# Controle e Aplicações • Aula 2.5

## Síntese de reguladores lineares quadráticos (LQR)

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

1 Estabilidade segundo Lyapunov
2 Regulador linear quadrático (LQR)

# Estabilidade segundo Lyapunov

Seja um *modelo autônomo, linear ou não-linear*, expresso pela EDO:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Admitindo que $\bar{\mathbf{x}}$ seja um ponto de equilíbrio do sistema, ou seja, $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ então:

- $\bar{\mathbf{x}}$ é um *ponto de equilíbrio estável* segundo Lyapunov se, para todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que, se $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$, então, para todo $t > t_0$, $\|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$.
- $\bar{\mathbf{x}}$ é um *ponto de equilíbrio assintoticamente estável* se for estável segundo Lyapunov e existir um $\delta > 0$ tal que, se $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$, então $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0$.
- $\bar{\mathbf{x}}$ é um *ponto de equilíbrio exponencialmente estável* se for assintoticamente estável e existirem constantes positivas $\alpha$, $\beta$ e $\delta$ tais que, se $\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$, para todo $t > t_0$, $\|\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}\| < \alpha \|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}\| \mathrm{e}^{-\beta t}$.

# Método direto de Lyapunov

Para um sistema dinâmico autônomo:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

que tenha um *ponto de equilíbrio em* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, admita que existe uma função $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (ou seja, a valores reais) tal que:

- $V(\mathbf{0}) = 0$;
- $V(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;
- $\dfrac{\mathrm{d}V(\mathbf{x}(t))}{\mathrm{d}t} = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$;

então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um *ponto de equilíbrio estável segundo Lyapunov*.

Ainda, se for possível garantir que $\nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, então $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é um *ponto de equilíbrio assintoticamente estável*.

# Estabilidade de um SLIT

Considere um *sistema linear invariante no tempo* (SLIT) da forma:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{x}$$

Para provar que a origem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é *um ponto de equilíbrio assintoticamente estável*, basta encontrar um par de matrizes $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$ *definidas positivas* (ou seja, $\mathbf{x}^\top \boldsymbol{P}\mathbf{x} > 0$ e $\mathbf{x}^\top \boldsymbol{Q}\mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) que satisfaçam à *equação de Lyapunov*:

$$\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}$$

Neste caso, basta adotar:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{P}\mathbf{x}$$

Por definição, $V(\mathbf{0}) = 0$ e $V(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Ainda:

$$\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{x}^\top \boldsymbol{P}\mathbf{x}\right] = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\mathbf{x} = -\mathbf{x}^\top \boldsymbol{Q}\mathbf{x} < 0$$

# Por que usar técnicas de otimização na síntese de um controlador?

Considere *sistema linear* munido de uma *lei de controle por realimentação de estados* da forma:

$$\mathbf{u} = -\boldsymbol{K}\mathbf{x}$$

Se o sistema for *controlável*, é possível escolher uma matrix $\boldsymbol{K}$ que seja capaz de *alocar os polos em malha fechada* em qualquer posição definida pelo projetista.

*Via de regra*, quanto *mais distantes os polos em malha fechada estiverem dos polos em malha aberta*, maiores serão os módulos dos elementos da matriz de ganhos $\boldsymbol{K}$ e, consequentemente, *maiores serão os módulos dos esforços de controle*. Uma má alocação dos polos em MF pode levar a:

- um *consumo excessivo* de energia;
- um *superdimensionamento* dos atuadores necessários para controlar o sistema;
- ocorrência frequente de *saturação* dos atuadores durante a operação regular do sistema.

# Por que usar técnicas de otimização na síntese de um controlador?

Ainda, na presença de *mais de uma entrada de controle*, há *múltiplas soluções* para os elementos de $\boldsymbol{K}$ que levam a uma *mesma alocação de polos*. Qual das soluções escolher visando evitar os problemas citados?

E se, em vez de obter $\boldsymbol{K}$ por meio da alocação dos polos para o sistema em malha fechada, *o regulador linear por realimentação de estados* $\mathbf{u} = -\boldsymbol{K}\mathbf{x}$ pudesse ser obtido por meio da solução de um problema de otimização que garantisse:

- que a origem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ seja um *ponto de equilíbrio assintoticamente estável* para o sistema em *malha fechada*;
- que *esforços elevados de controle* sejam *penalizados*;
- que um *desempenho ruim* (i.e., distância média para a origem elevada e/ou tempo elevado para que o estado do sistema em malha fechada convirja para a origem) seja *penalizado*.

# Índice de desempenho quadrático

O *regulador linear quadrático* (LQR) é um *o regulador linear por realimentação de estados* $\mathbf{u} = -\boldsymbol{K}\mathbf{x}$ obtido por meio do problema de *minimização do índice de desempenho quadrático* $J$:

$$J = \int_0^\infty \left[\mathbf{x}^\top \boldsymbol{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \boldsymbol{R}\mathbf{u}\right] \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathbf{x}^\top \left(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\right) \mathbf{x} \, \mathrm{d}t$$

com $\boldsymbol{Q}$ sendo uma *matriz simétrica e semi-definida positiva* e $\boldsymbol{R}$ sendo uma *matriz simétrica e definida positiva*, ou seja:

$$\mathbf{x}^\top \boldsymbol{Q}\mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{u}^\top \boldsymbol{R}\mathbf{u} > 0, \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$$

Se a ocorrência simultânea de $\boldsymbol{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{Q}\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$, a matriz $\left(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\right)$ será *simétrica e definida positiva*, uma vez que:

$$\mathbf{x}^\top \left(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\right) \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{Q}\mathbf{x} + (-\boldsymbol{K}\mathbf{x})^\top \boldsymbol{R}(-\boldsymbol{K}\mathbf{x}) > 0$$

Note que:

- $\|\boldsymbol{Q}\| \gg \|\boldsymbol{R}\|$ prioriza *penalizar um desempenho ruim* do controlador;
- $\|\boldsymbol{R}\| \gg \|\boldsymbol{Q}\|$ prioriza *penalizar esforços elevados* de controle.

# Síntese de um regulador linear quadrático (LQR)

Sendo a matriz $(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{R}\boldsymbol{K})$ *simétrica e definida positiva*, para garantir que, *em malha fechada a origem* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável*, basta encontrar uma matriz $\boldsymbol{P}$ definida positiva que satisfaça à *equação de Lyapunov*:

$$\overline{\boldsymbol{A}}^\top \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{A}} = -\left(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\right) \quad \text{com} \quad \overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$$

Neste caso, para provar a *estabilidade assintótica, em malha fechada, da origem* pelo *método direto de Lyapunov*, basta tomar:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{P}\mathbf{x}$$

Por definição, $V(\mathbf{0}) = 0$ e $V(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Ainda:

$$\frac{\mathrm{d}V(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathbf{x}^\top \boldsymbol{P}\mathbf{x}\right] = \mathbf{x}^\top \overline{\boldsymbol{A}}^\top \boldsymbol{P}\mathbf{x} + \mathbf{x}^\top \boldsymbol{P}\overline{\boldsymbol{A}}\mathbf{x} = -\mathbf{x}^\top \left(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\right)\mathbf{x} < 0$$

o que conclui a verificação do conjunto de condições necessárias para a estabilidade assintótica desejada.

# Síntese de um regulador linear quadrático (LQR)

Nestas condições, o *índice de desempenho quadrático* se torna:

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^\top \left(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\right) \mathbf{x}\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}V(\mathbf{x})}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = V(\mathbf{x}(0)) - \lim_{t\to\infty} V(\mathbf{x}(t))$$

O objetivo do regulador é que $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ conforme $t \to \infty$. Assim, $\lim_{t\to\infty} V(\mathbf{x}(t)) = 0$ e:

$$J = V(\mathbf{x}(0)) = \mathbf{x}_0^\top \boldsymbol{P}\mathbf{x}_0$$

Seja $\boldsymbol{P}$ a matriz *simétrica e definida positiva* que *minimiza* $J$.

Para que o valor de $J$ seja estacionário, ou seja, $\delta J = 0$, o que é condição necessária neste ponto de mínimo:

$$\delta J = \mathbf{x}_0^\top(\boldsymbol{P} + \delta\boldsymbol{P})\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0^\top \boldsymbol{P}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^\top \delta\boldsymbol{P}\mathbf{x}_0 = 0, \forall \mathbf{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta\boldsymbol{P} = \mathbf{0}$$

Em outras palavras, a matriz $\boldsymbol{P}$ que *minimiza o índice de desempenho quadrático* $J$ também deve ter seu valor estacionário.

## Síntese de um regulador linear quadrático (LQR)

O *valor estacionário da matriz* $\boldsymbol{P}$ estará garantida se a *equação de Lyapunov* permanecer verdadeira mantido o valor de $\boldsymbol{P}$ e tomando uma variação infinitesimal $\delta\boldsymbol{K}$ para a matriz de ganho:

$$[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K} + \delta\boldsymbol{K})]^\top \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\,[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K} + \delta\boldsymbol{K})] = -\boldsymbol{Q} - (\boldsymbol{K} + \delta\boldsymbol{K})^\top \boldsymbol{R}(\boldsymbol{K} + \delta\boldsymbol{K})$$
$$\Rightarrow \quad -\delta\boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\,\delta\boldsymbol{K} = -\delta\boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{R}\boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}^\top \boldsymbol{R}\,\delta\boldsymbol{K}$$

Esta última equação será verdadeira se for válida a identidade:

$$\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{K} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}$$

Substituindo esta última identidade na *equação de Lyapunov*, e considerando a simetria das matrizes $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{R}$, obtém-se:

$$\left[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}\right]^\top \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\left[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}\right] = -\boldsymbol{Q} - (\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P})^\top \boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = 0$$

que é a *equação algébrica de Riccati* (ARE) para a determinação de $\boldsymbol{P}$.

# LQR para horizonte de tempo finito

Alternativamente, o *regulador linear quadrático* (LQR) pode ser obtido por meio do problema de *minimização de um índice de desempenho quadrático J para um horizonte de tempo finito*:

$$J = \int_0^{t_1} \left[\mathbf{x}(t)^\top \boldsymbol{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^\top \boldsymbol{R}\mathbf{u}(t)\right] \mathrm{d}t + \mathbf{x}(t_1)^\top \boldsymbol{Q}_1 \mathbf{x}(t_1)$$

com $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{Q}_1$ sendo *matrizes simétricas e semi-definidas positivas* e $\boldsymbol{R}$ sendo uma *matriz simétrica e definida positiva*.

Neste caso, o ganho $\boldsymbol{K}$ da *lei de controle linear por realimentação de estados* $\mathbf{u} = -\boldsymbol{K}\mathbf{x}$ é dado pela expressão:

$$\boldsymbol{K}(t) = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}(t)$$

com $\boldsymbol{P}(t)$ correspondendo à solução da *equação diferencial de Riccati*:

$$\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} \quad \text{com} \quad \boldsymbol{P}(t_1) = \boldsymbol{Q}_1$$

Perguntas?

reorsino@usp.br