Controle e Aplicações • Aula 1.3

Espaço de estados e função de transferência
Matriz de transição de estados
Soluções analíticas e numéricas

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Equações de movimento

As equações de movimento de um sistema dinâmico podem ser tipicamente descritas na forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\upsilon}; \boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{M}(t, \mathbf{q}; \boldsymbol{\theta})\dot{\boldsymbol{\upsilon}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{q}, \boldsymbol{\upsilon}, \mathbf{u}, \mathbf{w}; \boldsymbol{\theta}) \end{cases}$$

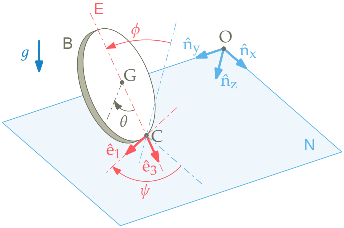
onde identificamos:

- t: variável de tempo;
- $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{\mu}$: vetor de *coordenadas generalizadas*;
- $\boldsymbol{\upsilon} \in \mathbb{R}^{\nu}$: vetor de *quasi-velocidades* (caso $\boldsymbol{\upsilon} = \dot{\mathbf{q}}$, dizemos que $\boldsymbol{\upsilon}$ é um vetor de velocidades generalizadas);
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{r}$: vetor de *entradas de controle*;
- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{l}$: vetor de *entradas de distúrbio*;
- $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{p}$: vetor de *parâmetros* do modelo;
- $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{\mu}$: relação cinemática (*transformação de variáveis*) entre $\dot{\mathbf{q}}$ e $\boldsymbol{\upsilon}$;
- $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$: matriz de *inércia generalizada*;
- $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{\nu}$: vetor de *forças generalizadas*.

Modelo de roda de bicicleta: disco de bordo esbelto

Equações de movimento:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\psi}\\ \dot{\phi}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-r(\omega_2-\omega_3\tan\phi)\cos\psi\\ -r(\omega_2-\omega_3\tan\phi)\sin\psi\\ \omega_3\sec\phi\\ \omega_1\\ \omega_2-\omega_3\tan\phi\end{bmatrix}}_{\mathbf{G}(\mathbf{q},\boldsymbol{\upsilon};\boldsymbol{\theta})}$$



Fonte: Orsino (2020)

$$\underbrace{mr^2\begin{bmatrix}i+1 & 0 & 0\\ 0 & j+1 & 0\\ 0 & 0 & i\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}(;\boldsymbol{\theta})}\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\omega}_1\\ \dot{\omega}_2\\ \dot{\omega}_3\end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{\upsilon}}} = \underbrace{mr^2\begin{bmatrix}\frac{g}{r}\sin\phi+(j+1)\omega_2\omega_3-i\omega_3^2\tan\phi\\ -\omega_1\omega_3\\ i\omega_1\omega_3\tan\phi-j\omega_1\omega_2\end{bmatrix}}_{\mathbf{F}(\mathbf{q},\boldsymbol{\upsilon};\boldsymbol{\theta})}$$

com $\mathbf{q}=(x,y,\psi,\phi,\theta)\in\mathbb{R}^5$, $\boldsymbol{\upsilon}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in\mathbb{R}^3$ e $\boldsymbol{\theta}=(r,g,i,j,m)\in\mathbb{R}^5$.

Modelo de Whipple linearizado para movimento em linha reta

Modelo linearizado em torno de uma solução em regime permanente na qual a bicicleta descreve uma translação em linha reta com velocidade v constante (Meijaard *et al.*, 2007):

$$\boldsymbol{M}\ddot{\mathbf{q}} = -v\boldsymbol{C}_1\dot{\mathbf{q}} - (g\boldsymbol{K}_0 + v^2\boldsymbol{K}_2)\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau}$$

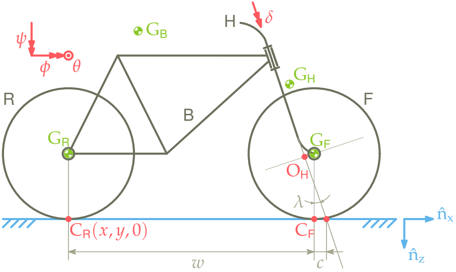
com $\mathbf{q} = (\phi, \delta) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = \tau_\delta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{w} = \tau_\phi \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\theta} = v \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_\phi, \tau_\delta)$ e:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 80.82 & 2.319 \\ 2.319 & 0.2978 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_0 = \begin{bmatrix} -80.95 & -2.600 \\ -2.600 & -0.8033 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 76.60 \\ 0 & 2.654 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 33.87 \\ -0.8504 & 1.685 \end{bmatrix}$$



Estado de um sistema dinâmico

Menor conjunto de variáveis cujo conhecimento em um dado instante de tempo t_0, juntamente ao conhecimento da *entrada* $\mathbf{u}(t)$ para $t \geq t_0$, *determina completamente a resposta* do sistema para $t \geq t_0$.

Certas coordenadas generalizadas podem não estar presentes nas equações dinâmicas. Assim, particiona-se o vetor $\mathbf{q}$ na forma:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^\star \\ \mathbf{q}^\circ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{ coordenadas generalizadas } \textit{presentes} \text{ nas equações dinâmicas} \\ \rightarrow \text{ coordenadas generalizadas } \textit{ausentes} \text{ nas equações dinâmicas} \end{array}$$

A definição canônica para o *vetor de estados* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, obtida diretamente a partir das equações de movimento do modelo é dada por:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^\star \\ \boldsymbol{\upsilon} \end{bmatrix}$$

Dada *qualquer transformação invertível* $\boldsymbol{\psi}$, $\mathbf{z} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$ também é uma definição válida para o vetor de estados.

Modelos na forma de espaço de estados

Dizemos que um modelo está na *forma de espaço de estados* quando suas equações encontram-se expressas como:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}; \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}; \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v} \end{cases}$$

onde identificamos:

- t: variável de tempo;
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: vetor de *estados*;
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$: vetor de *entradas de controle*;
- $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^l$: vetor de *entradas de distúrbio*;
- $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$: vetor de *saídas/observações/medições*;
- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$: vetor de *ruídos de medição*;
- $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^p$: vetor de *parâmetros*.

A definição do vetor de observações $\mathbf{y}$ decorre do fato de que *nem sempre é possível* (e *nem sempre é necessário*) medir todas as variáveis que definem o estado de um sistema dinâmico.

Modelos lineares na forma de espaço de estados

O modelo será *linear* se for possível definir um vetor de estados $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ em que a forma de espaço de estados seja expressa como:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t;\theta)\mathbf{x} + \boldsymbol{B}(t;\theta)\mathbf{u} + \boldsymbol{E}(t;\theta)\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \boldsymbol{C}(t;\theta)\mathbf{x} + \boldsymbol{D}(t;\theta)\mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases}$$

onde identificamos:

- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$: matriz de *estados*;
- $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$: matriz de *entradas de controle*;
- $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{n\times l}$: matriz de *entradas de distúrbio*;
- $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$: matriz de *observações*;
- $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{m\times r}$.

Caso nenhuma das matrizes dependa explicitamente do tempo, dizemos que se trata de um *sistema linear invariante no tempo (SLIT)*.

Modelo de Whipple linearizado para movimento em linha reta

Para o modelo de Whipple, adotando $\mathbf{x} = (\phi, \delta, \dot{\phi}, \dot{\delta}) \in \mathbb{R}^4$, $\mathbf{u} = \tau_\delta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{w} = \tau_\phi \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{y} = \phi \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{E}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \boldsymbol{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

com:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.489 & -0.8912v^2 - 0.5715 & -0.1055v & -0.3305v \\ 11.72 & 30.91 - 1.972v^2 & 3.677v & -3.085v \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.1241 \\ 4.324 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0159 \\ -0.1241 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D} = 0$$

Estados de equilíbrio de um modelo não-linear

Considere um modelo matemático *não-linear e invariante no tempo* expresso na *forma de espaço de estados*:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}_\mathsf{n}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_\mathsf{n}, \mathbf{u}_\mathsf{n}, \mathbf{w}_\mathsf{n}; \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{y}_\mathsf{n} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_\mathsf{n}, \mathbf{u}_\mathsf{n}; \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v} \end{cases}$$

Um estado de *equilíbrio dinâmico* (também conhecido como *solução em regime permanente*) associado às entrada $\mathbf{u}_\mathsf{n} = \bar{\mathbf{u}}$ e $\mathbf{w}_\mathsf{n} = \bar{\mathbf{w}}$ constantes, é um estado $\mathbf{x}_\mathsf{n} = \bar{\mathbf{x}}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}; \boldsymbol{\theta})$ também constante tal que:

$$\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}; \theta) = \mathbf{0}$$

O *modelo linearizado* será descrito em termos de *variáveis incrementais* (denotadas sem índice: $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{y}$), definidas como:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathsf{n} - \bar{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{u}_\mathsf{n} - \bar{\mathbf{u}}, \qquad \mathbf{w} = \mathbf{w}_\mathsf{n} - \bar{\mathbf{w}}, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{y}_\mathsf{n} - \bar{\mathbf{y}}$$

Linearização em torno de um estado de equilíbrio

As *equações de movimento linearizadas* do sistema descrevem a dinâmica de *soluções que ocorrem no entorno de* $\mathbf{x}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{w}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{w}}$:

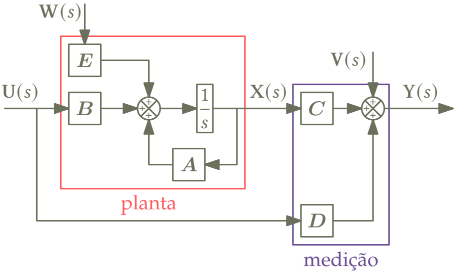
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{E}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \boldsymbol{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{D}\mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases}$$

em que $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ são matrizes jacobianas definidas como:

$$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}_\mathrm{n}}\right|_{\substack{\mathbf{x}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{w}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{w}}}} \qquad \boldsymbol{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}_\mathrm{n}}\right|_{\substack{\mathbf{x}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{w}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{w}}}} \qquad \boldsymbol{E} = \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}_\mathrm{n}}\right|_{\substack{\mathbf{x}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{w}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{w}}}}$$

$$\boldsymbol{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}_\mathrm{n}}\right|_{\substack{\mathbf{x}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{w}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{w}}}} \qquad \boldsymbol{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}_\mathrm{n}}\right|_{\substack{\mathbf{x}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{w}_\mathrm{n} = \bar{\mathbf{w}}}}$$

Diagrama de blocos e funções de transferência de um SLIT

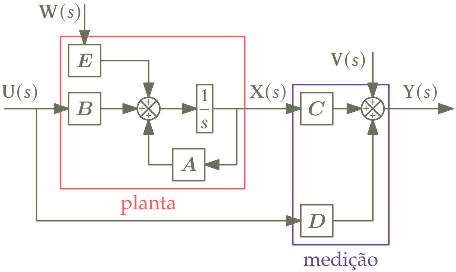


$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\mathbf{x} + \boldsymbol{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{E}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \boldsymbol{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{D}\mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{A}\mathbf{X}(s) + \boldsymbol{B}\mathbf{U}(s) + \boldsymbol{E}\mathbf{W}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \boldsymbol{C}\mathbf{X}(s) + \boldsymbol{D}\mathbf{U}(s) + \mathbf{V}(s) \end{cases}$$

$$\mathbf{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\left[\boldsymbol{B}\mathbf{U}(s) + \boldsymbol{E}\mathbf{W}(s) + \mathbf{x}(0)\right]$$

$$\boxed{\mathbf{Y}(s) = \left[\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}\right]\mathbf{U}(s) + \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\left[\boldsymbol{E}\mathbf{W}(s) + \mathbf{x}(0)\right] + \mathbf{V}(s)}$$

Solução analítica para um SLIT



Utilizando a *transformada inversa de Laplace* e definindo a *matriz de transição de estados* $\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right](t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) + \underbrace{\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\left[\boldsymbol{B}\mathbf{u}(\tau) + \boldsymbol{E}\mathbf{w}(\tau)\right]\,\mathrm{d}\tau}_{\text{integral de convolução}}$$

Resposta dinâmica de modelos lineares gerais

Para *qualquer* modelo matemático *linear*:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\mathbf{u}(t) + \boldsymbol{E}(t)\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \end{cases}$$

existe uma *matriz de transição de estados* $\boldsymbol{\Phi}(t, \tau)$ tal que:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\Phi}(t, \tau) \left[\boldsymbol{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau) + \boldsymbol{E}(\tau)\mathbf{w}(\tau)\right] \, \mathrm{d}\tau$$

Em particular, *se* $\boldsymbol{A}$ *for invariante no tempo*, então:

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \tau) = \boldsymbol{\Phi}(t - \tau) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}$$

A origem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ será um ponto de equilíbrio:

- *instável* se $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ *para algum autovalor* λ de $\boldsymbol{A}$;
- *estável* se $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ *para todo autovalor* λ de $\boldsymbol{A}$.

Mudança de variáveis

Considere uma mudança de variáveis de estados definida por uma transformação linear baseada na matriz invertível $\boldsymbol{T}$ constante:

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{T}\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \boldsymbol{T}^{-1}\mathbf{z}$$

Sustituindo a transformação nas equações do modelo:

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}^{-1}\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}\mathbf{z} + \boldsymbol{B}\mathbf{u} + \boldsymbol{E}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1}\mathbf{z} + \boldsymbol{D}\mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{z}}{\mathrm{d}t} = \overline{\boldsymbol{A}}\mathbf{z} + \overline{\boldsymbol{B}}\mathbf{u} + \overline{\boldsymbol{E}}\mathbf{w} \\ \mathbf{y} = \overline{\boldsymbol{C}}\mathbf{z} + \boldsymbol{D}\mathbf{u} + \mathbf{v} \end{cases}$$

com:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}, \qquad \overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{B}, \qquad \overline{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{E} \qquad \text{e} \qquad \overline{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1}$$

Note ainda que, para um SLIT:

$$\overline{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{A}})^{-1}\right](t) = \boldsymbol{T}\mathcal{L}^{-1}\left[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right](t)\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{T}^{-1}$$

Cabe notar ainda que *as funções de transferência do sistema são invariantes a uma mudança de variáveis de estado*.

Perguntas?

reorsino@usp.br