Controle e Aplicações • Aula 2.1

Controlabilidade e Observabilidade

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Modelo linear

Seja um *modelo linear* expresso na *forma de espaço de estados*:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\mathbf{x}(t) \end{cases}$$

Por ora, será desprezado o efeito de perturbações e ruído de medição e não haverá um canal direto da entrada $\mathbf{u}(t)$ para as medidas $\mathbf{y}(t)$.

Existe uma *matriz de transição de estados $\boldsymbol{\Phi}(t,\tau)$* tal que:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t,t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t,\tau)\boldsymbol{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Em particular, *se $\boldsymbol{A}$ for invariante no tempo*, então:

$$\boldsymbol{\Phi}(t,\tau) = \boldsymbol{\Phi}(t-\tau) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}t + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2t^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\boldsymbol{A}^kt^k + \ldots$$

Controlabilidade

Um sistema dinâmico é **controlável** se, e somente se, partindo de *qualquer condição inicial* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ for possível *atingir qualquer outro estado* $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ em um *intervalo de tempo finito* $[t_0, t_1]$, por meio da especificação, neste intervalo, do *vetor de entradas de controle* $\mathbf{u}(t)$.

Sabendo que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}(t_1, t)\boldsymbol{B}(t)\mathbf{u}(t)\,\mathrm{d}t = \mathbf{x}(t_1) - \boldsymbol{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

pode-se buscar para $\mathbf{u}(t)$ uma solução da forma:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{B}^\top(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t)\boldsymbol{P}^{-1}(t_1, t_0)\left[\mathbf{x}(t_1) - \boldsymbol{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0)\right], \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

Substituindo na equação anterior:

$$\left\{\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}(t_1, t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{B}^\top(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t)\,\mathrm{d}t\right\}\boldsymbol{P}^{-1}(t_1, t_0)\left[\mathbf{x}(t_1) - \boldsymbol{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0)\right]$$

$$= \mathbf{x}(t_1) - \boldsymbol{\Phi}(t_1, t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

Controlabilidade

Teorema: um sistema linear será *controlável* se, e somente se, para algum instante de tempo $t_1 > t_0$ o *gramiano de controlabilidade*:

$$\boldsymbol{P}(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}(t_1, t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{B}^\top(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t)\, \mathrm{d}t$$

for uma *matriz invertível* (não-singular).

Supondo que $\boldsymbol{P}(t_1, t_0)$ seja singular, existe um vetor $\xi \neq 0$ tal que:

$$\begin{aligned}
\xi^\top \boldsymbol{P}(t_1, t_0)\xi = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \int_{t_0}^{t_1} \xi^\top \boldsymbol{\Phi}(t_1, t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{B}^\top(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t)\xi\, \mathrm{d}t = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int_{t_0}^{t_1} \left[\boldsymbol{B}^\top(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t)\xi\right]^\top \left[\boldsymbol{B}^\top(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t)\xi\right] \mathrm{d}t = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbf{z}(t) = \boldsymbol{B}^\top(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t_1, t)\xi \equiv 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]
\end{aligned}$$

uma vez que $\mathbf{z}^\top\mathbf{z} = \|\mathbf{z}\|^2$ e $\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{z}\|^2\, \mathrm{d}t = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{z}(t) \equiv 0,\ \forall t \in [t_0, t_1]$.

Controlabilidade

Assim, supondo que se deseje sair de $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$ e chegar a um estado $\mathbf{x}(t_1) = c\boldsymbol{\xi}$ para algum $c \neq 0$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}(t_1, t)\boldsymbol{B}(t)\mathbf{u}(t)\,\mathrm{d}t = c\boldsymbol{\xi}$$

Pré-multiplicando a equação por $\boldsymbol{\xi}^\top$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\xi}^\top\boldsymbol{\Phi}(t_1, t)\boldsymbol{B}(t)\mathbf{u}(t)\,\mathrm{d}t = c\boldsymbol{\xi}^\top\boldsymbol{\xi}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{z}^\top(t)\mathbf{u}(t)\,\mathrm{d}t = c\|\boldsymbol{\xi}\|^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = c\|\boldsymbol{\xi}\|^2 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

Neste caso (se $\boldsymbol{P}(t_1, t_0)$ for singular), partindo da origem é *impossível atingir*, em um intervalo de tempo finito, usando as entradas de controle disponíveis, *qualquer* estado da forma $c\boldsymbol{\xi}$, $c \neq 0$; ou seja, o sistema é *não-controlável*.

Teste algébrico de controlabilidade para um SLIT

Um *sistema linear invariante no tempo* com $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ é *controlável* se, e somente se, a *matriz de controlabilidade* $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times nr}$:

$$\boldsymbol{Q} = \left[\ \boldsymbol{B} \ \middle|\ \boldsymbol{AB} \ \middle|\ \ldots \ \middle|\ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\ \right]$$

tiver *posto n (completo)*. Em outras palavras, as colunas de $\boldsymbol{Q}$ devem ser um conjunto gerador do $\mathbb{R}^n$ e, portanto, $\xi^\top \boldsymbol{Q} = \mathbf{0} \iff \xi = \mathbf{0}$.

O *posto* de uma matriz é a *dimensão do espaço vetorial gerado* por suas *colunas*. O posto de uma matriz é o mesmo posto de sua transposta.

Voltando ao *teorema da controlabilidade*, se $\boldsymbol{P}(t_1, t_0)$ é não-singular, então $\xi^\top \boldsymbol{P}(t_1, t_0)\xi = 0 \iff \xi = \mathbf{0}$. Vimos que:

$$\xi^\top \boldsymbol{P}(t_1, t_0)\xi = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{z}^\top(t)\mathbf{z}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{com} \quad \mathbf{z}^\top(t) = \xi^\top \boldsymbol{\Phi}(t_1, t)\boldsymbol{B}$$

Em outras palavras, para que o sistema seja controlável basta provar que $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0} \iff \xi = \mathbf{0}$.

Teste algébrico de controlabilidade para um SLIT

Notando que, para um SLIT, $\boldsymbol{\Phi}(t_1, t) = \boldsymbol{\Phi}(t_1 - t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_1 - t)}$:

$$\mathbf{z}^\top(t) = \xi^\top \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_1 - t)} \boldsymbol{B}$$

$$= \xi^\top \boldsymbol{B} + \xi^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}(t_1 - t) + \ldots + \frac{1}{k!} \xi^\top \boldsymbol{A}^{k-1} \boldsymbol{B}(t_1 - t)^{k-1} + \ldots$$

Toda matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ satisfaz ao próprio polinômio característico (*teorema de Cayley-Hamilton*):

$$p(s) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n s^0 = 0$$

$$p(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^n + a_1 \boldsymbol{A}^{n-1} + \ldots + a_n \boldsymbol{I} = \mathbf{0}$$

Decorre assim que $\boldsymbol{A}^k$, $k \geq n$, é gerada por $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \ldots, \boldsymbol{A}^{n-1}\}$.

Assim, cada uma das colunas de uma matriz da forma $\boldsymbol{A}^k \boldsymbol{B}$, $k \geq 0$, pode ser construída como combinação linear das colunas de $\boldsymbol{Q}$.

Portanto, se $\boldsymbol{Q}$ tem *posto completo*, o sistema é *controlável*, uma vez que:

$$\mathbf{z}(t) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi^\top \boldsymbol{Q} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \mathbf{0}$$

Observabilidade

Um sistema dinâmico *não-forçado* é **observável** se, e somente se, for possível determinar *qualquer condição inicial* $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ a partir do registro em um *intervalo de tempo finito* $[t_0, t_1]$ do *vetor de saídas* $\mathbf{y}(t)$.

Notando que:

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

propõe-se o cálculo da integral:

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}^\top(t, t_0)\boldsymbol{C}^\top(t)\mathbf{y}(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left\{\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}^\top(t, t_0)\boldsymbol{C}^\top(t)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\,\mathrm{d}t\right\}}_{\boldsymbol{M}(t_1, t_0)}\mathbf{x}(t_0)$$

e, caso exista $t_1 > t_0$ tal que $\boldsymbol{M}(t_1, t_0)$ seja invertível:

$$\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{M}^{-1}(t_1, t_0)\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}^\top(t, t_0)\boldsymbol{C}^\top(t)\mathbf{y}(t)\,\mathrm{d}t$$

Observabilidade

Teorema: um sistema linear será *observável* se, e somente se, para algum instante de tempo $t_1 > t_0$ o *gramiano de observabilidade*:

$$\boldsymbol{M}(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\Phi}^\top(t, t_0)\boldsymbol{C}^\top(t)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\,\mathrm{d}t$$

for uma *matriz invertível* (não-singular).

Se $\boldsymbol{M}(t_1, t_0)$ é singular, então $\boldsymbol{\eta}^\top\boldsymbol{M}(t_1, t_0)\boldsymbol{\eta} = 0$ para algum $\boldsymbol{\eta} \neq 0$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{\eta}^\top\boldsymbol{\Phi}^\top(t, t_0)\boldsymbol{C}^\top(t)\boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\boldsymbol{\eta}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^\top(t)\mathbf{y}(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathbf{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\boldsymbol{\eta} \equiv 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

Neste caso, estados iniciais da forma $\mathbf{x}(t_0) = c\boldsymbol{\eta}$, $c \neq 0$, produzem saídas $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, sendo indistinguíveis de uma condição inicial na origem $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$. O sistema é, portanto, não-observável.

Teste algébrico de observabilidade para um SLIT

Um *sistema linear invariante no tempo* com $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ é *observável* se, e somente se, a *matriz de observabilidade* $\boldsymbol{N} \in \mathbb{R}^{n\times nm}$:

$$\boldsymbol{N} = \left[\, \boldsymbol{C}^\top \;\middle|\; \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{C}^\top \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; (\boldsymbol{A}^\top)^{n-1} \boldsymbol{C}^\top \,\right]$$

tiver *posto n (completo)*. Em outras palavras, as colunas de $\boldsymbol{N}$ devem ser um conjunto gerador do $\mathbb{R}^n$ e, portanto, $\boldsymbol{\eta}^\top \boldsymbol{N} = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$.

Voltando ao *teorema da observabilidade*, se $\boldsymbol{M}(t_1, t_0)$ é não-singular, então $\boldsymbol{\eta}^\top \boldsymbol{M}(t_1, t_0) \boldsymbol{\eta} = 0 \iff \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$. Vimos que:

$$\boldsymbol{\eta}^\top \boldsymbol{M}(t_1, t_0) \boldsymbol{\eta} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}^\top(t) \mathbf{y}(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{com} \quad \mathbf{y}(t) = \boldsymbol{C}(t) \boldsymbol{\Phi}(t, t_0) \boldsymbol{\eta}$$

Em outras palavras, para que o sistema seja observável basta provar que $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0} \iff \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$.

Teste algébrico de observabilidade para um SLIT

Notando que, para um SLIT, $\boldsymbol{\Phi}^\top(t, t_0) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}$:

$$\mathbf{y}^\top(t) = \boldsymbol{\eta}^\top \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}^\top(t-t_0)} \boldsymbol{C}^\top$$
$$= \boldsymbol{\eta}^\top \boldsymbol{C}^\top + \boldsymbol{\eta}^\top \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{C}^\top (t - t_0) + \ldots + \frac{1}{k!} \boldsymbol{\eta}^\top (\boldsymbol{A}^\top)^{k-1} \boldsymbol{C}^\top (t - t_0)^{k-1} + \ldots$$

Do *teorema de Cayley-Hamilton* decorre que $\boldsymbol{A}^k$, $k \geq n$, é gerada por $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{A}, \ldots, \boldsymbol{A}^{n-1}\}$. Note ainda que $(\boldsymbol{A}^\top)^k = (\boldsymbol{A}^k)^\top$, $k \geq 0$.

Assim, cada uma das colunas de uma matriz da forma $(\boldsymbol{A}^\top)^k \boldsymbol{C}^\top$, $k \geq 0$, pode ser construída como combinação linear das colunas de $\boldsymbol{N}$.

Portanto, se $\boldsymbol{N}$ tem *posto completo*, o sistema é *observável*, uma vez que:

$$\mathbf{y}(t) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\eta}^\top \boldsymbol{N} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$$

Perguntas?

reorsino@usp.br