Controle e Aplicações • Aula 2.3

Síntese de reguladores por alocação de polos

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Modelo linear

Seja um *modelo linear* expresso na *forma de espaço de estados*:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Por ora, será desprezado o efeito de perturbações e ruído de medição e não haverá um canal direto da entrada $\mathbf{u}(t)$ para as medidas $\mathbf{y}(t)$.

Existe uma *matriz de transição de estados $\boldsymbol{\Phi}(t, \tau)$* tal que:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t, \tau)\boldsymbol{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Em particular, *se $\boldsymbol{A}$ for invariante no tempo*, então:

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \tau) = \boldsymbol{\Phi}(t - \tau) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2 t^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^k t^k + \ldots$$

Controlabilidade

Um sistema dinâmico é **controlável** se, e somente se, partindo de *qualquer condição inicial* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ for possível *atingir qualquer outro estado* $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ em um *intervalo de tempo finito* $[t_0, t_1]$, por meio da especificação, neste intervalo, do *vetor de entradas de controle* $\mathbf{u}(t)$.

Provou-se que existe uma solução $\mathbf{u}(t)$ da forma:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{B}^\top(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t)\boldsymbol{P}^{-1}(t_1, t_0)\left[\mathbf{x}(t_1) - \boldsymbol{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0)\right], \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

se, e somente se, o *gramiano de controlabilidade*:

$$\boldsymbol{P}(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}(t_1, t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{B}^\top(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t)\,\mathrm{d}t$$

for uma *matriz invertível* (não-singular).

Teste algébrico de controlabilidade para um SLIT

Um *sistema linear invariante no tempo* com $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ é *controlável* se, e somente se, a *matriz de controlabilidade* $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times nr}$:

$$\boldsymbol{Q} = \left[\ \boldsymbol{B} \ \middle|\ \boldsymbol{AB} \ \middle|\ \ldots \ \middle|\ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\ \right]$$

tiver *posto n (completo)*. Em outras palavras, as colunas de $\boldsymbol{Q}$ devem ser um conjunto gerador do $\mathbb{R}^n$ e, portanto, $\xi^\top \boldsymbol{Q} = \mathbf{0} \iff \xi = \mathbf{0}$.

O *posto* de uma matriz é a *dimensão do espaço vetorial gerado* por suas *colunas*. O posto de uma matriz é o mesmo posto de sua transposta.

Em particular para um sistema SISO/SIMO, a entrada u é um escalar e, portanto, $\boldsymbol{B} = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1} = \mathbb{R}^n$ e $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\boldsymbol{Q} = \left[\ \mathbf{b} \ \middle|\ \boldsymbol{A}\mathbf{b} \ \middle|\ \ldots \ \middle|\ \boldsymbol{A}^{n-1}\mathbf{b}\ \right]$$

Assim, um *sistema SISO/SIMO será controlável* se, e somente se, $\boldsymbol{Q}$ for uma *matriz invertível* (não-singular).

Alocação de polos por realimentação de estados

Para um *sistema linear controlável* existirá uma matriz $\boldsymbol{K} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ tal que, adotando uma lei de controle baseada em *realimentação de estados* da forma:

$$\mathbf{u} = -\boldsymbol{K}\mathbf{x}$$

é possível escolher a *localização de todos os n polos* do sistema em malha fechada, que será regido pela equação:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u} = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\right)\mathbf{x} = \overline{\boldsymbol{A}}\mathbf{x}$$

Dados os *n autovalores* desejados para a *matriz de estados* $\overline{\boldsymbol{A}}$ do *sistema em malha fechada*, haverá $r \times n$ elementos da matriz $\boldsymbol{K}$ a determinar.

Em outras palavras, há uma *solução única para o caso SISO/SIMO* ($r = 1$) e *múltiplas soluções possíveis para os casos MISO/MIMO* ($r > 1$).

Alocação de polos por realimentação de estados

Os polinômios característicos das matrizes de estado em malha aberta $\boldsymbol{A}$ e em malha fechada $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$ são, respectivamente:

$$p(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \prod_{j=1}^{n}(s - p_j) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n s^0 = 0$$

$$\bar{p}(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}}) = \prod_{j=1}^{n}(s - \bar{p}_j) = s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n s^0 = 0$$

onde p_j, $j = 1, \ldots, n$, são os polos em malha aberta e $\bar{p}_j$, $j = 1, \ldots, n$, são os polos que o projetista escolheu para o sistema em malha fechada. Para a estabilidade do sistema em malha fechada é necessário que:

$$\mathrm{Re}(\bar{p}_i) < 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Via de regra, no entanto, quanto *mais distantes os polos em malha fechada estiverem dos polos em malha aberta*, maiores serão os módulos dos elementos da matriz de ganhos $\boldsymbol{K}$ e, consequentemente, *maiores serão os módulos dos esforços de controle* $\mathbf{u} = -\boldsymbol{K}\mathbf{x}$.

Caso SISO/SIMO: solução de Bass-Gura

Para um sistema SISO/SIMO, $\boldsymbol{B} = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $\boldsymbol{K} = \mathbf{k}^\top \in \mathbb{R}^{1\times n}$ e:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \mathbf{b}\mathbf{k}^\top$$

Definindo os vetores $\mathbf{a}$ e $\bar{\mathbf{a}}$, formados pelos coeficientes dos polinômios caracterísiticos $p(s)$ (MA) e $\bar{p}(s)$ (MF), respectivamente, e a matrix Toeplitz triangular $\boldsymbol{W}$, baseada nos coeficientes de $p(s)$:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \qquad \bar{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{a}_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a matriz $\mathbf{k}$ que resolve o problema de *alocação de polos* é dada por:

$$\mathbf{k} = \left[(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W})^{-1}\right]^\top (\bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a})$$

onde $\boldsymbol{Q} = \left[\, \mathbf{b} \;\middle|\; \boldsymbol{A}\mathbf{b} \;\middle|\; \dots \;\middle|\; \boldsymbol{A}^{n-1}\mathbf{b} \,\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é a *matriz de controlabilidade*.

Matrizes companheiras de um polinômio característico

Dado o polinômio característico $p(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n s^0 = 0$, definem-se as matrizes companheiras $\boldsymbol{A}_{①}$ e $\boldsymbol{A}_{②}$:

$$\boldsymbol{A}_{①} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{②} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

Identidades satisfeitas pelas matrizes companheiras de um polinômio

As matrizes companheiras do polinômio característico $p(s)$ satisfazem às identidades envolvendo as matrizes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{W}$:

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}_{①} = \boldsymbol{A}_{②}\boldsymbol{W} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_{②} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$$

A segunda identidade decorre do *teorema de Cayley-Hamilton* $p(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}_{②} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \boldsymbol{A}\mathbf{b} & \dots & \boldsymbol{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\mathbf{b} & \boldsymbol{A}^2\mathbf{b} & \dots & (-a_n\boldsymbol{I} - a_{n-1}\boldsymbol{A} - \dots - a_1\boldsymbol{A}^{n-1})\mathbf{b} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\mathbf{b} & \boldsymbol{A}^2\mathbf{b} & \dots & \boldsymbol{A}^{n}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}
\end{aligned}$$

Assim, $\boldsymbol{A}_{①} = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}_{②}\boldsymbol{W}$ e $\boldsymbol{A}_{②} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$, de onde se identifica a matriz de transformação $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W})^{-1}$ tal que:

$$\boldsymbol{A}_{①} = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{A}_{②}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}$$

Forma canônica controlável de sistemas SISO/SIMO

Definindo $\mathbf{b}_{①} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^\top$ e notando que $\mathbf{b}_{①} = \boldsymbol{T}\mathbf{b} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W})^{-1}\mathbf{b}$:

$$\boldsymbol{T}^{-1}\mathbf{b}_{①} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \boldsymbol{A}\mathbf{b} & \dots & \boldsymbol{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 1 & a_1 & \dots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

pode-se adotar a mudança de variáveis $\mathbf{z} = \boldsymbol{T}\mathbf{x} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W})^{-1}\mathbf{x}$ tal que:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}_{①}\mathbf{z} + \mathbf{b}_{①}u$$

A expressão das equações dinâmicas de um sistema linear SISO/SIMO em termos das variáveis de estado $\mathbf{z}$ que transforma a matriz de estados na primeira forma companheira do polinômio característico de malha aberta $p(s)$ é denominada *forma canônica controlável*.

Demonstração da solução de Bass-Gura para sistemas SISO/SIMO

Adote-se a lei de controle $u = -\boldsymbol{\delta}^\top \mathbf{z}$ com $\boldsymbol{\delta}^\top = \begin{bmatrix}\delta_1 & \delta_2 & \dots & \delta_n\end{bmatrix}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}_{①}\mathbf{z} + \mathbf{b}_{①}u = \left(\boldsymbol{A}_{①} - \mathbf{b}_{①}\boldsymbol{\delta}^\top\right)\mathbf{z} = \overline{\boldsymbol{A}}_{①}\mathbf{z} \quad \text{com} \quad \overline{\boldsymbol{A}}_{①} = \boldsymbol{A}_{①} - \mathbf{b}_{①}\boldsymbol{\delta}^\top$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{①} = \begin{bmatrix} -(a_1+\delta_1) & -(a_2+\delta_2) & \dots & -(a_{n-1}+\delta_{n-1}) & -(a_n+\delta_n) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Notando que a matriz $\overline{\boldsymbol{A}}_{①}$ é companheira do *polinômio característico de malha fechada* $\bar{p}(s)$ de tal forma que $a_i + \delta_i = \bar{a}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, então:

$$u = -\boldsymbol{\delta}^\top\mathbf{z} = -\boldsymbol{\delta}^\top\boldsymbol{T}\mathbf{x} = -\left(\boldsymbol{T}^\top\boldsymbol{\delta}\right)^\top\mathbf{x} = -\mathbf{k}^\top\mathbf{x}$$

com $\mathbf{k} = \boldsymbol{T}^\top\boldsymbol{\delta}$, $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W})^{-1}$ e $\boldsymbol{\delta} = \bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$, o que demonstra a solução:

$$\mathbf{k} = \left[(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W})^{-1}\right]^\top(\bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a})$$

Perguntas?

reorsino@usp.br