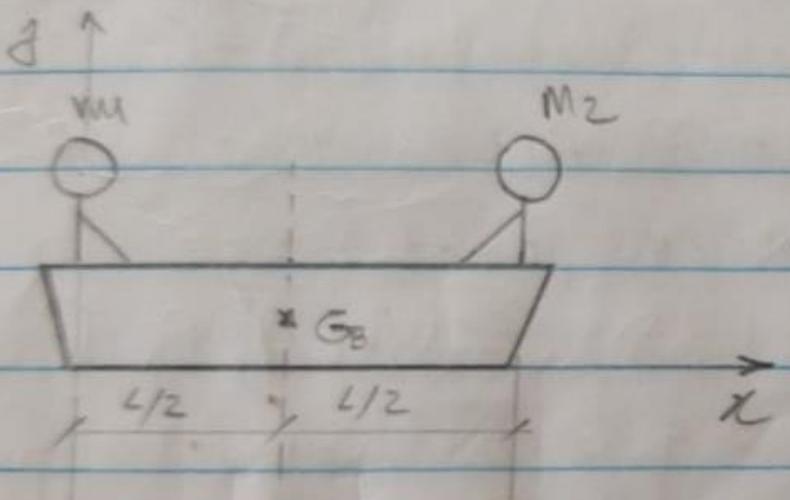
- A Eq. (5) é igualmente válida para sistemas de partículas e corpos rígidos, uma vez que nenhuma particularização foi admitida em relação à rigidez do sistema.
- Fisicamente, somente **forças externas** ao sistema podem causar **variação no movimento de translação** do centro de massa do sistema.
- No caso de  $\vec{R}_{ext} = \vec{0}$ , o sistema permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme (1ª Lei de Newton). Se o sistema está inicialmente em repouso, a posição do centro de massa do **sistema** não varia com o tempo, porém a posição de **cada partícula** pode variar internamente no interior do sistema.
- A distribuição de massa do sistema não influencia o movimento de translação do mesmo.
- O TQM é geralmente utilizado para a determinação de esforços reativos em problemas de dinâmica de corpos rígidos.





## Exercício 1

Exercício 1



- Dois homens sentados em um barco de massa  $M$ , em repouso.

- Desprezando-se a resistência da água, pede-se o sentido e o deslocamento do barco se os 2 homens trocarem de lugar.



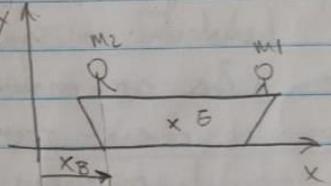
## Exercício 1 (cont.)

- Como em estática, o sistema é invariável!  
 - Nesse caso, sistema = 2 barras + barra.

- Para o sistema: TMB:  $\vec{M}_{AG} = \vec{R}^{ext} \equiv \vec{0}$   
 - Como sistema no repouso:  $\vec{A}_G = \vec{0}$   
 - Em componentes:  $A_{Gx} = 0$   
 $V_{Gx} = 0 \Rightarrow X_G^i = X_G^f$

$$X_G^L = \frac{M \cdot \frac{L}{2} + m_2 L}{M + m_1 + m_2}$$

$$X_G^F = \frac{m_2 X_B + M(\frac{L}{2} + X_B) + m_1(L + X_B)}{M + m_1 + m_2}$$



$$\frac{M \cdot \frac{L}{2} + m_2 L}{2} = \frac{m_2 X_B + M(\frac{L}{2} + X_B) + m_1(L + X_B)}{2}$$

$$m_2 L - m_1 L = X_B (M + m_1 + m_2)$$

$$X_B = \frac{(m_2 - m_1) L}{(M + m_1 + m_2)}$$

$m_2 > m_1$ ; direita  
 $m_2 < m_1$ ; esquerda.

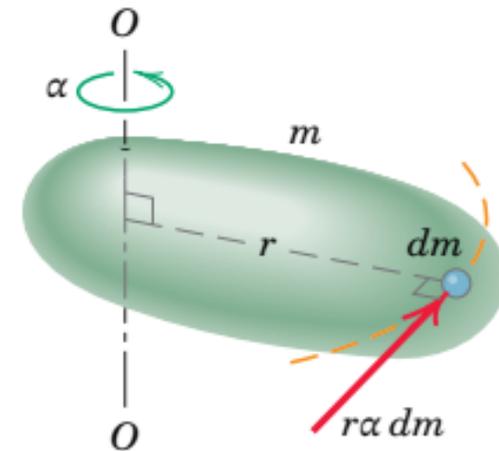


# Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido
3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
- 4. Distribuição de Massa**
5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
6. Teorema da Energia Cinética (TEC)

## □ Distribuição de Massa

- A distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de eixos e planos** específicos é importante para a **descrição do seu movimento de rotação**.
- **Momento de Inércia**
  - Medida da distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de um eixo específico**.
  - Fisicamente, representa a medida da “resistência” de um sistema em ter seu movimento de rotação em torno de um eixo alterado (inércia de rotação).
  - Por definição, o momento de inércia de um sistema (ou corpo) em relação a um eixo  $Ou$  arbitrário é dado por:



$$J_{Ou} = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \quad J_{Ou} = \int r^2 \rho dV \quad (1)$$

- Grandeza escalar
- Unidade:  $\text{kg.m}^2$
- $J_{Ou} \geq 0$

## □ Distribuição de Massa

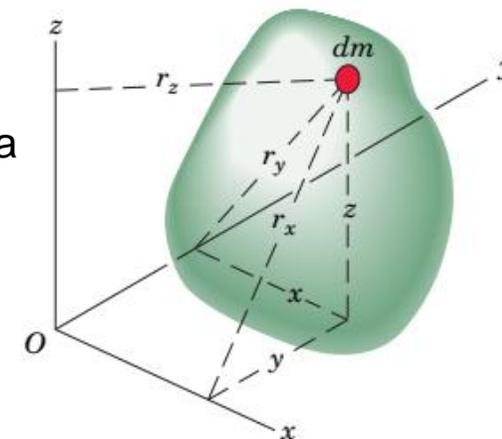
- A distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de eixos e planos** específicos é importante para a **descrição do seu movimento de rotação**.
- **Momento de Inércia**
  - Considerando um **sistema de coordenadas cartesianas  $Oxyz$** , os momentos de inércia **em relação aos eixos coordenados** do sistema podem ser escritos, como segue:

$$J_{Ox} = \sum_{i=1}^N m_i (y_i^2 + z_i^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Ox} = \int (y^2 + z^2) \rho dV$$

$$J_{Oy} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + z_i^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Oy} = \int (x^2 + z^2) \rho dV$$

$$J_{Oz} = \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} J_{Oz} = \int (x^2 + y^2) \rho dV$$

(2)

Movimento no plano  $Oxy$ :

$$J_{Oz} = J_{Ox} + J_{Oy}$$

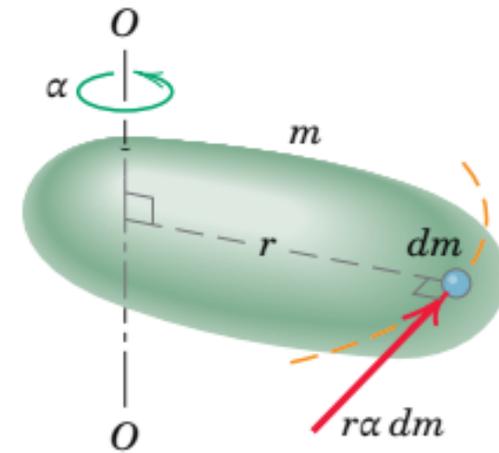
## □ Distribuição de Massa

- A distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de eixos e planos** específicos é importante para a **descrição do seu movimento de rotação**.
- **Produto de Inércia**
  - Medida da distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em relação a um plano específico**.
  - Por definição, o produto de inércia de um sistema (ou corpo) em relação a um plano  $Ouv$  arbitrário definido pelos eixos  $Ou$  e  $Ov$  é dado por:

$$J_{Ouv} = \sum_{i=1}^N m_i u_i v_i \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \quad J_{Ouv} = \int (uv) \rho dV$$

- (3)
- Grandeza escalar
  - Unidade:  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$
  - $J_{Ouv} \geq 0$  ou  $J_{Ouv} \leq 0$

onde  $u_i$  e  $v_i$  são a coordenadas de cada partícula  $P_i$  no plano  $Ouv$ .



## □ Distribuição de Massa

➤ A distribuição de massa de um sistema (ou corpo) **em torno de eixos e planos** específicos é importante para a **descrição do seu movimento de rotação**.

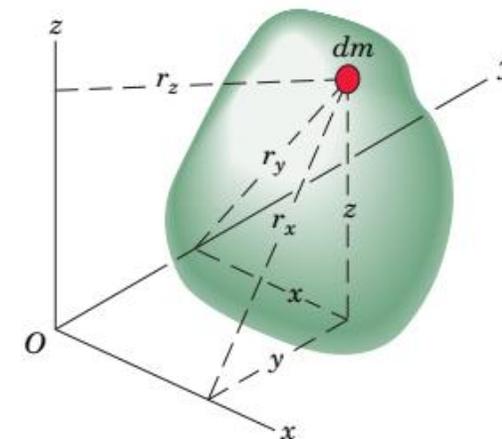
➤ **Produto de Inércia**

- Considerando um **sistema de coordenadas cartesianas  $Oxyz$** , os produtos de inércia em relação aos **planos coordenados** do sistema podem ser escritos, como segue:

$$J_{Oxy} = \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i \quad \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} \quad J_{Oxy} = \int (xy) \rho dV$$

$$J_{Oxz} = \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \quad \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} \quad J_{Oxz} = \int (xz) \rho dV$$

$$J_{Oyz} = \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \quad \Rightarrow_{n \rightarrow \infty} \quad J_{Oyz} = \int (yz) \rho dV$$

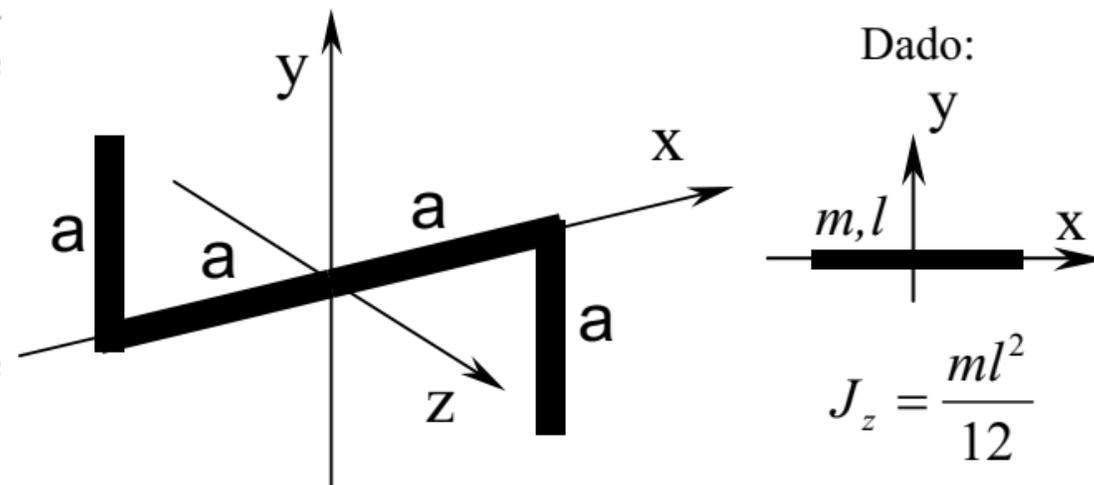


- (4) - Movimento no plano  $Oxy$ :  $J_{Oxz} = J_{Oyz} = 0$   
- Produtos de inércia são simétricos:  
 $J_{Oxy} = J_{Oyx}$  ;  $J_{Oxz} = J_{Ozx}$  ;  $J_{Oyz} = J_{Ozy}$

## Exercício 2 (P3–Q1–2006)

**1ª Questão** (3,0 pontos) O sistema mostrado na figura encontra-se no plano  $xy$  e é composto por quatro barras de comprimento  $a$  e densidade linear  $\rho$ . Pedem-se:

- a) a massa do sistema e as coordenadas do seu baricentro;
- b) o momento de inércia do sistema em relação ao eixo  $z$ ;
- c) o produto de inércia do sistema em relação aos eixos  $x$  e  $z$ ;
- d) o produto de inércia do sistema em relação aos eixos  $x$  e  $y$ .





## □ Exercício 2 (P3–Q1–2006)

$$m = 4a\rho$$

0,5

$$\mathbf{G} = (0, 0, 0)$$

0,5

$$J_z = \frac{2a\rho(2a)^2}{12} + 2\left\{\frac{a\rho(a)^2}{12} + a\rho\left(a^2 + \frac{a^2}{4}\right)\right\} = \frac{2\rho a^3}{3} + \rho a^3\left(\frac{1}{6} + \frac{10}{4}\right) = \frac{2\rho a^3}{3} + \frac{8\rho a^3}{3}$$

0,5

$$J_z = \frac{10\rho a^3}{3}$$

0,5

$$J_{xz} = 0$$

(figura no plano xy)

0,5

$$J_{xy} = \left\{0 + a\rho(-a)\left(\frac{a}{2}\right)\right\} + \left\{0 + a\rho(a)\left(-\frac{a}{2}\right)\right\}$$

$$J_{xy} = -\rho a^3$$

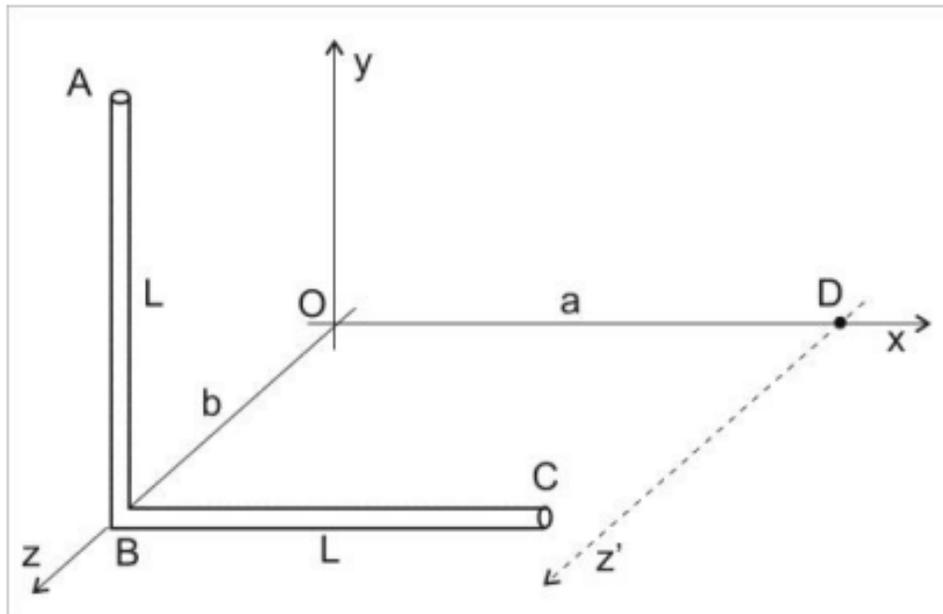
0,5



## Exercício 3 (P3-Q1-2015)

**Questão 1 (2,5 pontos):** Duas barras esbeltas e homogêneas  $AB$  e  $BO$ , cada uma com massa  $m$  e comprimento  $L$ , estão soldadas fazendo uma peça em forma de “L”, conforme

mostrado na figura. Pedem-se:



- calcule o momento de inércia  $J_z$  e o produto de inércia  $J_{zy}$  dessa peça;
- calcule o momento de inércia  $J_{z'}$  dessa peça, em relação ao eixo  $z'$  paralelo a  $z$  e que passa pelo ponto  $D$ .



## Exercício 3 (P3-Q1-2015)

a)

Momento de inércia:

Barra AB: distância do centro de massa até  $z$ :  $\frac{L}{2}$

$$J_{ABz} = \frac{mL^2}{12} + m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3}$$

Barra BC: distância do centro de massa até  $z$ :  $\frac{L}{2}$

$$J_{BCz} = \frac{mL^2}{12} + m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{3}$$

Assim:  $J_z = J_{ABz} + J_{BCz} = \frac{2mL^2}{3}$  **(0,5 ponto)**

Produto de inércia:

Barra AB: coordenadas do centro de massa : (0; L/2; b)

$$J_{ABzy} = 0 + mb \frac{L}{2} = \frac{mbL}{2}$$

Barra BC: coordenadas do centro de massa : (L/2; 0; b)

$$J_{BCzy} = 0 + m \cdot b \cdot 0 = 0$$

Assim:  $J_{zy} = J_{ABzy} + J_{BCzy} = \frac{mbL}{2}$  **(1,0 ponto)**

b)

Barra AB: distância do centro de massa até  $z'$ :  $\sqrt{a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}$

$$J_{ABz'} = \frac{mL^2}{12} + m \left[ a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right] = m \left( \frac{L^2}{3} + a^2 \right)$$

Barra BO: distância do centro de massa até  $z'$ :  $(a - L/2)$

$$J_{BCz'} = \frac{mL^2}{12} + m \left( a - \frac{L}{2} \right)^2 = m \left( \frac{L^2}{3} + a^2 - aL \right)$$

Assim:  $J_{z'} = J_{ABz'} + J_{BCz'} = m \left( \frac{2L^2}{3} + 2a^2 - aL \right)$  **(1,0 ponto)**



# Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido
3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
4. Distribuição de Massa
- 5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)**
6. Teorema da Energia Cinética (TEC)

## □ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

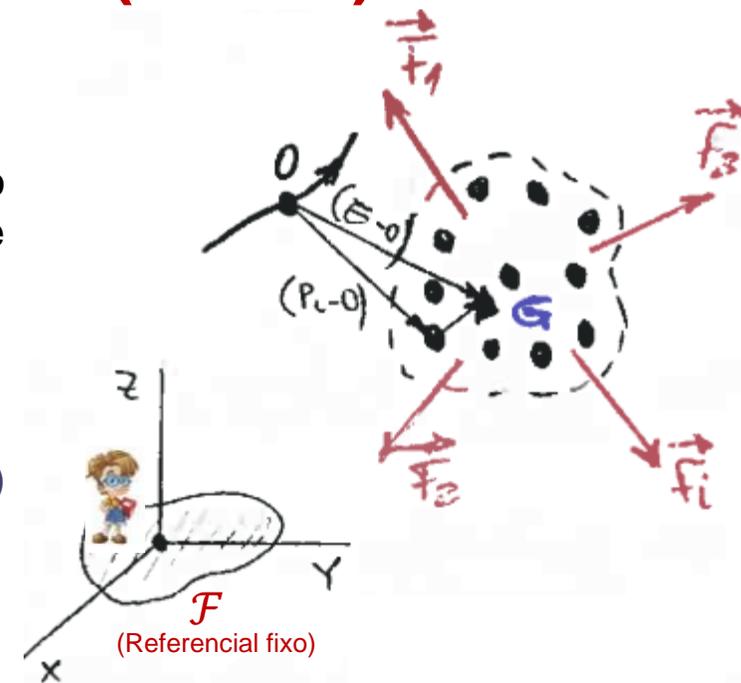
### ➤ Quantidade de Movimento Angular (Sistema de Partículas)

- A quantidade de movimento **angular** com respeito a um polo  $O$  arbitrário de um sistema composto por  $N$  partículas materiais  $P_i$  de massa  $m_i$  e velocidade  $\vec{v}_i$ , em relação a um referencial fixo (inercial)  $\mathcal{F}$ , é definida por:

$$\vec{H}_O \triangleq \sum_{i=1}^N \vec{H}_{iO} = \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \vec{Q}_i \Rightarrow \boxed{\vec{H}_O = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \vec{v}_i} \quad (1)$$

### ▪ Observações:

- A Eq. (1) é igualmente válida para sistemas de partículas e corpos rígidos, uma vez que nenhuma particularização foi admitida em relação à rigidez do sistema.
- Para um sistema de partículas **qualquer**, é necessário conhecer os valores da massa, posição e velocidade de **cada** partícula para o cálculo de  $\vec{H}_O$ .
- Para um sistema de partículas **qualquer**, não é possível determinar  $\vec{H}_O$  em função das propriedades do centro de massa do sistema.



# Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

## Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

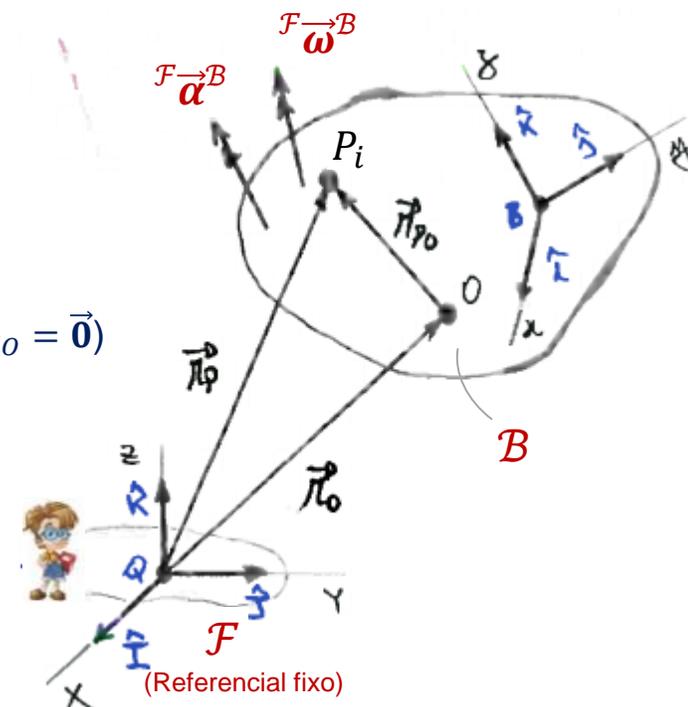
- Para o **caso particular de corpo rígido**, a velocidade de cada ponto material  $P_i$  do corpo pode ser expressa pela equação do campo de velocidades (vínculo cinemático relacionado à rigidez do corpo):

$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_{P_i} = {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge (P_i - O) \quad O \in \mathcal{B}, \text{ ou uma extensão rígida do mesmo } (\vec{v}_{P_i/O} = \vec{0})$$

- Substituindo a expressão acima na Eq. 1:

$$\begin{aligned} \vec{H}_O &= \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge [{}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge (P_i - O)] \\ &= \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \right]}_{= m(G - O)} \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge (P_i - O)]}_{\substack{{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} \\ (P_i - O) = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \\ \text{Oxyz geralmente solidário a } \mathcal{B}}} \end{aligned}$$

$$\text{Oxyz geralmente solidário a } \mathcal{B} \quad \rightarrow \quad [I]_{Oxyz} \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \}$$



Quando  $Oxyz$  é solidário a  $\mathcal{B}$ , a matriz de inércia é constante.

## □ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

### ➤ Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

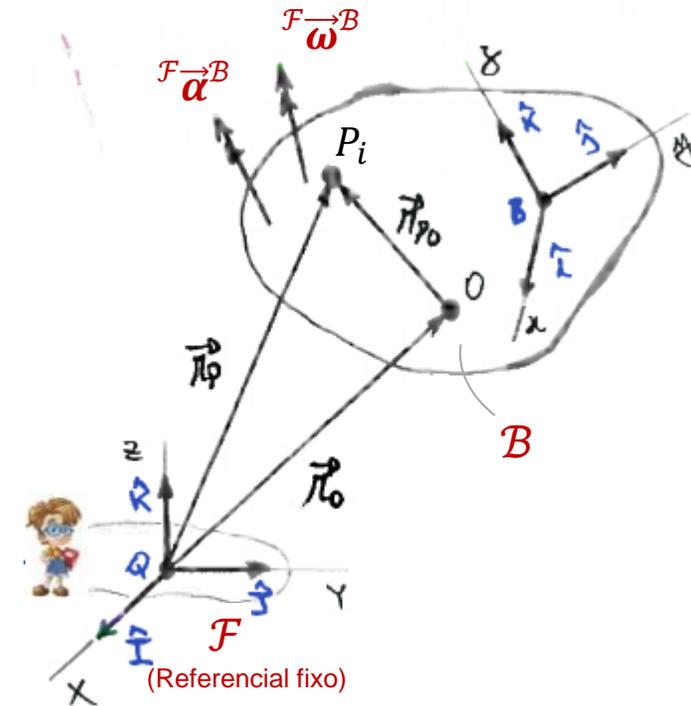
- Finalmente, a expressão da quantidade de movimento angular de um **corpo rígido** com respeito a um polo  $O \in \mathcal{B}$  (ou uma extensão rígida do mesmo), é dada por:

$$\vec{H}_O = m(G - O) \wedge {}^F\vec{v}_O + [I]_{Oxyz} \{ {}^F\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \} \quad (2)$$

#### ▪ Observações:

- A Eq. (2) é válida **apenas para corpos rígidos**.
- O polo  $O$  deve pertencer ao corpo rígido, ou ser uma extensão rígida do mesmo ( $\vec{v}_{P_i/O} = \vec{0}$ ).
- O sistema de coordenadas  $Oxyz$  é, em geral, solidário a  $\mathcal{B}$ , de forma que  $[I]_{Oxyz}$  seja constante no tempo.
- Nos casos particulares de  $O = G$  e/ou  ${}^F\vec{v}_O = \vec{0}$ :

$$\vec{H}_O = [I]_{Oxyz} \{ {}^F\vec{\omega}^{\mathcal{B}} \} \quad (3)$$



## □ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

### ➤ Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

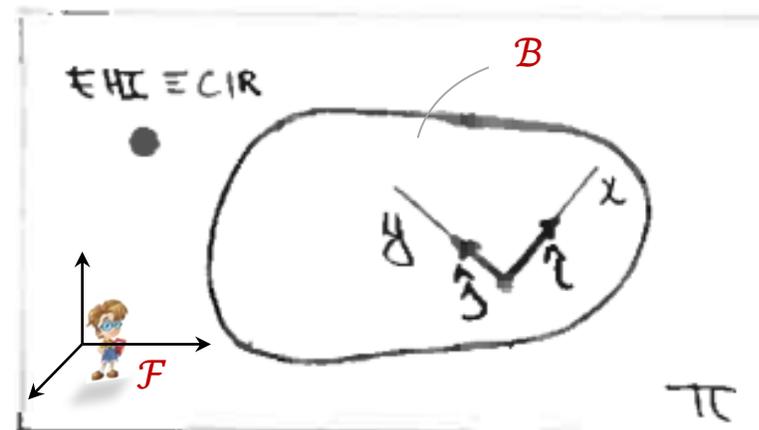
- Em problemas planos (plano  $Oxy$ ), a Eq. 2 é simplificada:

$$\begin{aligned} {}^F\vec{\omega}^B &= \omega \hat{\mathbf{k}} \\ J_{Oxz} = J_{Oyz} &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\vec{\mathbf{H}}_O = m(G - O) \wedge {}^F\vec{\mathbf{v}}_O + (J_{Oz}\omega)\hat{\mathbf{k}}} \quad (4)$$



$$\begin{aligned} O &= G \text{ e/ou} \\ {}^F\vec{\mathbf{v}}_O &= \vec{\mathbf{0}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\mathbf{H}}_O = (J_{Oz}\omega)\hat{\mathbf{k}}} \quad (5)$$



## □ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

### ➤ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (Sistema de Partículas)

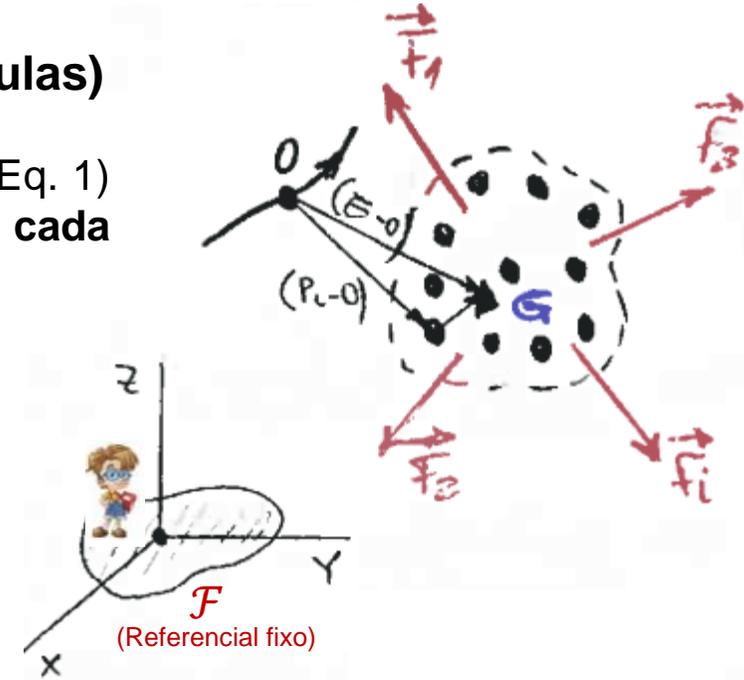
- Considerando a variação temporal da quantidade de movimento angular (Eq. 1) em relação a um referencial fixo (inercial)  $\mathcal{F}$ , e admitindo a **massa de cada partícula constante**, tem-se:

$$\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{H}_O}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \vec{H}_{iO} \right) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{d\vec{H}_{iO}}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} [(P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i] \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i \right] + \sum_{i=1}^N \left[ (P_i - O) \wedge \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) \right]$$

$$= \vec{R}_i = \vec{R}_i^{ext} + \vec{R}_i^{int} \quad (2^a \text{ Lei de Newton})$$

$$= \sum_{i=1}^N m_i [(\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge \vec{v}_i] + \underbrace{\sum_{i=1}^N [(P_i - O) \wedge \vec{R}_i^{ext}]}_{= \vec{M}_O^{ext}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N [(P_i - O) \wedge \vec{R}_i^{int}]}_{= \vec{M}_O^{int}} = \underbrace{\left[ \sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}_i) \right]}_{= m \vec{v}_G} \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext} + \vec{M}_O^{int}$$

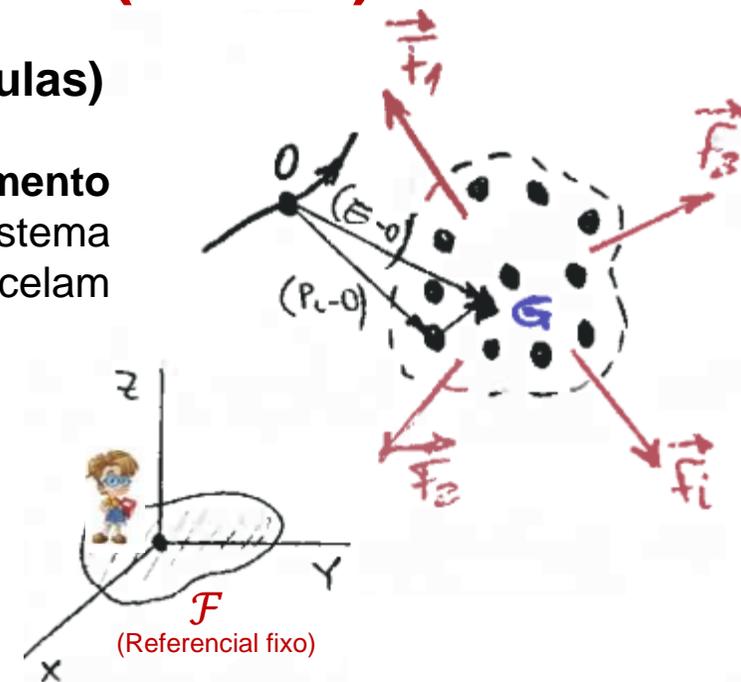


## □ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

### ➤ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (Sistema de Partículas)

- A partir do Princípio da Ação-e-Reação (3ª Lei de Newton), o **momento resultante de todas as forças internas** atuantes nas partículas do sistema com respeito ao polo  $O$  é **nulo** (momentos das forças internas se cancelam mutuamente). Portanto:

$$\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{H}_O}{dt} = m(\vec{v}_G \wedge \vec{v}_O) + \vec{M}_O^{ext} \quad (6)$$



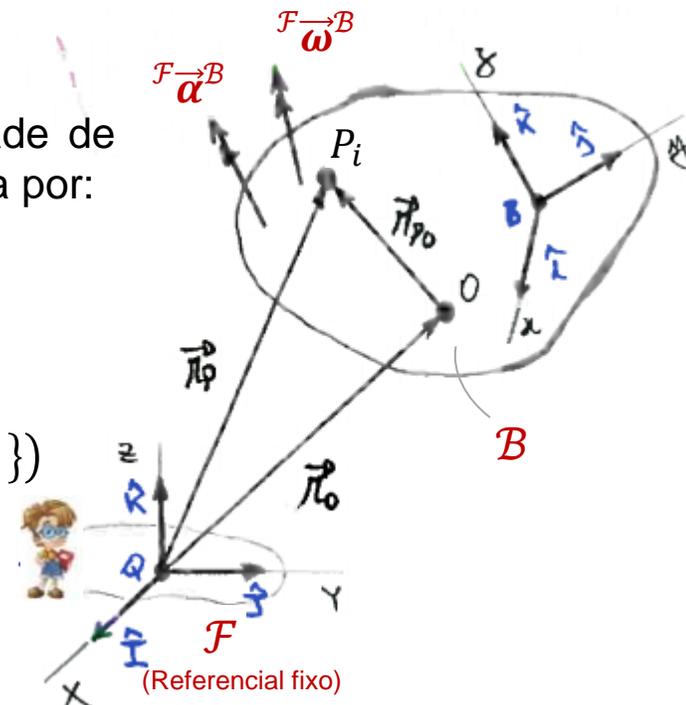
- Eq. (6) é igualmente válida para sistemas de partículas e corpos rígidos, uma vez que nenhuma particularização foi admitida em relação à rigidez do sistema.

## □ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

### ➤ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

- Para o **caso particular de corpo rígido**, a variação temporal da quantidade de movimento angular (Eq. 2) em relação a um referencial fixo (inercial)  $\mathcal{F}$  é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{H}_O}{dt} &= \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} \left[ m(G - O) \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + [I]_{Oxyz} \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \} \right] \\ &= m \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} (G - O) \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + m(G - O) \wedge \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} ({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O) + \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} ([I]_{Oxyz} \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \}) \\ &= m({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_G - \cancel{{}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O}) \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O + m(G - O) \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O + \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} ([I]_{Oxyz} \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \}) \end{aligned}$$



- Portanto:

$$\frac{{}^{\mathcal{F}}d\vec{H}_O}{dt} = m({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_G \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O) + m(G - O) \wedge {}^{\mathcal{F}}\vec{a}_O + \frac{{}^{\mathcal{F}}d}{dt} ([I]_{Oxyz} \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \}) \quad (7)$$

## □ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

### ➤ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

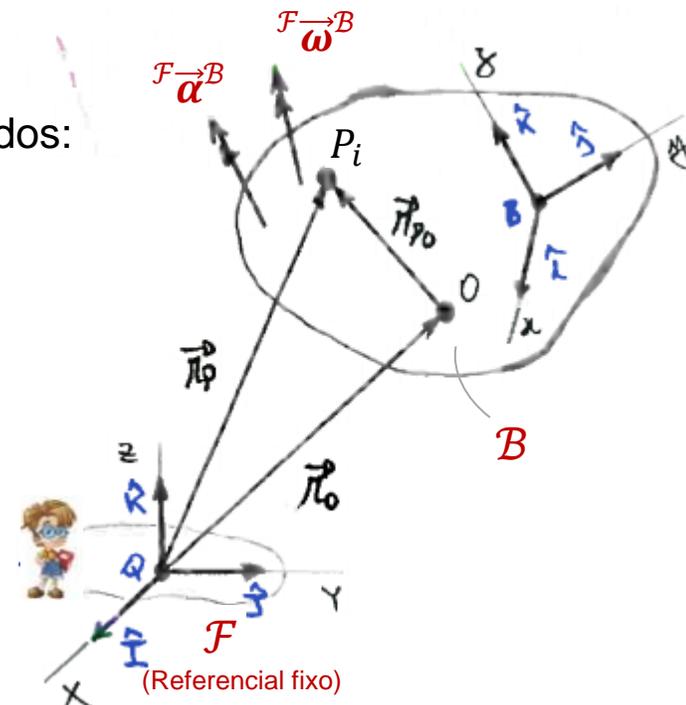
- Igualando as Eq. 6 e 7, obtém-se a expressão final do TQMA para corpos rígidos:

$$\vec{M}_O^{ext} = m(G - O) \wedge {}^F\vec{a}_O + \frac{d}{dt} ([I]_{Oxyz} \{ {}^F\vec{\omega}^B \}) \quad (8)$$

#### ▪ Observações:

- A Eq. (8) é válida **apenas para corpos rígidos**.
- O polo  $O$  deve pertencer ao corpo rígido, ou ser uma extensão rígida do mesmo ( $\vec{v}_{P_i/O} = \vec{0}$ ).
- O sistema de coordenadas  $Oxyz$  é, em geral, solidário a  $B$ , de forma que  $[I]_{Oxyz}$  seja constante no tempo.
- Nos casos particulares de  $O = G$  e/ou  ${}^F\vec{a}_O = \vec{0}$ :

$$\vec{M}_O^{ext} = \frac{d}{dt} ([I]_{Oxyz} \{ {}^F\vec{\omega}^B \}) \quad (9)$$



## □ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

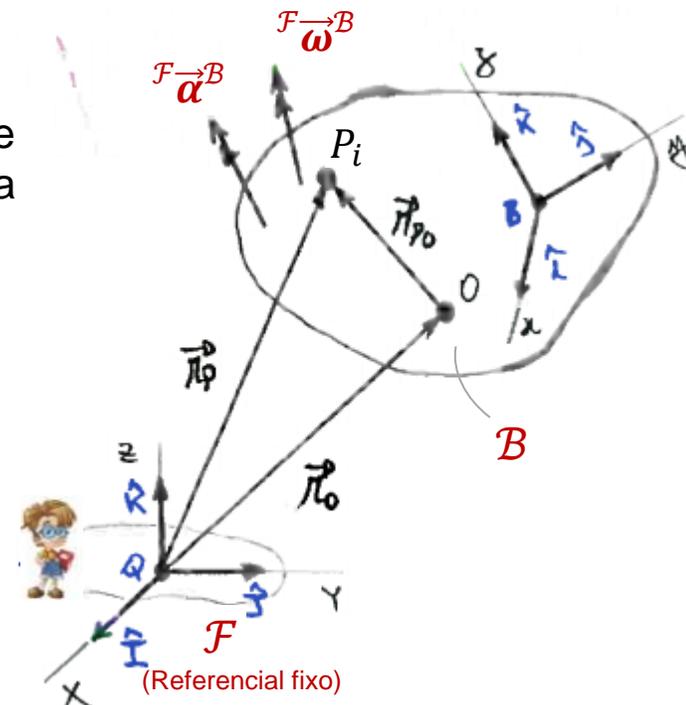
### ➤ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

- Admitindo que as grandezas vetoriais são expressas no sistema de coordenadas solidário a  $\mathcal{B}$ , e aplicando o Teorema de Transporte da Cinemática Vetorial ao segundo termos do lado direito da Eq. 8, tem-se:

$$\frac{{}^F d}{dt} ([I]_{Oxyz} \{ {}^F \vec{\omega}^{\mathcal{B}} \}) = \underbrace{\frac{{}^B d}{dt} ([I]_{Oxyz} \{ {}^F \vec{\omega}^{\mathcal{B}} \})}_{= ([I]_{Oxyz} {}^F \vec{\alpha}^{\mathcal{B}}), \text{ pois } Oxyz \text{ é solidário ao corpo e, portanto, } [I]_{Oxyz} \text{ é constante.}} + {}^F \vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge ([I]_{Oxyz} \{ {}^F \vec{\omega}^{\mathcal{B}} \})$$

- Neste caso:

$$\vec{M}_O^{ext} = \underbrace{m(G - O) \wedge {}^F \vec{a}_O}_{\text{Termo associado à aceleração do polo}} + \underbrace{[I]_{Oxyz} {}^F \vec{\alpha}^{\mathcal{B}}}_{\text{Termo associado à aceleração angular do corpo}} + \underbrace{{}^F \vec{\omega}^{\mathcal{B}} \wedge ([I]_{Oxyz} \{ {}^F \vec{\omega}^{\mathcal{B}} \})}_{\text{Momento Giroscópio ("momento das forças de inércia")}} \quad (10)$$



# □ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

## ➤ Teorema da Quantidade de Movimento Angular (Corpo Rígido)

- Em problemas planos (plano  $Oxy$ ), a Eq. 10 é simplificada:

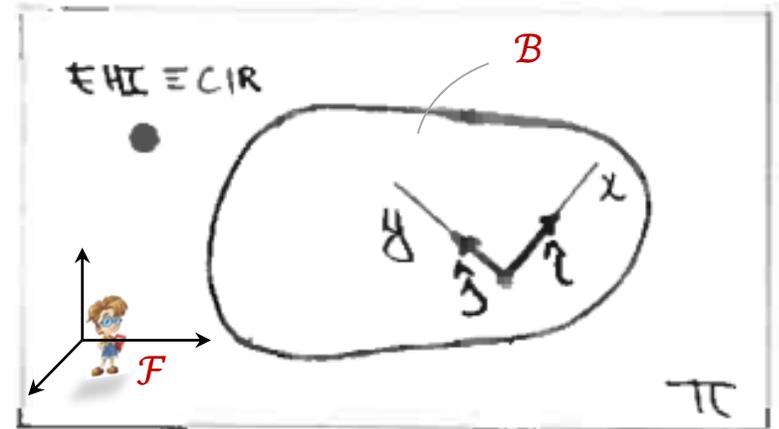
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\vec{\omega}^B &= \omega \hat{\mathbf{k}} \\ \mathcal{F}\vec{\alpha}^B &= \alpha \hat{\mathbf{k}} \\ J_{Oxz} = J_{Oyz} &= 0 \\ \hat{\mathbf{k}} &= \vec{\mathbf{0}}\end{aligned}$$

 $\Rightarrow$ 

$$\vec{\mathbf{M}}_O^{ext} = m(G - O) \wedge \mathcal{F}\vec{\mathbf{a}}_O + (J_{Oz}\alpha)\hat{\mathbf{k}} \quad (11)$$

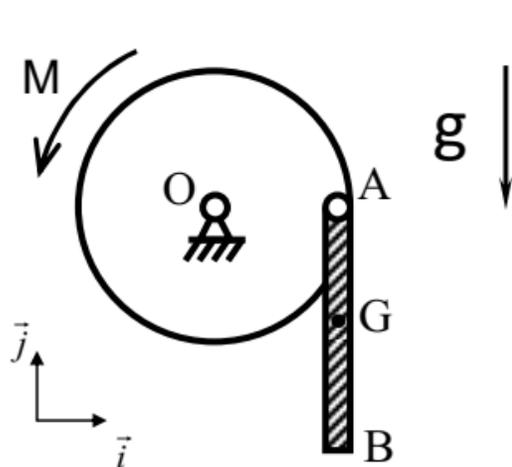
 $O = G \text{ e/ou}$   
 $\mathcal{F}\vec{\mathbf{a}}_O = \vec{\mathbf{0}}$ 

$$\vec{\mathbf{M}}_O^{ext} = (J_{Oz}\alpha)\hat{\mathbf{k}} \quad (12)$$



## Exercício 5 (P3–Q3–2012)

**3ª Questão (3,5 pontos):** No sistema mostrado na figura, o disco de massa  $m$  e raio  $R$  está articulado no ponto A à barra AB, de massa  $m$  e comprimento  $L$ . Num dado instante, o disco, inicialmente em repouso, é submetido a um binário



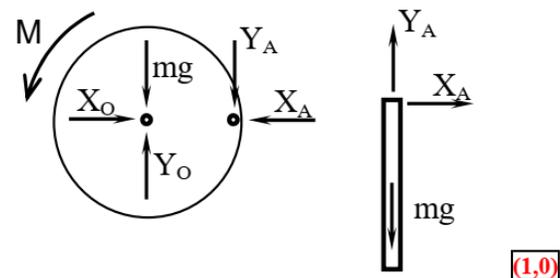
$\vec{M} = M\vec{k}$ . Para o instante da aplicação de  $\vec{M}$ , pede-se:

- Os diagramas de corpo livre do disco e da barra
- A aceleração do ponto A em função da aceleração  $\dot{\omega}$  do disco
- A aceleração angular  $\dot{\Omega}$  da barra (sugestão: utilize o polo A)
- A aceleração angular  $\dot{\omega}$  do disco e as reações vinculares no ponto A

Dados: para o disco  $J_{z_O} = \frac{mR^2}{2}$  e para a barra  $J_{z_G} = \frac{mL^2}{12}$

## Exercício 5 (P3-Q3-2012)

(a)



(1,0)

(b) Relação cinemática para o disco no instante pedido

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A - O)]$$

Como  $\vec{a}_A = \vec{0}$  e  $\vec{\omega} = \vec{0}$ ,  $\vec{a}_A = \dot{\omega} R \vec{j}$  (0,5)

(c) Teorema do momento angular para a barra, polo A

$$\frac{d}{dt} \{ \{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \} [I_A] \{ \dot{\Omega} \} \} + m(G - A) \wedge \vec{a}_A = \vec{M}_A$$

Como  $\vec{M}_A = \vec{0}$  e  $m(G - A) \wedge \vec{a}_A = -m \frac{L}{2} \vec{j} \wedge \dot{\omega} R \vec{j} = \vec{0}$ , tem-se  $J_{z_A} \dot{\Omega} = 0 \Rightarrow \dot{\Omega} = \vec{0}$  (1,0)

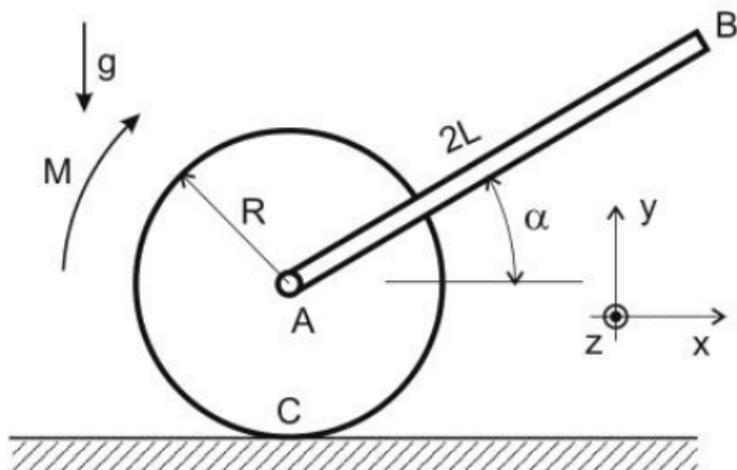
(d) (1,0) Relação cinemática para a barra  $\vec{a}_G = \vec{a}_A = \dot{\omega} R \vec{j}$

Teorema do movimento do baricentro para a barra

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_{G_x} = 0 \\ \sum F_y = ma_{G_y} \end{cases} \Rightarrow Y_A - mg = m\dot{\omega}R \quad (I) \text{ e } X_A = 0$$

## Exercício 6 (P3–Q3–2015)

**Questão 3 (4,0 pontos):** O disco homogêneo de centro  $A$ , massa  $2m$  e raio  $R$  está ligado por uma articulação ideal (em  $A$ ) à barra homogênea  $AB$ , que possui massa  $m$  e comprimento  $2L$ . O disco rola sem escorregar sobre o plano horizontal, e deseja-se aplicar a este disco um binário  $\vec{M}$ , como indicado na figura, de modo que o ângulo  $\alpha$ , entre a direção da barra e a horizontal, permaneça constante. Pedem-se, em função dos dados do problema ( $m$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $\alpha$  e  $g$ ):

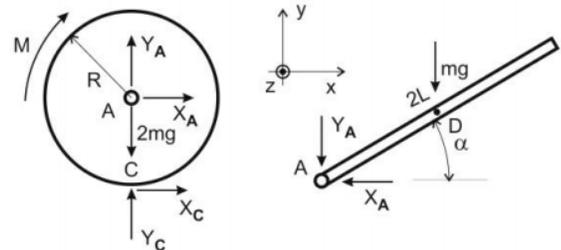


- construa os diagramas de corpo livre da barra e do disco;
- considerando a barra, determine a aceleração do ponto  $A$  necessária para que o ângulo  $\alpha$  permaneça constante;
- obtenha as componentes das forças atuantes no ponto  $A$  da barra  $AB$ ;
- determine a aceleração angular do disco;
- obtenha as forças reativas no ponto  $C$  do disco em contato com o solo;
- determine o binário  $\vec{M}$  a ser aplicado ao disco.

## Exercício 6 (P3-Q3-2015)



Electric Self-Balancing Unicycle



a) (1 ponto no total sendo 0,5 pontos cada diagrama completamente correto)

b) (1 ponto (resposta correta)/0,5 pontos (somente equação do TQMA))

Barra AB, TQMA para o polo A (em movimento de translação):

$$m(D - A) \wedge \vec{a}_A + J_{A_z} \dot{\omega} \vec{k} = \vec{M}_A^{ext}$$

$$mL(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \wedge a_A \vec{i} + \vec{0} = -mg\vec{j} \wedge (D - A)$$

$$mL(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}) \wedge a_A \vec{i} = -mg\vec{j} \wedge L(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})$$

$$-mLa_A \sin \alpha \vec{k} = -mg\vec{j} \wedge L \cos \alpha \vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = \frac{g}{\tan \alpha} \vec{i} = g \cotg \alpha \vec{i}$$

c) (0,5 pontos 2 respostas /0,3 pontos 1 resposta) TR para a barra AB:

$$m\vec{a}_G = m\vec{a}_A = mg \cotg \alpha \vec{i} = -X_A \vec{i} + (-Y_A - mg)\vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_A = -mg \cotg \alpha \\ Y_A = -mg \end{cases} \Rightarrow \vec{X}_A = mg \cotg \alpha \vec{i} \quad e \quad \vec{Y}_A = -mg\vec{j}$$

d) (0,5 pontos) Temos, para o disco rolando sem escorregar:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (A - C) = \vec{0} + \omega \vec{k} \wedge (R\vec{j}) = -\omega R \vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_A = -\dot{\omega} R \vec{i} \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{g}{R \tan \alpha} = -\frac{g}{R} \cotg \alpha \quad e \quad \vec{\omega} = -\frac{g}{R} \cotg \alpha \vec{k}$$

e) (0,5 pontos 2 respostas /0,3 pontos 1 resposta) TR para o disco:

$$2m\vec{a}_G = 2m\vec{a}_A = 2mg \cotg \alpha \vec{i} = (X_A + X_C)\vec{i} + (Y_C + Y_A - 2mg)\vec{j} \Rightarrow$$

$$2mg \cotg \alpha \vec{i} = (-mg \cotg \alpha + X_C)\vec{i} + (Y_C - mg - 2mg)\vec{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{X}_C = 3mg \cotg \alpha \vec{i} \\ \vec{Y}_C = 3mg\vec{j} \end{cases}$$

f) (0,5 pontos) TQMA para o disco, polo A:

$$J_A \dot{\omega} = M - X_C R \Rightarrow M = J_A \dot{\omega} + X_C R = \frac{2mR^2}{2} \frac{g}{R} \cotg \alpha + 3mg \cotg \alpha R = 4mgR \cotg \alpha$$

$$\therefore \vec{M} = -4mgR \cotg \alpha \vec{k}$$



## □ Exercício 6 (P3–Q3–2015)

Teorema do momento angular para o disco, polo O

$$\frac{d}{dt} \left( [\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}] I_O \{\omega\} \right) + m(G-O) \wedge \bar{a}_O = \bar{M}_O \Rightarrow J_{z_O} \dot{\omega} = M - Y_A R$$

Substituindo  $Y_A$  obtido na Equação (I) e o valor de  $J_{z_O}$ , tem-se  $\dot{\omega} = \frac{2M - 2mgR}{3mR^2} \bar{k}$

Substituindo na Equação (I), tem-se  $Y_A = \frac{mg}{3} + \frac{2M}{3R}$

Alternativa de solução do item c

Teorema do momento angular para a barra, polo G

$$\frac{d}{dt} \left( [\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}] I_G \{\Omega\} \right) + m(G-G) \wedge \bar{a}_G = \bar{M}_G \Rightarrow J_{z_O} \dot{\Omega} = -\frac{X_A L}{2} \quad (II)$$

Relação cinemática para a barra  $\bar{a}_G = \bar{a}_A + \dot{\bar{\Omega}} \wedge (G-A) + \bar{\Omega} \wedge [\bar{\Omega} \wedge (G-A)]$

como  $\bar{\Omega} = \bar{0}$ , tem-se  $\bar{a}_G = \dot{\omega} R \bar{j} - \frac{\dot{\Omega} L}{2} \bar{i}$

Teorema do movimento do baricentro para a barra

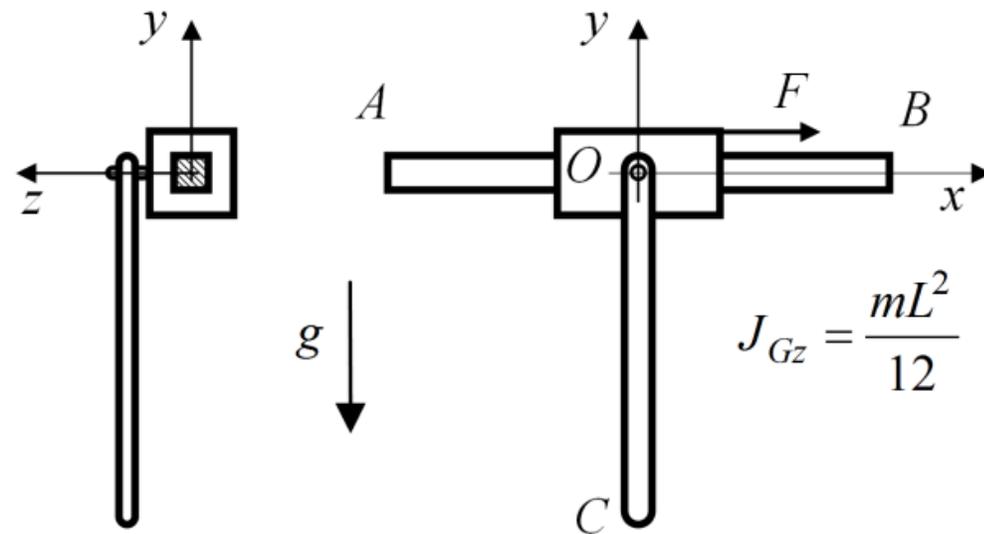
$$\begin{cases} X_A = m \frac{\dot{\Omega} L}{2} & (III) \\ Y_A - mg = m \dot{\omega} R \end{cases}$$

das Equações (II) e (III), tem-se  $\dot{\bar{\Omega}} = \bar{0}$

## □ 2014–P3–Q2

**Questão 2 (3,5 pontos):** O anel de seção retangular e massa  $m$  pode deslizar sem atrito sobre a guia horizontal  $AB$ . A barra homogênea  $OC$ , de comprimento  $L$  e massa  $m$  é articulada sem atrito ao anel por meio de um pino horizontal em  $O$ . É aplicada ao anel uma força  $F$  horizontal. Sabendo que o sistema parte do repouso, com a barra pendente na vertical, pede-se determinar:

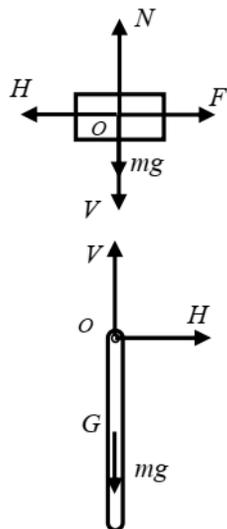
- o diagrama de corpo livre para a barra;
- para o instante inicial, a aceleração angular da barra, a aceleração do anel e a reação da articulação sobre a barra em  $O$ .



## 2014-P3-Q2

### Solução

a) **1,0** Diagramas de corpo livre:



b) **2,5** Teorema do movimento do baricentro:

Anel:

$$ma_{Ox} = F - H$$

$$ma_{Oy} = N - V - mg = 0$$

Barra:

$$ma_{Gx} = H$$

$$ma_{Gy} = V - mg$$

Teorema do momento da quantidade de movimento para a barra:

$$J_{Gz} \dot{\omega} = -H \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{mL^2}{12} \dot{\omega} = -H \frac{L}{2} \Rightarrow H = -\frac{mL}{6} \dot{\omega}$$

Da cinemática, no instante inicial, quando  $\vec{\omega} = \vec{0}$ :

$$\vec{a}_G = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - O)] = a_{Ox} \vec{i} + \dot{\omega} \frac{L}{2} \vec{i}$$

Ou seja, no instante inicial  $a_{Gy} = 0 \Rightarrow V = mg$

Substituindo nas equações do teorema do movimento do baricentro da barra e do anel:

$$\text{Barra: } m \left( a_{Ox} + \dot{\omega} \frac{L}{2} \right) = -\frac{mL}{6} \dot{\omega}$$

$$\text{Anel: } ma_{Ox} = F - \left( -\frac{mL}{6} \dot{\omega} \right)$$

Portanto:

$$F + 2 \frac{mL}{6} \dot{\omega} = -m \dot{\omega} \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{5mL}{6} \dot{\omega} = -F \Rightarrow \dot{\omega} = -\frac{6F}{5mL}$$

$$\text{Também resulta que } H = -\frac{mL}{6} \left( -\frac{6F}{5mL} \right) \Rightarrow H = \frac{F}{5}$$

Substituindo na equação do teorema do movimento do baricentro do anel na direção horizontal:

$$ma_{Ox} = F - \frac{F}{5} \Rightarrow \vec{a}_O = \frac{4F}{5m} \vec{i}$$

Dos resultados anteriores:

$$\vec{R} = H \vec{i} + V \vec{j} \Rightarrow \vec{R} = \frac{F}{5} \vec{i} + mg \vec{j}$$



# Conteúdo

1. Motivação e Objetivos
2. Sistema de Partículas e Corpo Rígido
3. Teorema da Quantidade de Movimento (TQM)
4. Distribuição de Massa
5. Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)
- 6. Teorema da Energia Cinética (TEC)**

## □ Teorema da Energia Cinética (TEC)

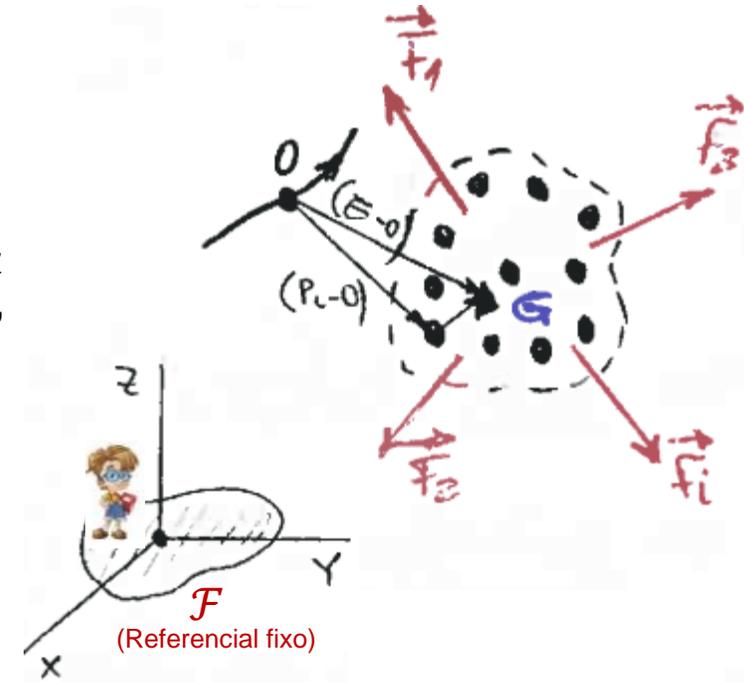
### ➤ Energia Cinética (Sistema de Partículas)

- A energia cinética de um sistema composto por  $N$  partículas materiais  $P_i$  de massa  $m_i$  e velocidade  $\vec{v}_i$ , em relação a um referencial fixo (inercial)  $\mathcal{F}$ , é definida por:

$$E \triangleq \sum_{i=1}^N E_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)}{2} \Rightarrow E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) \quad (1)$$

### ▪ Observações:

- A Eq. (1) é igualmente válida para sistemas de partículas e corpos rígidos, uma vez que nenhuma particularização foi admitida em relação à rigidez do sistema.
- Para um sistema de partículas **qualquer**, é necessário conhecer os valores da massa e velocidade de **cada** partícula para o cálculo de  $E$ .
- Para um sistema de partículas **qualquer**, não é possível determinar  $E$  unicamente em função das propriedades do centro de massa do sistema.



## □ Teorema da Energia Cinética (TEC)

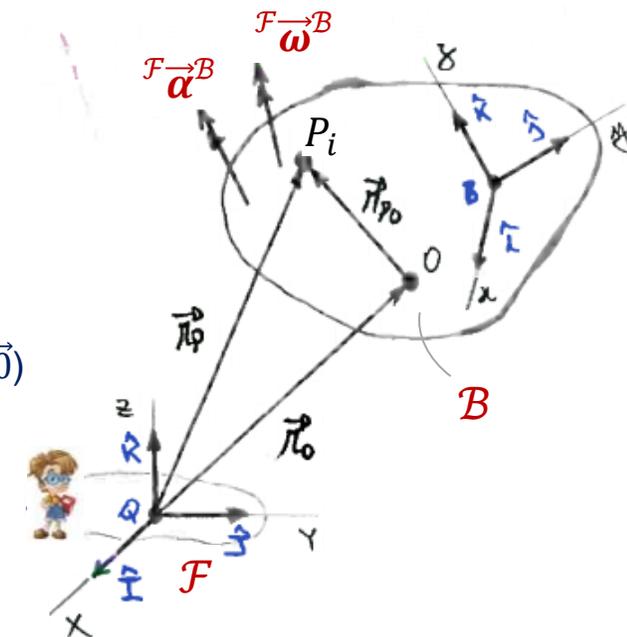
### ➤ Energia Cinética (Corpo Rígido)

- Para o **caso particular de corpo rígido**, a velocidade de cada partícula material  $P_i$  do corpo pode ser expressa pela equação do campo de velocidades (vínculo cinemático relacionado à rigidez do corpo):

$${}^F\vec{v}_{P_i} = {}^F\vec{v}_O + {}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O) \quad O \in B, \text{ ou uma extensão rígida do mesmo } (\vec{v}_{P_i/O} = \vec{0})$$

- Substituindo a expressão acima na Eq. 1:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i ({}^F\vec{v}_{P_i} \cdot {}^F\vec{v}_{P_i}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \{ [{}^F\vec{v}_O + {}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] \cdot [{}^F\vec{v}_O + {}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] \} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \{ m_i {}^F\vec{v}_O \cdot {}^F\vec{v}_O + 2m_i {}^F\vec{v}_O \cdot [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] + m_i [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] \cdot [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] \} \\ &= \frac{{}^F\vec{v}_O \cdot {}^F\vec{v}_O}{2} \sum_{i=1}^N m_i + {}^F\vec{v}_O \cdot \left[ {}^F\vec{\omega}^B \wedge \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \{ m_i [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] \cdot [{}^F\vec{\omega}^B \wedge (P_i - O)] \} \end{aligned}$$





## □ Teorema da Energia Cinética (TEC)

### ➤ Energia Cinética (Corpo Rígido)

- Os termos da expressão anterior podem ser simplificados, como segue:

$$E = \frac{{}^{\mathcal{F}}\vec{v}_0 \cdot {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_0}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i}_{=m} + {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_0 \cdot \left[ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})}_{=m(\mathbf{G} - \mathbf{O})} \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left\{ m_i [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})] \cdot [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge (\mathbf{P}_i - \mathbf{O})] \right\}$$

Quando  $Oxyz$  é solidário a  $\mathcal{B}$ , a matriz de inércia é constante.

$$\begin{aligned} {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B &= \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k} \\ (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) &= x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k} \\ Oxyz &\text{ geralmente solidário a } \mathcal{B} \end{aligned}$$



$$\{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \}^T [\mathbf{I}_0] \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \} \quad (\text{escalar})$$

- Finalmente:

$$E = \underbrace{\frac{m}{2} ({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_0 \cdot {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_0)}_{\text{Translação pura do polo 0}} + \underbrace{m {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_0 \cdot [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{O})]}_{\text{Roto-translação de G em torno do polo 0}} + \underbrace{\frac{1}{2} \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \}^T [\mathbf{I}_0] \{ {}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \}}_{\text{Rotação pura em torno do polo 0}} \quad (2)$$

## □ Teorema da Energia Cinética (TEC)

### ➤ Energia Cinética (Corpo Rígido)

#### ▪ Observações:

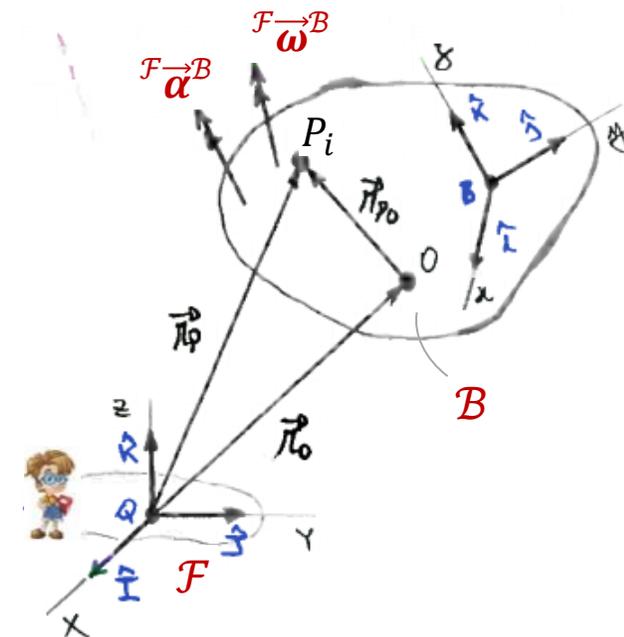
- A Eq. (2) é válida **apenas para corpos rígidos**.
- O polo 0 deve pertencer ao corpo rígido, ou ser uma extensão rígida do mesmo ( $\vec{v}_{P_i/O} = \vec{0}$ ).
- O sistema de coordenadas  $Oxyz$  é, em geral, solidário a  $\mathcal{B}$ , de forma que  $[I_0]$  seja constante no tempo.
- O valor da energia cinética **independe** do polo e do sistema de coordenadas escolhidos para seu cálculo. A energia cinética é uma grandeza escalar.
- No caso particular de  $O = G$ :

$$E = \underbrace{\frac{m}{2} ({}^F\vec{v}_G \cdot {}^F\vec{v}_G)}_{\text{Translação pura de G}} + \underbrace{\frac{1}{2} \{ {}^F\vec{\omega}^B \}^T [I_G] \{ {}^F\vec{\omega}^B \}}_{\text{Rotação pura em torno de G}} \quad (3)$$

Translação pura de G      Rotação pura em torno de G

- No caso particular de  ${}^F\vec{v}_O = \vec{0}$ :

$$E = \frac{1}{2} \{ {}^F\vec{\omega}^B \}^T [I_0] \{ {}^F\vec{\omega}^B \} \quad (4)$$



## □ Teorema da Energia Cinética (TEC)

### ➤ Energia Cinética (Corpo Rígido)

- Em problemas planos (plano  $xy$ ), a Eq. 2 é simplificada:

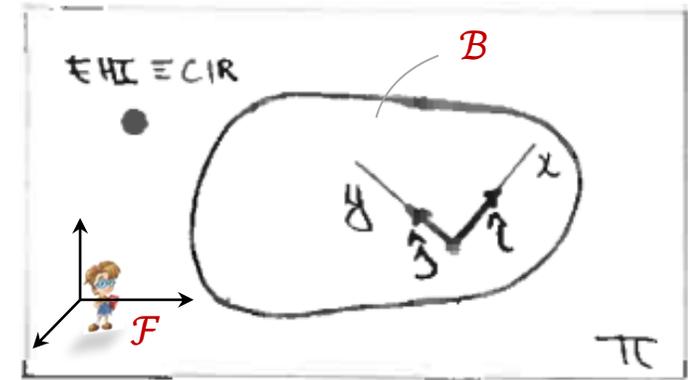
$$E = \frac{m}{2} ({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O \cdot {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O) + m {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O \cdot [{}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B \wedge (G - O)] + \frac{J_{Oz}\omega^2}{2} \quad (5)$$

$$O = G$$

$${}^{\mathcal{F}}\vec{v}_O = \vec{0}$$

$$E = \frac{m}{2} ({}^{\mathcal{F}}\vec{v}_G \cdot {}^{\mathcal{F}}\vec{v}_G) + \frac{J_{Gz}\omega^2}{2}$$

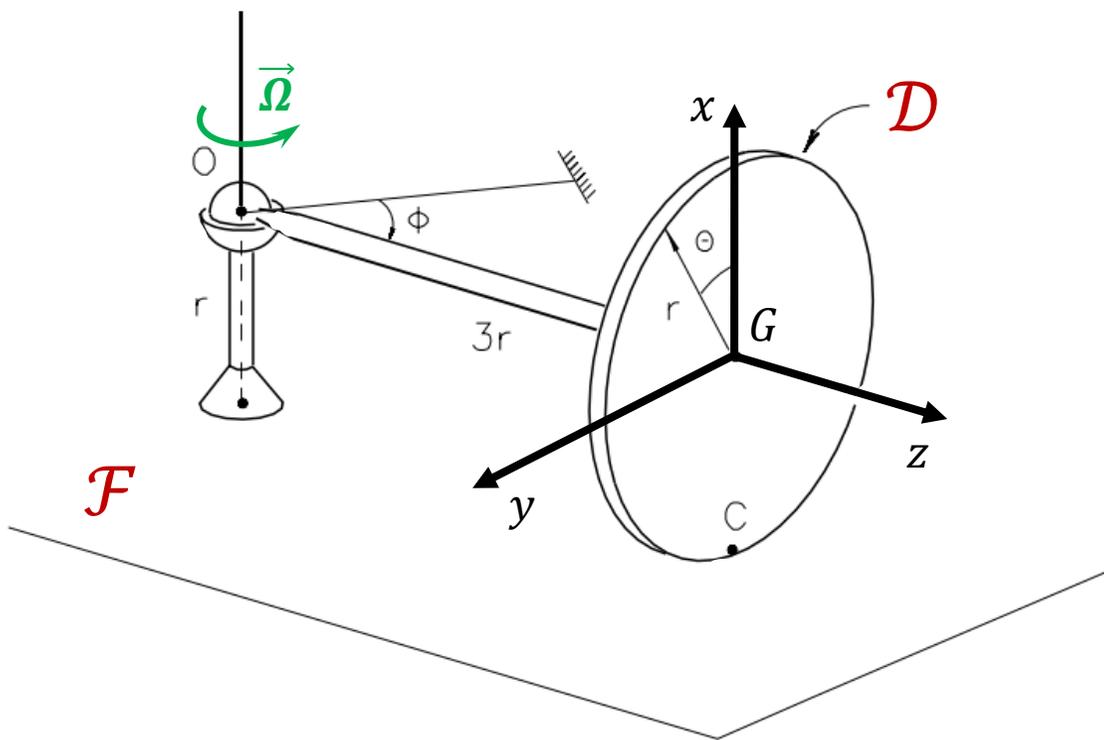
$$E = \frac{J_{Oz}\omega^2}{2}$$



$${}^{\mathcal{F}}\vec{\omega}^B = \omega \hat{k}$$

$$J_{Oxz} = J_{Oyz} = 0$$

## Exercício 7



- Disco de massa  $m$  e raio  $r$  acoplado a uma haste  $GO$  rola sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal;
- A haste  $GO$  tem massa desprezível;
- Calcule a energia cinética do disco em função de  $m$ ,  $r$  e  $\Omega$ , utilizando os polos  $G$ ,  $C$  e  $O$ .
- Dados:  $J_{Gx} = J_{Gy} = \frac{mr^2}{4}$  e  $J_{Gz} = \frac{mr^2}{2}$

$$J_{Gxy} = J_{Gxz} = J_{Gyz} = 0$$

### Resposta

$$[I]_{Gxyz} = \frac{mr^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$${}^F\vec{\omega}^D = \Omega(\hat{i} - 3\hat{k})$$

$${}^F\vec{v}_G = -3\Omega r\hat{j}$$

$$[I]_{Cxyz} = \frac{mr^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$E = \frac{55mr^2\Omega^2}{8}$$

## □ Teorema da Energia Cinética (TEC)

### ➤ Teorema da Energia Cinética

- Considerando a variação temporal da energia cinética de um sistema de  $N$  partículas materiais  $P_i$  (Eq. 1) em relação a um referencial fixo (inercial)  $\mathcal{F}$ , e admitindo a **massa de cada partícula constante**, tem-se:

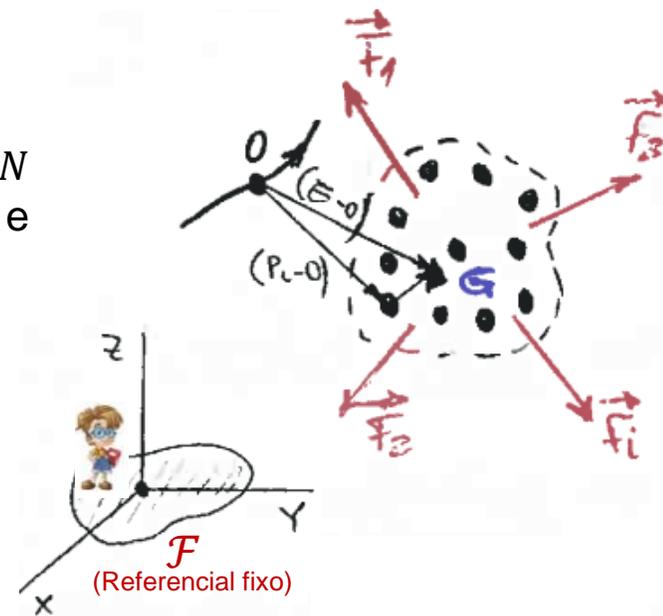
$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N E_i \right) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{dE_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{m_i}{2} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \right) \right] = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left[ \frac{d}{dt} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i + \vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i \right) = \sum_{i=1}^N \underbrace{(m_i \vec{a}_i)}_{\vec{R}_i} \cdot \vec{v}_i$$

$$\vec{R}_i = \vec{R}_i^{\text{ext}} + \vec{R}_i^{\text{int}} \quad (2^{\text{a}} \text{ Lei de Newton})$$

- Portanto:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \vec{R}_i^{\text{int}} \cdot \vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad dE = \underbrace{\sum_{i=1}^N (\vec{R}_i^{\text{ext}} \cdot \vec{v}_i) dt}_{= dW_{\text{ext}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N (\vec{R}_i^{\text{int}} \cdot \vec{v}_i) dt}_{= dW_{\text{int}}} = dW_{\text{ext}} + dW_{\text{int}}$$



## □ Teorema da Energia Cinética (TEC)

### ➤ Teorema da Energia Cinética

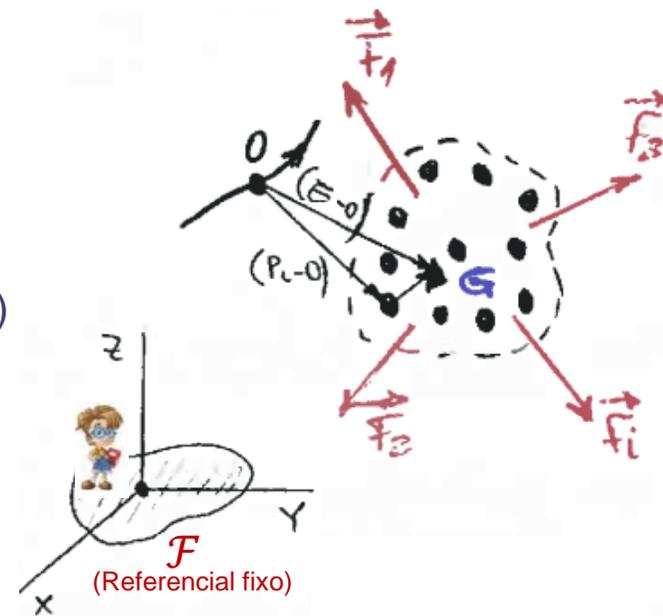
- Integrando a equação anterior no intervalo  $[t_1, t_2]$ , obtém-se:

$$\int_{E_1}^{E_2} dE = \int_{t_1}^{t_2} dW_{\text{ext}} + \int_{t_1}^{t_2} dW_{\text{ext}} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} E_2 - E_1 &= W^{1 \rightarrow 2} \\ W^{1 \rightarrow 2} &= W_{\text{ext}}^{1 \rightarrow 2} + W_{\text{int}}^{1 \rightarrow 2} \end{aligned}} \quad (6)$$

- A Eq. (6) corresponde ao TEC para sistemas de partículas, inclusive corpos rígidos, uma vez que nenhuma particularização foi admitida em relação à rigidez do sistema.
- Note que o trabalho total realizado no sistema é composto pela soma do trabalho das forças internas e externas atuantes no sistema.
- Admitindo que os esforços internos e externos podem ser **conservativos** e **não-conservativos** para o cálculo do trabalho total, e considerando a definição de energia potencial, tem-se:

$$W_{\text{ext}}^{1 \rightarrow 2} = W_{\text{ext,c}}^{1 \rightarrow 2} + W_{\text{ext,nc}}^{1 \rightarrow 2} = U_{\text{ext}}^1 - U_{\text{ext}}^2 + W_{\text{ext,nc}}^{1 \rightarrow 2}$$

$$W_{\text{int}}^{1 \rightarrow 2} = W_{\text{int,c}}^{1 \rightarrow 2} + W_{\text{int,nc}}^{1 \rightarrow 2} = U_{\text{int}}^1 - U_{\text{int}}^2 + W_{\text{int,nc}}^{1 \rightarrow 2}$$



## □ Teorema da Energia Cinética (TEC)

### ➤ Teorema da Energia Cinética

- Portanto, substituindo as equações anteriores na Eq. 6, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 &= W_{nc}^{1 \rightarrow 2} \\ \mathcal{E} &= E + U_{ext} + U_{int} \\ W_{nc}^{1 \rightarrow 2} &= W_{ext, nc}^{1 \rightarrow 2} + W_{int, nc}^{1 \rightarrow 2} \end{aligned}$$

- (7) - Teorema da Energia Mecânica (TEM)  
-  $\mathcal{E}$  : energia mecânica

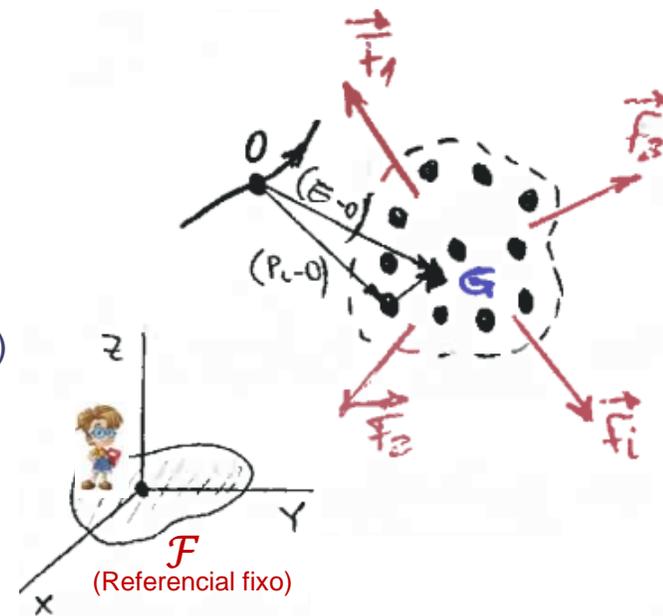
- No caso particular de **corpos rígidos**:

- A energia cinética deve ser calculada a partir da expressão geral (Eq. 2).
- A energia potencial gravitacional deve ser calculada a partir da posição do centro de massa do corpo.
- Devido à propriedade de rigidez do corpo,  $W_{int}^{1 \rightarrow 2} = 0$ . Logo:

$$E_2 - E_1 = W_{ext}^{1 \rightarrow 2}$$

ou

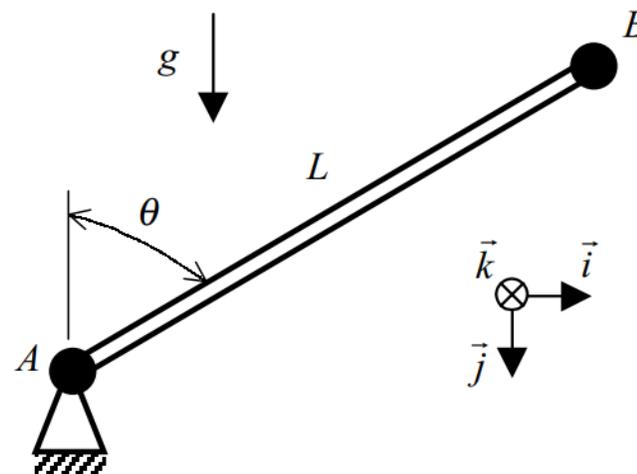
$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = W_{ext, nc}^{1 \rightarrow 2}, \quad \mathcal{E} = E + U_{ext} \quad (8)$$



## □ Exercício 8 (P3–Q1–2002)

**(5,0 pontos) Questão 2** – Um sólido é composto por uma barra  $AB$ , homogênea, de comprimento  $L$  e massa  $3M$  e dois pontos materiais de massa  $M$  cada um, rigidamente fixados nas extremidades  $A$  e  $B$  da barra. O sólido é articulado sem atrito em  $A$ . Pede-se:

- O momento de inércia do sólido em relação ao eixo paralelo ao versor  $\vec{k}$  e que passa pelo ponto  $A$ .
- A velocidade angular do sólido, em função de  $\theta$ . Sabe-se que ele é liberado em  $\theta = 30^\circ$ , partindo do repouso. Use o Teorema da Energia Cinética
- O diagrama de corpo livre do sólido na posição inicial,  $\theta = 30^\circ$ , logo depois de liberado.
- A aceleração angular do sólido, para  $\theta = 30^\circ$ , logo depois de liberado. Use o Teorema do Momento Angular.
- As reações da articulação  $A$  no sólido neste instante.



$$J_{Gz} = \frac{ml^2}{12} \quad (\text{para uma barra homogênea de massa } m \text{ e comprimento } l)$$



## ❑ Exercício 8 (P3–Q1–2002)

**Solução:**

**Item (a)**

$$J_{Az} = \underbrace{\frac{(3M)L^2}{12} + (3M)\left(\frac{L}{2}\right)^2}_{\text{barra}} + \underbrace{M0^2 + ML^2}_{\text{pontos materiais}} = \frac{3ML^2}{12} + \frac{3ML^2}{4} + ML^2 = \frac{3ML^2 + 9ML^2 + 12ML^2}{12} = \frac{24ML^2}{12}$$

$$J_{Az} = 2ML^2$$

**Item (b)**

Energia cinética:

$$E = \frac{J_{Az} \dot{\theta}^2}{2} = \frac{2ML^2}{2} \dot{\theta}^2 = ML^2 \dot{\theta}^2$$

Trabalho da força peso:

$$W = 5Mg \left[ \frac{L}{2} (\cos 30^\circ - \cos \theta) \right] = 5Mg \left[ \frac{L}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \theta \right) \right]$$

Teorema da energia cinética (o sólido parte do repouso):

$$E - E_0 = W \Rightarrow E - 0 = W$$

$$ML^2 \dot{\theta}^2 = 5Mg \left[ \frac{L}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \theta \right) \right]$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{5Mg \left[ \frac{L}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \theta \right) \right]}{ML^2}$$

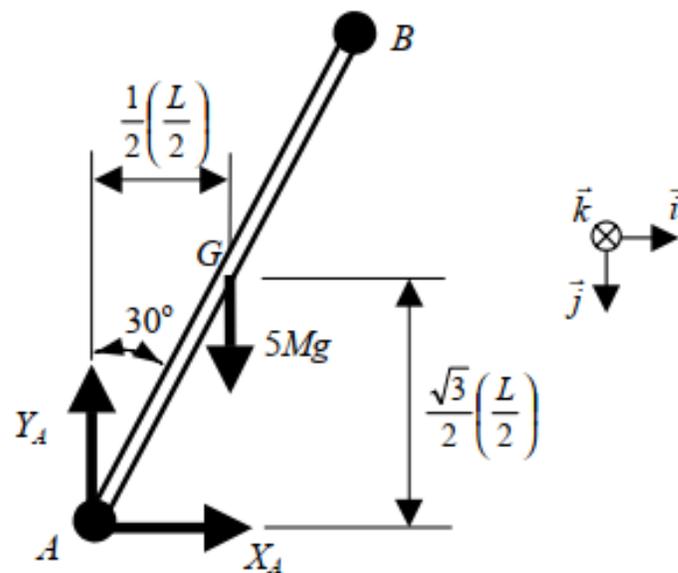
$$\dot{\theta}^2 = \frac{5g(\sqrt{3} - 2 \cos \theta)}{4L}$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{5g(\sqrt{3} - 2 \cos \theta)}{4L}}$$

## Exercício 8 (P3-Q1-2002)

### Item (c)

Pela simetria, o baricentro do sólido está no centro da barra, e pelo enunciado, a massa do sólido é  $5M$ .



### Item (d)

Teorema do Momento Angular:

$$J_{A,z} \dot{\omega} = (5Mg) \left( \frac{L}{4} \right) \Rightarrow 2ML^2 \dot{\omega} = \frac{5}{4} MgL \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{5g}{8L}$$



## □ Exercício 8 (P3–Q1–2002)

Item (e)

Teorema do Movimento do Baricentro:

$$(5M)\vec{a}_G = X_A\vec{i} + (-Y_A + 5Mg)\vec{j} \quad (\text{I})$$

Pela cinemática:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)]$$

Como  $\dot{\vec{\omega}}$  é no sentido horário,  $\dot{\vec{\omega}} = \frac{5g}{8L}\vec{k}$ , e considerando que o ponto  $A$  é fixo e que logo após a liberação da barra

temos  $\vec{\omega} = \vec{0}$ :

$$\vec{a}_G = \frac{5g}{8L}\vec{k} \wedge \left( \frac{L}{4}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}L}{4}\vec{j} \right)$$

$$\vec{a}_G = \frac{5\sqrt{3}g}{32}\vec{i} + \frac{5g}{32}\vec{j}$$

$$(5M)\vec{a}_G = \frac{5M5\sqrt{3}g}{32}\vec{i} + \frac{5M5g}{32}\vec{j}$$

$$(5M)\vec{a}_G = \frac{25\sqrt{3}}{32}Mg\vec{i} + \frac{25}{32}Mg\vec{j} \quad (\text{II})$$

Comparando (I) e (II):

$$X_A = \frac{25\sqrt{3}}{32}Mg$$

$$-Y_A + 5Mg = \frac{25}{32}Mg \Rightarrow Y_A = \frac{135}{32}Mg$$

$$\vec{X}_A = \frac{25\sqrt{3}}{32}Mg\vec{i}$$

$$\vec{Y}_A = -\frac{135}{32}Mg\vec{j}$$

## Exemplos: forças que não realizam trabalho

$$dW = \vec{F}_P \cdot d\vec{r}_P = 0$$

$$P = \vec{F}_P \cdot \vec{v}_P = 0$$

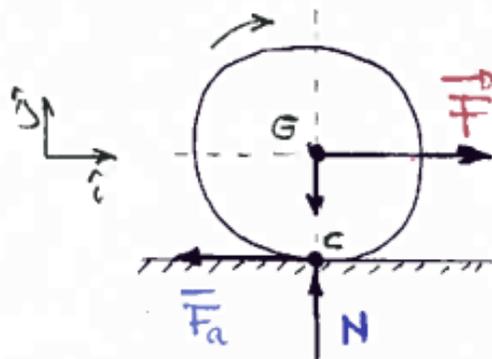


$$d\vec{r}_P = \vec{0} \text{ (ou } \vec{v}_P = \vec{0}\text{)}$$

$$\vec{F}_P \perp d\vec{r}_P \text{ (ou } \vec{F}_P \perp \vec{v}_P\text{)}$$



- Forças normais e forças de reação perpendiculares à direção do movimento.
- Forças aplicadas em pontos com velocidades nulas.



① Disco escorrega sem rolar (deslizamento puro)

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -\mu mg \int_{x_1}^{x_2} dx \Rightarrow \boxed{W = -\mu mg(x_2 - x_1)}$$

$$\underline{W < 0, dissipativo}$$

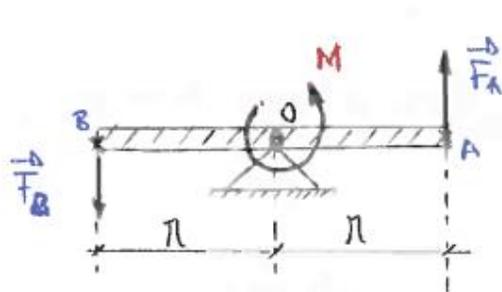
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_a = -\mu N \hat{x} = -\mu mg \hat{x} \\ d\vec{r} = dx \hat{x} \end{array} \right.$$

② Disco rola sem escorregar (rolamento puro)

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F}_a \cdot \vec{v}_C) dt \xrightarrow[\text{(CIR)}]{\vec{v}_C = \vec{0}} \boxed{W = 0}$$

## Exemplos: trabalho de um binário

– Considere o sistema a seguir sob a ação de um binário:



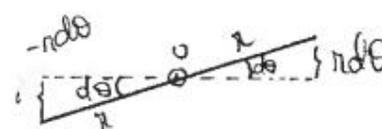
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_A = F \hat{j} \\ \vec{F}_B = -F \hat{j} \\ \mathbf{M} = 2\pi F \end{array} \right.$$

– Lembrar: o momento binário é sempre gerado por um par de forças.

Momento resultante devido ao binário de forças.

– Calculando o trabalho das duas forças que geram o momento binário:

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{F}_A \cdot d\vec{r}_A + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{F}_B \cdot d\vec{r}_B, \quad \left\{ \begin{array}{l} d\vec{r}_A = r d\theta \hat{j} \\ d\vec{r}_B = -r d\theta \hat{j} \end{array} \right.$$

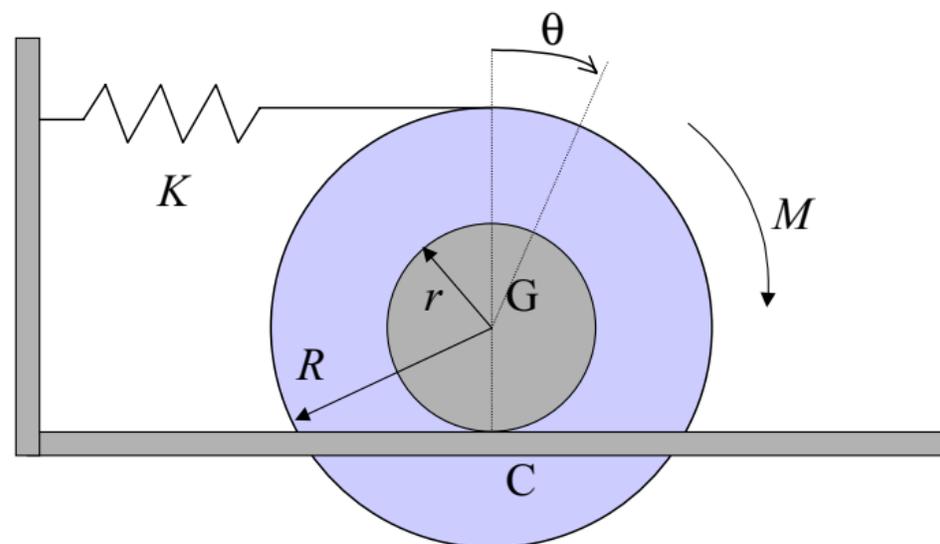


$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F r d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} F r d\theta = \frac{2F\pi}{M} (\theta_2 - \theta_1) = M \Delta\theta \quad \therefore \quad \boxed{W = M \cdot \Delta\theta}$$

## Exercício 9 (P3-Q3-2004)

### 3ª Questão (3,5 pontos)

O carretel de massa  $m$  e raios  $R$  e  $r$  rola sem escorregar sobre um plano horizontal, sob a ação de um binário de momento  $M$ , constante. Um fio ideal, preso em uma mola linear ideal de constante  $K$ , é enrolado no carretel conforme a figura. Não existe escorregamento entre o fio e o carretel. No instante inicial  $t = 0$ , quando  $\theta(0) = 0$ , o carretel está em repouso e a mola não está distendida. Pede-se:



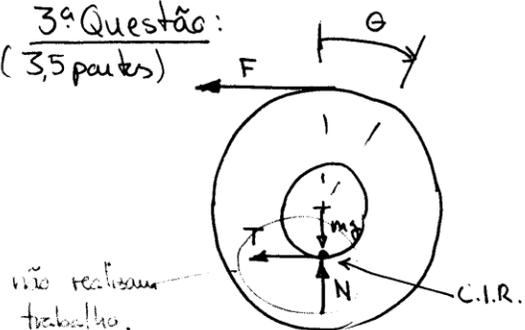
- a energia cinética do carretel, expressa em função da velocidade angular  $\omega = \dot{\theta}$ ;
- o trabalho das forças e momento externos, aplicados ao carretel, expresso em função da posição angular  $\theta$ ;
- a aceleração angular  $\dot{\omega}$  do carretel, expressa em função da posição angular  $\theta$ ;
- a aceleração do baricentro  $a_G$ , expressa em função da posição angular  $\theta$ .

**Dado: Momento de inércia baricêntrico do carretel:  $J_G$ .**



## Exercício 9 (P3-Q3-2004)

3ª Questão:  
(3,5 pontos)



propagação de erro:

- não descarta quando é erro algébrico simples;
- descarta quando:
  - erro conceitual;
  - dimensões incompatíveis.

(a)  $E = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2 = \frac{1}{2} J_G \omega^2$   $J_G = J_C + m r^2$

(1 ponto)  $E = \frac{1}{2} (J_C + m r^2) \omega^2$

sem escorregamento:  
 $v_G = r \omega$

(b)  $W_{ext} = W_{mola} + W_{momento}$

(1 ponto)  $W_{momento} = +M\theta$  (1/2)

$$W_{mola} = - \int_0^\theta K(R+r)^2 \theta d\theta = - \frac{K\delta^2}{2}$$
 (1/2)

deflexão da mola:

$$\delta = x + \theta R = (R+r)\theta$$

e  $F = K\delta = K(R+r)\theta$

$$W_{ext} = - \frac{K\delta^2}{2} + M\theta \Rightarrow W_{ext} = M\theta - \frac{K(R+r)^2}{2} \theta^2$$

(c) T.E.C  $\Delta E = W_{ext} + W_{int}$   
(1 ponto)

$$\frac{1}{2} (J_G + m r^2) \omega^2 = M\theta - \frac{K(R+r)^2}{2} \theta^2 \quad \text{c) } \omega = \dot{\theta}$$

derivando membro-a-membro:

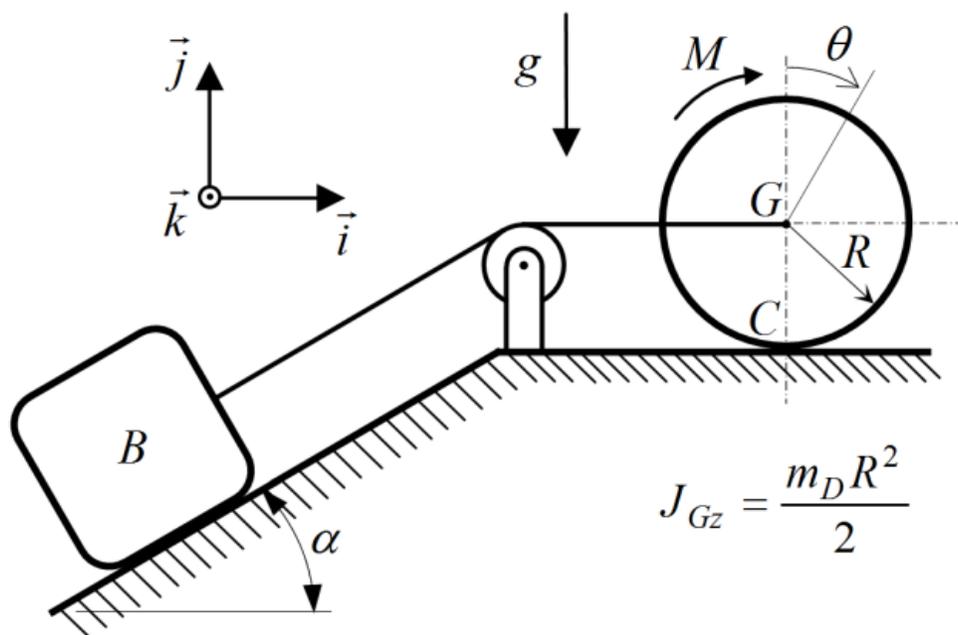
$$(J_G + m r^2) \omega \dot{\omega} = M\dot{\omega} - K(R+r)^2 \theta \cdot \dot{\omega}$$

$$\dot{\omega} = \frac{M - K(R+r)^2 \theta}{J_G + m r^2}$$
 (1/2)

(d)  $v_G = r \omega \Rightarrow a_G = r \dot{\omega}$   
(1/2 ponto)

$$a_G = \frac{r [M - K(R+r)^2 \theta]}{J_G + m r^2}$$
 (1/2)

## Exercício 10 (P3-Q3-2014)



**Questão 3 (3,5 pontos):** O disco de raio  $R$  e massa  $m_D$ , rola sem escorregar num plano horizontal, partindo do repouso em  $\theta = 0^\circ$ , quando um binário de momento  $M$  é aplicado. Um cabo ideal une o centro do disco  $G$  ao bloco  $B$ , por meio de uma polia de inércia desprezível. O bloco  $B$  de massa  $m_B$  escorrega sobre o plano com inclinação  $\alpha$  e coeficiente de atrito  $\mu$ .

- Determine o momento de inércia do disco  $J_{Cz}$  em relação ao eixo perpendicular ao plano da figura (direção  $\vec{k}$ ) que passa pelo ponto  $C$  de contato com o solo.
- Usando  $J_{Cz}$ , determine a energia cinética do sistema em função da velocidade angular  $\omega$  do disco.
- Determine o vetor de rotação  $\vec{\omega}$  do disco em função de  $\theta$ .

## Exercício 10 (P3-Q3-2014)

Solução

a) **0,5** Teorema dos eixos paralelos:

$$J_{Cz} = J_{Cz} + m_D R^2 = \frac{m_D R^2}{2} + m_D R^2 = \frac{3m_D R^2}{2}$$

b) **1,0** O sistema parte do repouso  $\Rightarrow E_0 = 0$ ,  $C$  é o CIR do disco, e observa-se que a velocidade do bloco é igual, em módulo, à velocidade do centro de massa do disco:

$$E = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} m_B v_G^2 + \frac{1}{2} \frac{3m_D R^2}{2} \omega^2$$

Aplicando a expressão do campo de velocidades:  $\vec{v}_G = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (G - C) \Rightarrow v_G = \omega R$

$$\text{Então: } E = \frac{1}{2} m_B (\omega R)^2 + \frac{3m_D R^2}{4} \omega^2 \Rightarrow \boxed{E(\omega) = \frac{1}{4} (2m_B + 3m_D) R^2 \omega^2}$$

c) **2,0** O trabalho das forças externas: a força de atrito  $F_{at}$ , a força peso do bloco e o binário de momento  $M$  realizam trabalho:

$$W^{ext} = M\theta - m_B g \theta R \operatorname{sen} \alpha - F_{at} \theta R$$

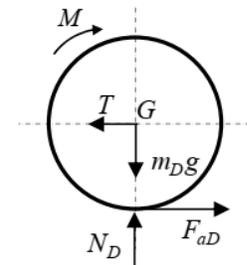
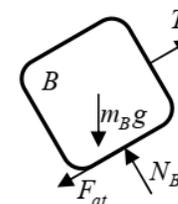
Como há escorregamento:  $F_{at} = \mu N = \mu m_B g \cos \alpha$

$$W^{ext} = M\theta - m_B g (\operatorname{sen} \alpha + \mu \cos \alpha) \theta R$$

Portanto, aplicando o TEC:

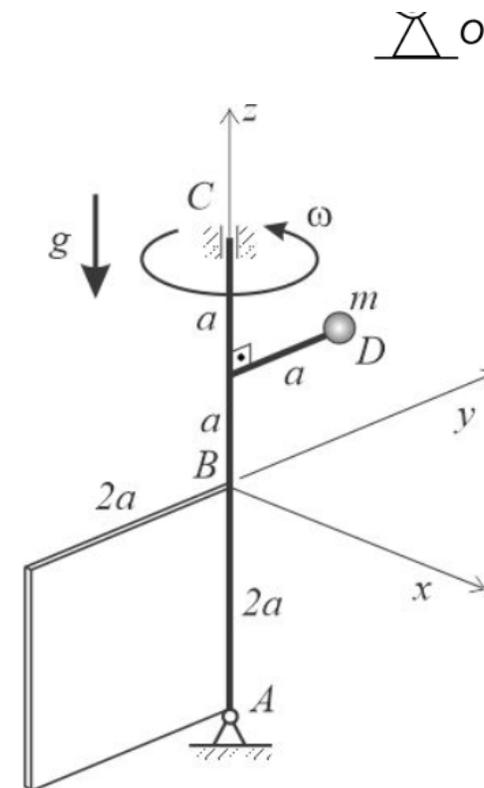
$$\frac{1}{4} (2m_B + 3m_D) R^2 \omega^2 = M\theta - m_B g (\operatorname{sen} \alpha + \mu \cos \alpha) \theta R \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\omega} = - \sqrt{\frac{4[M - m_B g (\operatorname{sen} \alpha + \mu \cos \alpha) R] \theta}{(2m_B + 3m_D) R^2}} \vec{k}}$$



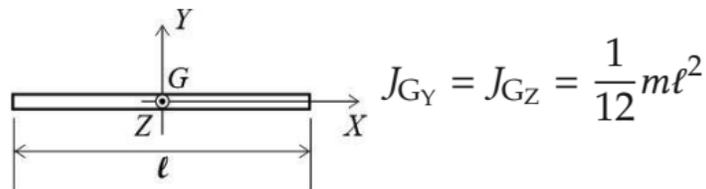
## Exercício (PSUB-Q3-2023)

- Questão 3 (3,5 pontos).** Na figura, no eixo vertical ABC há uma articulação em A e um anel em C. Soldadas nesse eixo, há uma placa homogênea, de massa  $m$  e lado  $2a$ , e uma barra, de comprimento  $a$  com uma massa  $m$  fixa em D, conforme mostrado na figura. O conjunto eixo, placa e barra está no plano  $Byz$  e o sistema de coordenadas  $(B, x, y, z)$  gira solidariamente ao conjunto com rotação  $\omega$  constante dada. O eixo e a barra têm massas desprezíveis. Pede-se:
- faça o diagrama de corpo livre (DCL) do conjunto;
  - obtenha a expressão da quantidade de movimento angular do conjunto, em relação ao polo B, em função da sua rotação  $\omega$ ;
  - obtenha os momentos e produtos de inércia do conjunto, envolvidos na expressão do item (b);
  - obtenha as reações em A e C, em função de  $\omega$ .

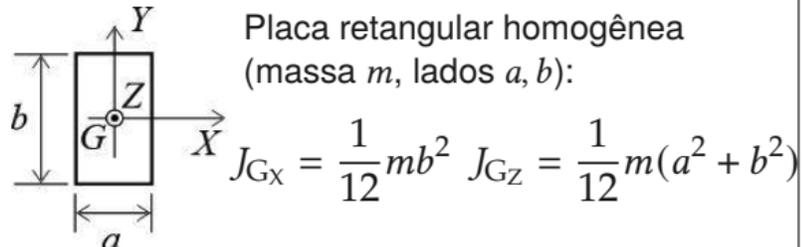


**Formulário da prova:** momentos de inércia de sólidos homogêneos

Barra homogênea (massa  $m$ , comprimento  $\ell$ ):



Placa retangular homogênea (massa  $m$ , lados  $a, b$ ):





## Exercício (PSUB-Q3-2023)

Resolução:

(a) DCL ao lado (0,5):

(b) Quantidade de movimento angular em relação ao polo B, com coordenadas (B, x, y, z) (1,0):

$$\vec{H}_B = m(\vec{G} - \vec{B}) \wedge \vec{v}_B + (J_{Bx}\omega_x - J_{By}\omega_y - J_{Bxz}\omega_z)\vec{i} + (-J_{Byx}\omega_x + J_{By}\omega_y - J_{Byz}\omega_z)\vec{j} + (-J_{Bzx}\omega_x - J_{Bzy}\omega_y + J_{Bz}\omega_z)\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{H}_B = -J_{Byz}\omega\vec{j} + J_{Bz}\omega\vec{k}}$$

(c) Polo B (0,5):

$$\boxed{J_{Byz} = [0 + m(a)(a)] + [0 + m(a)(a)] = 2ma^2} \quad \boxed{J_{Bz} = \left[\frac{m(2a)^2}{12} + ma^2\right] + ma^2 = \frac{7ma^2}{3}}$$

(d) Centro de massa CM do conjunto:

$$(\text{CM} - \text{B}) = \frac{m(x_G + x_D)\vec{i} + m(y_G + y_D)\vec{j} + m(z_G + z_D)\vec{k}}{2m} = \vec{0} \Rightarrow \text{CM} \equiv \text{B}$$

Pelo Teorema da Resultante (TR), obtemos (0,5):

$$m\vec{a}_B = \vec{0} = (X_A + X_C)\vec{i} + (Y_A + Y_C)\vec{j} + (Z_A - 2mg)\vec{k}$$

$$X_A + X_C = 0 \quad (1)$$

$$Y_A + Y_C = 0 \quad (2)$$

$$Z_A = 2mg \quad (3)$$

Pelo Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA), obtemos (0,5):

$$\vec{H}_B = \omega(-J_{Byz}\vec{j} + J_{Bz}\vec{k}) \Rightarrow \dot{\vec{H}}_B = \dot{\omega}(-J_{Byz}\vec{j} + J_{Bz}\vec{k}) + \omega(-\dot{J}_{Byz}\vec{j} + \dot{J}_{Bz}\vec{k}) = \omega^2 J_{Byz}\vec{i}$$

$$\dot{\vec{H}}_B = m\vec{v}_B \wedge \vec{v}_B + \vec{M}_B^{\text{ext}} \Rightarrow \omega^2 J_{Byz}\vec{i} = a(2Y_A - mg + mg - 2Y_C)\vec{i} + a(-2X_A + 2X_C)\vec{j}$$

$$\omega^2 J_{Byz} = 2a(Y_A - Y_C) \quad (4)$$

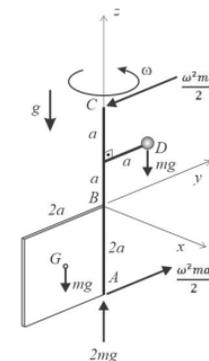
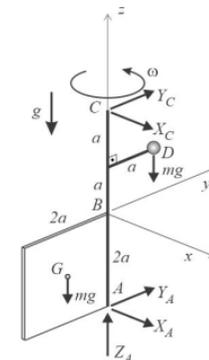
$$0 = 2a(-X_A + X_C) \quad (5)$$

Destas equações obtemos (0,5):

De (1) e (5):  $\boxed{X_A = 0}$  e  $\boxed{X_C = 0}$

De (2) e (4):  $\boxed{Y_A = \frac{\omega^2 J_{Byz}}{4a} = \frac{\omega^2 ma}{2}}$  e  $\boxed{Y_C = -\frac{\omega^2 J_{Byz}}{4a} = -\frac{\omega^2 ma}{2}}$

De (3):  $\boxed{Z_A = 2mg}$





## □ Referências

- [1] Merian J.L., Kraige L.G., Bolton, J.N. **Engineering Mechanics – Vol. 1 Dynamics**, 9<sup>th</sup> edition, John Wiley & Sons, Inc. 2018.
- [2] Hibbeler R.C. **Engineering Mechanics – Vol. 2 Dynamics**, 14<sup>th</sup> edition in SI units, Pearson Education, Inc. 2016.
- [3] Material complementar de Tenenbaum, R. A. **Fundamentals of Applied Dynamics**, Springer-Verlag New York, Inc. 2004.