CURSO DE DESENHO C. MARMO

G. DESCRITIVA: PROJEÇÕES PONTO, RETA E PLANO

CAPÍTULO 2

ESTUDO GEOMÉTRICO DAS PROJEÇÕES CILÍNDRICAS

*

O estudo do capítulo anterior mostra que as seguintes afirmações são verdadeiras:

106 • 1ª) O conhecimento detalhado das projeções cilíndricas é fundamental para as seguintes matérias: PERSPECTIVA CAVALEIRA (que é projeção cilíndrica oblíqua), PERSPECTIVA AXONOMÉTRICA (que é projeção cilíndrica ortogonal), e GEOMETRIA DESCRITIVA (que emprega projeção cilíndrica ortogonal em dois ou três planos), GEOMETRIA COTADA (projeção ortogonal num plano).

Projeções cilíndricas são ainda utilizadas, em qualquer dessas matérias e também em PERSPECTIVA CÔNICA, no estudo das SOMBRAS produzidas por luz de raios paralelos.

107 • 2ª) Para saber "projeções cilíndricas" e, portanto, as matérias acima citadas, é necessário ter BASE GEOMÉTRICA, conhecer a TEORIA DAS PROJEÇÕES e adquirir PRÁTICA em aplicar êsses conhecimentos em problemas e exercícios.

108 • Entende-se por BASE GEOMÉTRICA o conhecimento perfeito dos TEOREMAS* que regem as projeções cilíndricas e das PROPRIEDADES das FIGURAS que serão projetadas.

109 • Saber a TEORIA DAS PROJEÇÕES significa conhecer as DEFINIÇÕES e NOMENCLATURA dessa TEORIA.

110 • A PRÁTICA, que só se adquire através de exercícios, inclui o conhecimento da melhor maneira de raciocinar para conseguir resolver sòzinho os problemas.

111 • 3ª) Assim como existe muita diferença entre tocar piano "de ouvido" e tocar piano "por música", existe também muita diferença entre saber projeções "a ôlho" e saber projeções "por Geometria". Os que sabem projeções "a ôlho', como os Desenhistas Profissionais, graças a anos de prática e também à sua visão espacial natural, conseguem bons resultados, mas sempre inferiores aos resultados conseguidos pe-

---

* **Se o Estudante pensa que sabe, então responda: A bissetriz de um ângulo conserva-se na proj. cilíndrica ?**

los Engenheiros e Arquitetos que se apóiam numa boa base geo**métrica.**

112 • Por outro lado, convém frisar que os Estudantes que já possuem boa visão espacial natural aprimoram essa visão espacial, mediante um estudo organizado e geométrico de projeções, assim como uma pessoa de bom ouvido musical, melhora essa qualidade estudando Música.

113 • Os Estudantes com visão espacial deficiente encontram muita dificuldade no estudo de projeções, mas se forem persistentes, mais cedo ou mais tarde começarão a perceber melhor as coisas, até conseguir boa visão espacial adquirida, qualidade fundamental que distingue um Engenheiro de um simples Técnico.

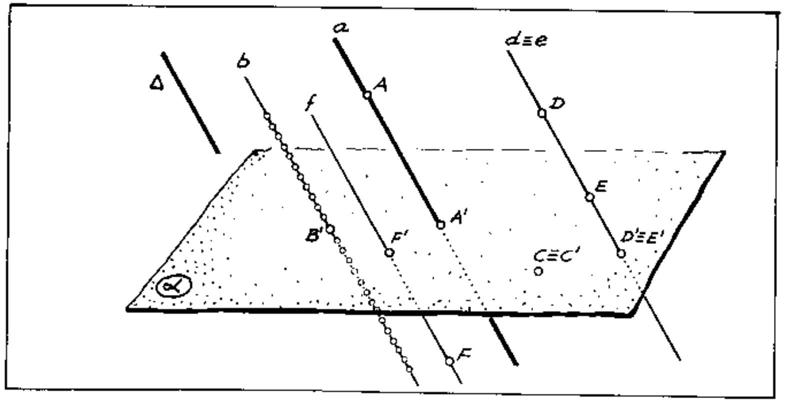
114 • Aconselha-se aos Estudantes que querem melhorar a sua VISÃO ESPACIAL, repetirem a experiência do nº 88 com vários objetos comuns, por exemplo: peças de jogos de armar infantis, parafusos, arruelas, peças de dominó, dados, rádios de pilha, etc. (ver cap.1 - livro 7)

*

§ 1º - OS TEOREMAS

A - Definições e Nomenclatura

115 • Um sistema cilíndrico de projeções é caracterizado por um plano α e por uma direção qualquer Δ* não paralela a α.



* a direção é representada por uma das retas que têm essa direção.

116 • Consideremos também um ponto qualquer A do **Espaço**; por êsse ponto passa uma única reta a que **tem a direção** Δ, isto é, paralela a Δ. A reta a **obrigatòriamente** encontra α no ponto A', pois, se Δ não é **paralela a** α, a reta $a // \Delta$ fura α.

117 • Nomenclatura:

α - plano de projeção
Δ - direção de projeção
a - projetante de A e
A' - projeção cilíndrica de A em α, na direção Δ.

118 • Nota: Só é necessário frisar: "em α, **na direção** Δ" quando há mais do que um plano de projeção **ou então** mais do que uma direção de projeção; caso **contrário, quando** há um só plano e uma só direção, basta dizer **projeção de** A (nem "cilíndrica" é preciso).

Definições:

119 • 1ª) Projetante de um ponto é a reta que **tem** a direção Δ e contém o ponto.

120 o 2ª) Projeção cilíndrica de um ponto é o traço (intersecção) da projetante do ponto com o plano de projeção.

Nota:

121 • Fixados α e Δ, considerado um ponto A do Espaço, sua projeção cilíndrica existe e é única; entretanto, considerada a projeção cilíndrica B' de um ponto B, êste não está determinado, pois, só sabemos que B pertence à projetante $b // \Delta$; por isso: a posição de um ponto no Espaço não fica determinada apenas por sua projeção cilíndrica num só plano.

122 • Nota: Todos os pontos do Espaço têm projeções cilíndricas; os pontos de α coincidem com suas próprias projeções.

Definição:

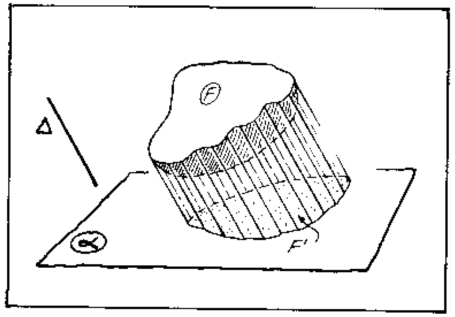
123 • Projeção cilíndrica de uma figura qualquer F **é** o l.g. F' das projeções cilíndricas de seus pontos, isto **é**:

a) todo ponto de F tem sua proj. em F' e

• b) todo ponto de F' é projeção de **pelo menos um** ponto de F.

Observação:

124 • É útil pensar na projeção cilíndrica de uma figura, como sendo a sombra projetada pela mesma num anteparo α, tendo a luz raios paralelos entre si e na direção Δ (luz solar, luz de holofote, ...).



125 • Dêsse modo, poderemos aceitar sem demonstração, baseados apenas no Bom Senso, algumas afirmações, tais como:

a) a projeção cilíndrica de um sólido limitado é uma superfície;

b) a projeção cilíndrica de uma linha reversa (não-complanar) é sempre uma linha; etc.

126 • Nota: Quando a figura do Espaço é uma linha, o l.g. das projetantes é uma superfície cilíndrica (do tipo geral), daí o nome de "sistema cilíndrico de projeções".

B - TEOREMAS

127 • A assimilação dos teoremas dêste parágrafo é indispensável para o estudo racional da Teoria das Projeções Cilíndricas. Quando o Estudante, no decorrer de um exercício, emprega um teorema que já estudou e demonstrou, tem segurança no que está fazendo.

128 • É conveniente decorar os enunciados, inclusive os números dos teoremas, devido à freqüência com que êsses números serão citados ao longo dêste "CURSO DE DESENHO".

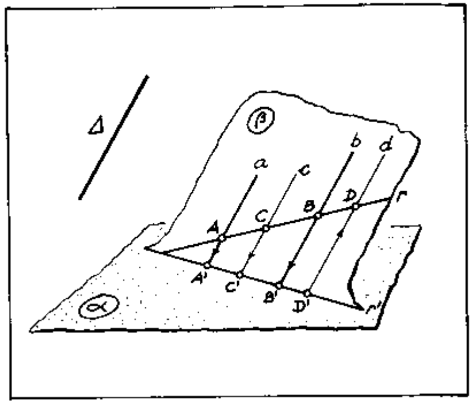
T - 0

129 • A projeção cilíndrica de uma reta não paralela à Δ é também uma reta.

A projeção cilíndrica de uma reta paralela à Δ é um ponto.

Demonstração:

130 • 1ª parte: Seja a reta r não paralela à Δ e projetemos dois de seus pontos A e B, obtendo A' e B' que determinam a reta r' em α.



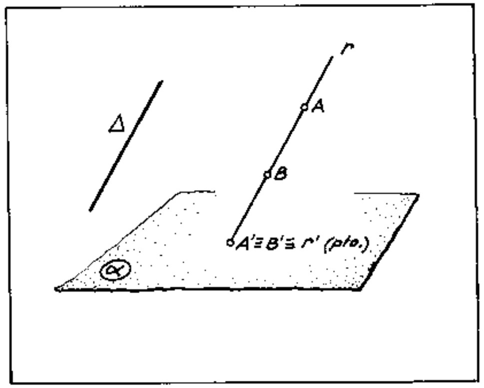
Demonstremos que a reta r' é a projeção cilíndrica de r em α. Lembrando a definição do 123 basta demonstrar que:

1º) qualquer ponto C de r tem sua projeção C' em r' e

2º) qualquer ponto D' de r' é projeção de um ponto D de r*.

De fato (vide figura), as retas a e b, sendo paralelas a Δ, determinam um plano β, que é paralelo a Δ e contém r e r'. Então, conduzindo pelos pontos C e D' de β as retas c e d paralelas à Δ, essas retas pertencerão a β e, por conseguinte, interceptam (pois Δ não paralela a α e r não paralela a Δ) respectivamente r' em C' e r em D. c.q.d

131 • 2ª parte: Quando r // Δ, as projeções de todos os seus pontos coincidem (Postulado de Euclides). Logo, a projeção de r é um ponto, traço de r em α. c.q.d.



132 • Nota: - O plano β que contém r e é paralelo à Δ, existe sempre e é único quando r não é para-

* D' é a projeção de infinitos pontos, um só dos quais está em r.

lela a Δ e chama-se plano projetante da reta r.

133 • Sòmente retas não paralelas a Δ têm plano projetante, pois, se a reta é paralela a Δ, existem infinitos planos que a contém e são paralelos a Δ e, por isso, não se define plano projetante.

Nota: Poderíamos definir projeção cilíndrica de uma reta como segue:

134 • a) se a reta não é paralela a Δ, sua projeção cilíndrica é o traço de seu plano projetante em α, e

135 • b) se a reta é paralela a Δ, sua projeção cilíndrica é o traço da reta em α.

Recíprocos do T-0

Valem os recíprocos:

136 • 1º) Se a projeção cilíndrica de uma reta é também uma reta, então a reta do Espaço não é paralela a Δ.

Demonstração: De fato, se a reta fôsse paralela a Δ, sua projeção seria um ponto, contrariando a hipótese de ser reta, c.q.d.

137 • 2º) Se a projeção cilíndrica de uma reta é um ponto, então a reta é paralela a Δ.

Demonstração: De fato, as projetantes coincidem com a reta e como as projetantes são paralelas a Δ, a reta também é, c.q.d.

Conseqüências do T-0

São talvez mais empregadas do que o próprio T-0.

138 • 1ª) Se três (ou mais) pontos são colineares, então suas projeções cilíndricas ou são colineares ou coincidem; sabendo que duas delas são distintas, conclui-se que tôdas são distintas e colineares, e sabendo que duas delas coincidem, conclui-se que tôdas coincidem.

139 • 2º) Se três (ou mais) pontos distintos têm projeções colineares, então só podemos concluir que êsses pontos são complanares e que seu plano é paralelo a Δ; os pontos podem ser colineares ou não.

140 • 3º) Se três (ou mais) pontos distintos têm projeções coincidentes, então êsses pontos são colineares, e a reta que os contém é paralela a Δ.

Conclusões do T-0

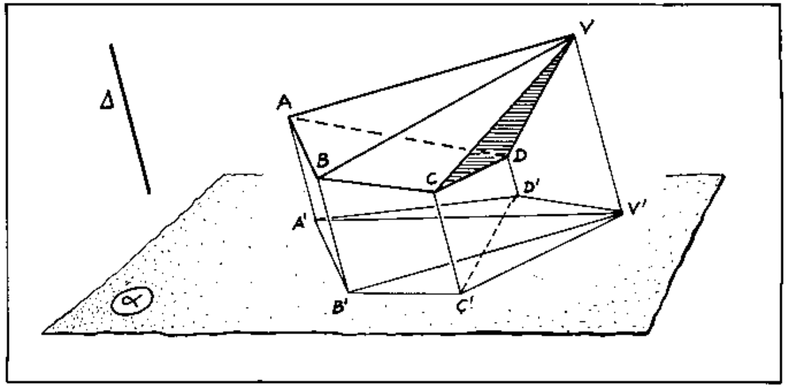
141 • a) Pode-se obter a projeção cilíndrica de uma reta não paralela a Δ por dois caminhos:

1) ligando as projeções de dois de seus pontos

ou 2) obtendo o traço de seu plano projetante no plano de projeção α.

142 • b) A projeção cilíndrica de um segmento AB, não paralelo a Δ, é o segmento A'B' sendo A' e B' projeções de A e B.

143 • c) Obtém-se a projeção cilíndrica de um polígono ou poliedro quaisquer, unindo por segmentos as projeções de seus vértices (sòmente os que estão ligados no Espaço).



144 • d) Uma reta r não paralela a Δ e sua projeção cilíndrica r' são complanares (pertencem ao plano projetante), logo, de três uma:

1) ou são concorrentes (no ponto onde a reta fura α),

2) ou são paralelas (quando $r // \alpha$),

3) ou são coincidentes (quando $r \in \alpha$).

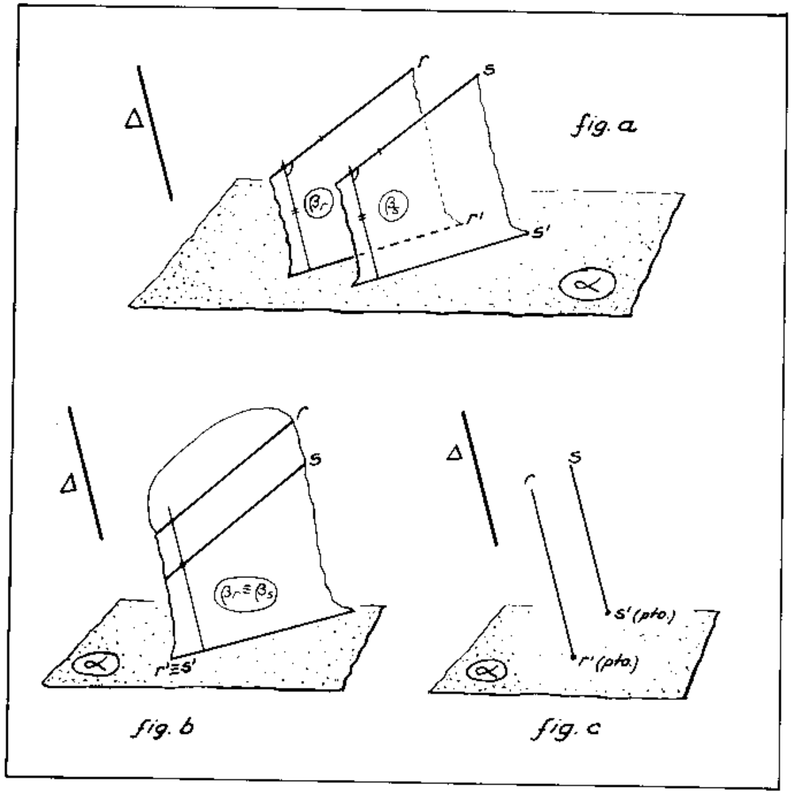
T - 1

145 ● Se duas retas r e s são paralelas, então as suas projeções cilíndricas ou são paralelas, ou são coincidentes ou são pontuais.

Demonstração:

Se as retas r e s são paralelas entre si, mas não são paralelas a Δ, seus planos projetantes β_r e β_s e portanto suas projeções r' e s' serão paralelas (figura a) ou coincidentes (figura b).

Caso r e s sejam paralelas a Δ, suas projeções r' e s' são ambas pontuais (figura c).



Recíprocos do T - 1

Quanto aos recíprocos, podemos afirmar que:

146 ● a) Sabendo que as projeções cilíndricas de duas retas são paralelas entre si, podemos concluir que os planos projetantes são paralelos e as retas só podem ser: ou paralelas ou reversas.

147 ● b) Sabendo que as projeções cilíndricas de duas retas são coincidentes entre si, podemos concluir que os planos projetantes coincidem e as retas, se forem distintas, só podem ser: ou paralelas ou concorrentes.

148 ● c) Sabendo que as projeções são pontuais, podemos concluir que as retas são paralelas entre si, por serem ambas paralelas a Δ.

Sòmente neste último caso, o recíproco do T - 1 é verdadeiro.

T - 2

149 ● Quando dois segmentos têm mesma direção, isto é, ou são paralelos ou são colineares, a razão entre êles no Espaço conserva-se na projeção cilíndrica, desde que a direção dos segmentos não seja paralela a Δ.

Notas:

150 ● 1ª) Compreenda bem: quem se conserva é a razão (número puro).

2ª) Caso a direção dos segmentos seja Δ, a razão das projeções é indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$, pois essas projeções são pontuais.

Demonstração do T - 2:

Sejam dois segmentos AB e CD paralelos (figura a) ou colineares (figura b) e demonstremos que a razão (AB / CD) entre êles no Espaço é igual à razão (A'B' / C'D') entre suas projeções cilíndricas, respectivamente.

De fato, considerando as retas AX // A'B' e .. CY // C'D' obtemos os triângulos ABX e CDY, de cuja semelhança se conclui:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AX}{CY} \text{ .... (I)}$$

Por outro lado, AXB'A' e CYD'C' são paralelogramos, logo:

$$\left.\begin{array}{l} AX = A'B' \\ \text{e} \quad CY = C'D' \end{array}\right\} \text{ ..... (II)}$$

Substituindo (II) em (I), conclui-se a tese:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \qquad \text{c.q.d.}$$

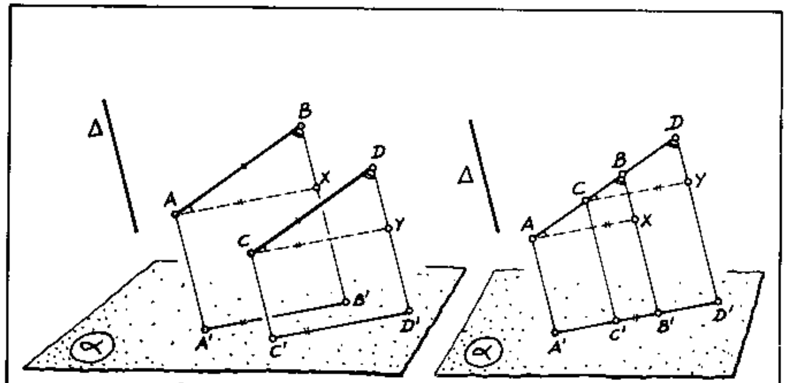
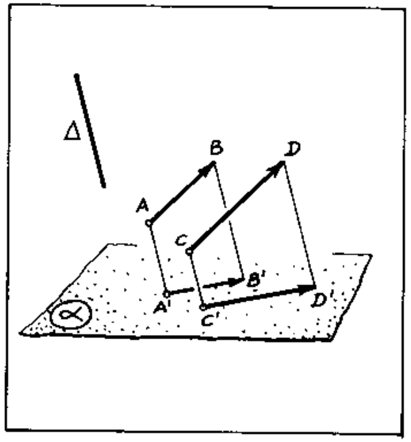


fig. a fig. b

1ª Advertência

152 • A razão entre dois segmentos de mesma direção conserva-se em projeção cilíndrica, inclusive com sinal, isto é, se os segmentos AB e CD têm sentidos concordantes (o mesmo sentido), suas projeções A'B' e C'D' continuam com sentidos concordantes entre si (observe as flexas!). Evidentemente, se AB e CD têm sentidos opostos, o mesmo se passa com A'B' e C'D'.



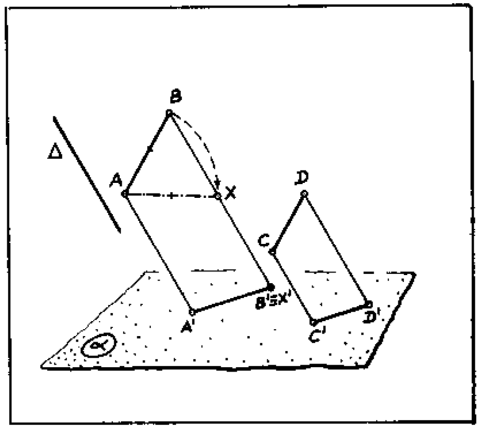
2ª Advertência:

153 • O recíproco do T-2 não é válido, isto é, a razão entre dois segmentos pode se conservar em projeção, sem que os segmentos tenham mesma direção; dizendo de outro modo, para confirmar: sabendo que a razão entre dois segmentos se conserva em projeção, não podemos concluir que os segmentos têm mesma direção: talvez tenham e talvez não tenham.

154 • Para "demonstrar" que uma afirmação não procede basta mostrar um caso onde ela falha; mostremos dois:

155 • 1º) Consideremos os segmentos .. AB e CD de mesma direção; já foi demonstrado que a razão entre êles conserva-se em projeção, isto é, a seguinte igualdade é verdadeira:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ .... (I)}$$



Consideremos o ponto X na mesma projetante de B, tal que:

$$AX = AB \text{ .... (II)}$$

Só não é possível considerar êsse ponto X distinto de B, quando AB é ortogonal a Δ .

Como X pertence à projetante de B, tem-se que X' coincide com B', isto é, A'X' (projeção de AX) coincide com A'B', logo:

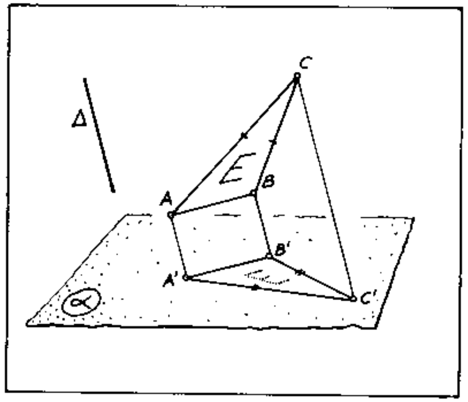
$$A'X' = A'B' \text{ .... (III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$\frac{AX}{CD} = \frac{A'X'}{C'D'}$$

Esta última expressão mostra que a razão (AX/CD) entre AX e CD conserva-se na projeção (A'X'/C'D') e no entanto AX e CD não têm mesma direção!

156 • 2º) Espere um dia de sol e faça a seguinte experiência (no Clube!): procure uma posição adequada para que um triângulo isósceles ABC (de papelão) tenha para sombra outro triângulo isósceles A'B'C' (existem infinitas posições possíveis).



Note que a razão entre AC e BC (que é um), conserva-se na projeção $\left(\frac{A'C'}{B'C'} = 1\right)$ e, no entanto, AC e BC são concorrentes em C, isto é, não tem mesma direção!

Conseqüências do T - 2

157 • 1ª) Segmentos de mesma direção e iguais tem projeções cilíndricas iguais.

158 • 2ª) O ponto médio de um segmento projeta-se no ponto médio da projeção do segmento.

159 • 3ª) Se um ponto divide um segmento não paralelo a Δ numa razão qualquer, a projeção do ponto divide a do segmento nessa mesma razão.

160 • 4ª) A simetria com relação a um ponto conserva-se numa projeção cilíndrica.

Nota: Um caso particular importante é o seguinte:

161 • A projeção de um ponto divide a de um segmento numa certa razão; sabendo que o ponto pertence ao segmento, podemos concluir que o ponto divide o segmento nessa mesma razão.

De fato, sabendo que o ponto pertence ao segmento, podemos concluir que as duas partes do segmento têm mesma direção, logo a razão entre elas é igual à razão de suas projeções. Esta é uma afirmação direta disfarçada e não uma afirmação recíproca!

T - 3

162 • Se uma figura pertence a um plano paralelo ao plano de projeção, então essa figura projeta-se em v.g.*

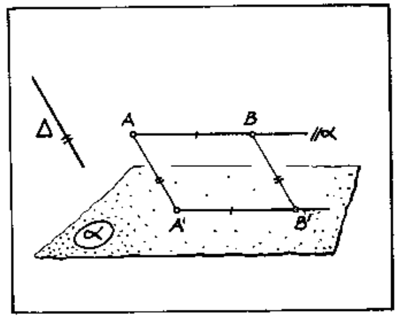
163 • Nota: Note-se que essa afirmação é válida por mais oblíqua que seja a direção Δ! Alguns Estudantes não concordam ou não entendem essa afirmação; esperamos que, após a demonstração, comecem a concordar ou entender.

Demonstração do T - 3

164 • Não existe demonstração unificada; é necessário, pois, demonstrar por partes:

165 • 1ª Parte: Segmentos

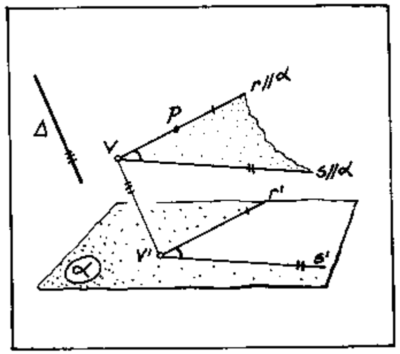
Seja o segmento AB // α e demonstremos que AB projeta-se em v.g., isto é, .. AB = A'B'. De fato, se .... AB // α, conclui-se que AB // //A'B' (teorema de Geometria) Como AA' // BB' por serem ambas paralelas a Δ, segue-se que a figura ABB'A' é paralelogramo, donde: AB = A'B'
c.q.d.



166 • 2ª Parte: Ângulos

Consideremos um ângulo $\widehat{rs}$ com os dois lados paralelos a α e demonstremos a igualdade desse ângulo com sua projeção $\widehat{r's'}$. De fato,

se r // α, então r // r' e
se s // α, então s // s'
Portanto os ângulos $\widehat{rs}$ e

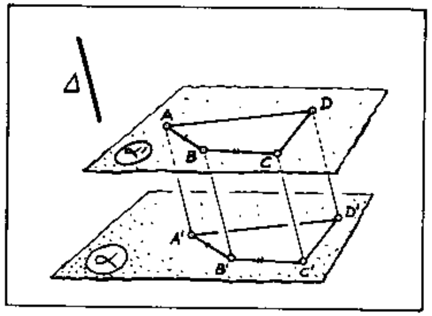


* vide nº 70

$\widehat{r's'}$ são iguais por terem os lados respectivamente paralelos e de mesmo sentido *, c.q.d.

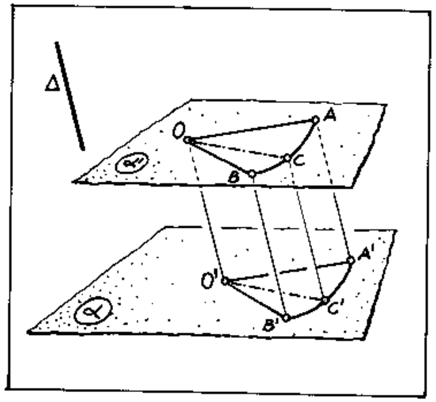
167 • 3ª Parte: Polígonos

Consideremos um polígono cujo plano α' é paralelo a α. Êsse polígono projeta-se em v.g. porque seus lados (1ª Parte) e seus ângulos (2ª Parte) projetam-se respectivamente em v.g. Então, o polígono ABCD ... é igual à sua projeção A'B'C'D'... c.q.d.



168 • 4ª Parte: Arcos de circunferência

Consideremos agora um arco de circunf. $\widehat{AB}$, de centro O e contido num plano $\alpha' // \alpha$. Demonstremos que êsse arco projeta-se em v.g. De fato, todos os raios do arco $\widehat{AB}$ projetam-se em v.g. (são segmentos paralelos a α), logo a linha A'B' é um arco de circunferência de raio igual ao do arco AB porque todos os pontos dessa linha estão a essa distância de O'. Além disso, os ângulos centrais $\widehat{AOB}$ e $\widehat{A'O'B'}$ são iguais (2ª Parte), logo os arcos $\widehat{AB}$ e $\widehat{A'B'}$ são iguais por terem mesmo raio e mesmo ângulo central, c.q.d.



* decorre da definição de sentidos concordantes: r e r' estão no mesmo semi-plano de origem VV' (vide fig. na pág. anterior), pois, se estivessem em semi-planos opostos, a reta que liga P com sua proj. P' (não está na fig.) encontraria VV', o que é absurdo porque PP' e VV' são projetantes paralelas.

5ª Parte: Generalização

169 • Generalizando, podemos afirmar, sem demonstrar* que qualquer figura plana, cujo plano é paralelo a α, projeta-se em v.g.

Exemplos: uma elipse, um mapa de S.Paulo, etc.

Notas:

170 • 1ª) Êste T-3 é um dos mais importantes teoremas do estudo das Projeções Cilíndricas.

171 • 2ª) Não esquecer que sòmente figuras planas podem projetar-se em v.g., pois a projeção é sempre plana (vide nºs 68 e 69).

ADVERTÊNCIA

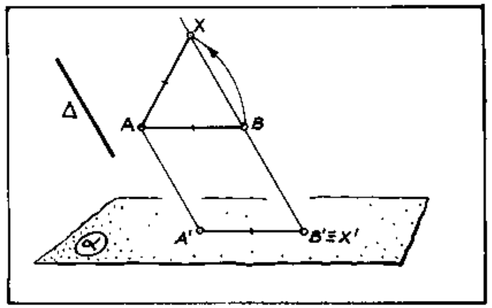
172 • Quando Δ é oblíqua a α, o recíproco do T-3 não é verdadeiro, isto é, uma figura pode projetar-se em v.g. sem pertencer a um plano paralelo a α; confirmando: sabendo que uma figura tem projeção oblíqua em v.g., não se pode concluir que essa figura pertença a um plano paralelo a α; talvez sim e talvez não.

Mostração (não se pode demonstrar!):

173 • 1ª Parte: Segmentos:

AB // α ∴ AB = A'B'

Construamos AX = AB de modo que X' ≡ B'. Note que AX = A'X', isto é, AX projeta-se em v.g. e não é paralelo a α!

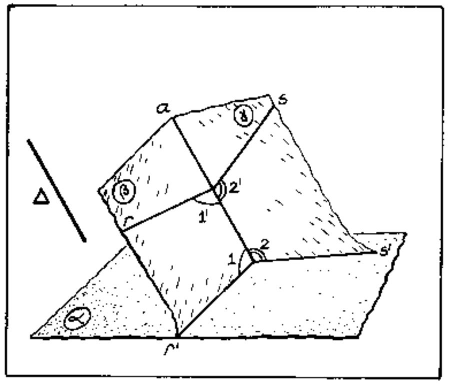


174 • 2ª Parte: Ângulos:

Consideremos um diedro com a aresta a e portanto com as duas faces β e γ paralelas a Δ. Qualquer reta de β projeta-se em r' e qualquer reta de γ projeta-se em s'.

* para figuras geométricas há sempre demonstração.

Construamos $\hat{1}' = \hat{1}$ e $\hat{2}' = \hat{2}$ como mostra a figura, de modo que $r \in \beta$ e $s \in \gamma$.



Os ângulos $\widehat{rs}$ e $\widehat{r's'}$ são secções igualmente inclinadas do mesmo diedro (V. Geometria), logo são iguais, isto é, o ângulo $\widehat{rs}$ está se projetando em v.g. e no entanto não tem os dois lados r e s paralelos a α ; se r e s fossem ambos* paralelos a α, teríamos:

$\hat{1}$ = suplemento de $\hat{1}'$ (correspondentes)

e $\hat{2}$ = suplemento de $\hat{2}'$ (correspondentes).

Mas, por construção, $\hat{1} = \hat{1}'$ e $\hat{2} = \hat{2}'$, logo :

$\hat{1}'$ = suplemento de $\hat{1}'$ e

$\hat{2}'$ = suplemento de $\hat{2}'$.

Ora, um ângulo só é igual ao seu suplemento quando é reto, portanto, teríamos:

$\hat{1}' = 90^o$ e $\hat{2}' = 90^o$ ou

$\hat{1} = 90^o$ e $\hat{2} = 90^o$.

Mas, se $\hat{1}$ e $\hat{2}$ forem retos, a e portanto Δ, seriam perpendiculares a α, contrariando a hipótese inicial de Δ ser oblíquo a α.

175 • 3ª Parte: Outras figuras

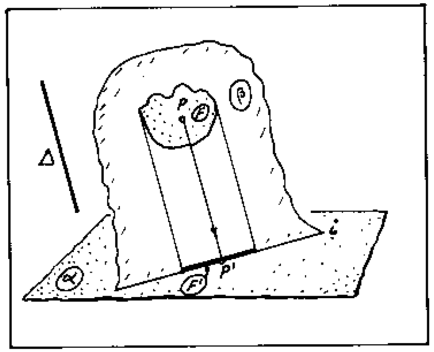
Não há necessidade de continuar; basta lembrar que secções não paralelas, mas igualmente inclinadas de um prisma ou de um cilindro, podem ser iguais; uma dessas secções seria a figura do espaço e a outra seria sua projeção em α.

* um só pode ser paralelo a α.

T - 4

176 • Qualquer figura contida num plano paralelo a Δ tem para projeção um segmento que pertence ao traço do plano da figura em α.

Demonstração:



Seja F uma figura qualquer contida no plano $\beta // \Delta$ e demonstremos que F', projeção de F, é um segmento pertencente à reta i, traço de β em α.

De fato, qualquer ponto P de F tem a projetante pertencente a β (teorema de Geometria); essa projetante fura α em P' que é comum aos planos α e β, logo pertence à reta i. Como todos os pontos de F tem projeções em i, conclui-se a tese, c.q.d.

Recíprocos do T - 4

O T-4 tem vários recíprocos, todos verdadeiros:

177 • 1º) Se uma figura (não é segmento) tem para projeção cilíndrica um segmento, então essa figura é plana, seu plano é paralelo a Δ e a projeção pertence ao traço do plano.

Demonstração: De fato, as projetantes são paralelas a Δ e como se apóiam num segmento, são tôdas complanares, etc.

178 • 2ª) Quando uma figura plana projeta-se no traço de seu plano no plano de projeção, pode-se concluir que o plano da figura é paralelo a Δ.

179 • 3º) Se um ponto pertence a um plano β mas não pertence a α e projeta-se no traço de β em α, então β é paralelo a Δ.

4º) Se β é paralelo a Δ, todo ponto que se projeta no traço de β em α pertence a β.

Projeções Cilíndricas Ortogonais
ou simplesmente:

PROJEÇÕES ORTOGONAIS

181 • Definição: Quando Δ é oblíqua a α, a projeção chama-se projeção cilíndrica oblíqua ou apenas projeção oblíqua.

182 • Definição: Quando Δ é perpendicular a α, a projeção chama-se projeção cilíndrica ortogonal ou projeção ortogonal.

Conseqüências:

183 • 1ª) Projeção ortogonal de um ponto num plano é o pé da perpendicular ao plano, conduzida pelo ponto.

184 • 2ª) Projeção ortogonal de uma figura é o l.g. das projeções ortogonais de todos os seus pontos.

185 • 3ª) Projeção ortogonal de uma reta, não perpendicular ao plano de projeção, é o traço do plano perpendicular ao plano de projeção, conduzido pela reta.

186 • 4ª) Projeção ortogonal de uma reta perpendicular ao plano de projeção é o traço dessa reta nesse plano.

187 • Nota: Tratando-se de projeções ortogonais, não é necessário citar Δ, pois as retas e os planos projetantes são sabidamente perpendiculares ao plano de projeção.

Observação importante:

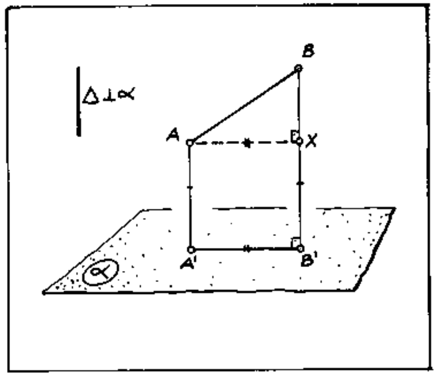
188 • Todos os teoremas, do T - 0 ao T - 4, valem para projeções cilíndricas, isto é, valem para projeções oblíquas e também para projeções ortogonais.

Os dois últimos teoremas, o T - A e o T - 5, só valem para projeções ortogonais.

T - A (Teorema Auxiliar)

189 • Quando um segmento é oblíquo ao plano de projeção, sua proj. ortogonal é sempre menor do que êle.

Demonstração:



De fato, consideremos AX // A'B', obtendo o paralelogramo (retângulo) AXB'A', no qual AX = A'B'.

No triângulo retângulo ABX, o cateto AX é sempre menor do que a hipotenusa AB, isto é:

$$A'B' < AB$$

(projeção) (segmento)

Nota: Na projeção oblíqua, a projeção pode ser maior, menor ou igual ao segmento.

Conseqüência Importante:

Graças ao T - A, poderemos demonstrar que:

190 • O recíproco do T - 3 vale na proj. ortogonal

Demonstração:

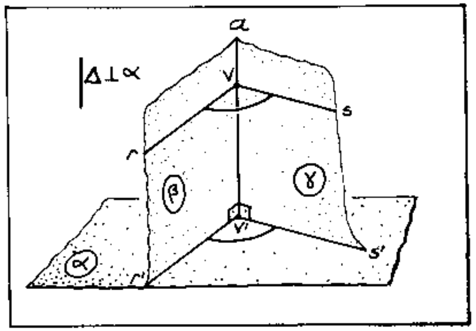
191 • 1ª Parte: Segmentos

Hipótese: AB = A'B' Tese: AB // α

Demonstr.: De fato, se AB não fôsse // α, pelo T - A teríamos: A'B' < AB, o que é absurdo, pois contraria a hipótese.

2ª Parte:

Ângulos:



Hipótese: $\widehat{rs} = \widehat{r's'}$

Tese: pl. (r, s) // α *

Demonstração: Admitamos demonstrado (V. Geom.) que: a secção reta de um diedro agudo é a menor sec-

* exceto quando êsses ângulos são retos (vide T-5)

ção de um diedro; então, se $\widehat{rs}$ não fôsse também uma secção reta, isto é, se o plano $\widehat{rs}$ não fôsse paralelo a α, teríamos: $\widehat{r's'} < \widehat{rs}$ o que contraria a hipótese, c.q.d.

193 • <u>3ª Parte</u>: <u>Outras figuras</u>

Para nós, basta afirmar que: se duas secções de um prisma ou cilindro são iguais entre si, e uma delas é secção reta, a outra também é.

$\boxed{T - 5}$

194 • Êste teorema merece um estudo geométrico mais detalhado, <u>porque é difícil compreendê-lo intuitivamente</u>. O melhor modo de apresentar e estudar o T-5 e seus dois recíprocos é o seguinte:

Escreve-se inicialmente três itens, como segue:

195 • 1. <u>Duas retas (do Espaço) são ortogonais * ($\dot{\perp}$ s) ou perpendiculares ($\perp$ s) entre si.</u>

2. <u>Uma delas é paralela ou pertence ao plano de projeção e a outra não é perpendicular a êsse plano **.</u>

3. <u>As projeções ortogonais *** (dessas retas) são perpendiculares entre si.</u>

196 • * Duas retas são <u>ortogonais</u> quando são <u>reversas</u> (não existe plano que as contenha) e <u>formam ângulo reto</u> (por exemplo, as arestas AB e FG do cubo). Duas retas são <u>perpendiculares</u> quando são <u>complanares</u> (concorrentes) e <u>formam ângulo reto</u> (por exemplo, as arestas AB e BC).

** Se fôr perpendicular, sua projeção será um ponto; pode ser ou oblíqua, ou paralela ou pertencente.

*** O T-5 e seus recíprocos <u>só valem para projeções ortogonais</u> ($\Delta \perp \alpha$) e certos casos muito particulares de projeções oblíquas sem aplicações em problemas comuns.

Escritos e compreendidos os três ítens afirma-se:

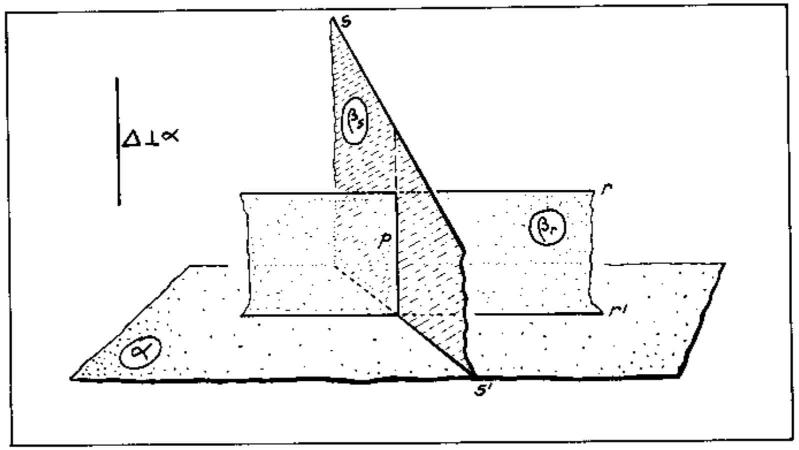
198 • <u>Se dois dos ítens se verificam, então o 3º ítem obrigatòriamente se verifica também.</u>

Note-se que essa afirmação engloba <u>três</u> proposições, recíprocas entre si; vamos separá-las para efeito de demonstração:

<u>(T-5) direto</u>:

199 • Se $\underbrace{1 \text{ e } 2}_{\text{Hipótese}}$, então $\underbrace{3}_{\text{Tese}}$

<u>Nota</u>: Na figura, r $\dot{\perp}$ s e r // α .



Hipótese $\begin{cases} \text{proj. ortog. isto é } \Delta \perp \alpha \\ r \dot{\perp} \text{ ou } \perp s \\ r \text{ // ou } \in \alpha \\ s \text{ não } \perp \alpha \\ r' \text{ e } s' \text{ são projeções de } r \text{ e } s, \\ \text{respectivamente} \end{cases}$ Tese $\{ r' \perp s'$

Demonstração

por Hip. $\boxed{\Delta \perp \alpha} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} \beta_r \perp \alpha \\ \beta_s \perp \alpha \end{cases} \xrightarrow{(2)} p \perp \alpha \xrightarrow{(3)} p \perp r'$

por Hip. $\rightarrow \boxed{r \text{ // ou } \in \alpha} \xrightarrow{(4)} r \text{ // ou } \equiv r'$

$\xrightarrow{(5)} r \perp p$

por Hip. $\rightarrow \boxed{r \dot{\perp} \text{ ou } \perp s}$

por Hip. $\rightarrow \boxed{s \text{ não } \perp \alpha}$; $\xrightarrow{(2)} p \perp \alpha$ $\Big\} \xrightarrow{(6)}$ s e p concorrentes

$\xrightarrow{(7)} r \perp \beta s \xrightarrow{(8)} \beta r \perp \beta s$; $\xrightarrow{(2)} p \perp \alpha$ $\Big\} \xrightarrow{(9)} \boxed{r' \perp s'}$ c. q. d.

<u>Justificação das conclusões</u>:

(1) <u>Se</u> a projeção é ortogonal, <u>então</u> os planos projetantes β_r e β_s são ambos perpendiculares a α.

(2) <u>Se</u> dois planos β_r e β_s são secantes e perpendiculares a α, <u>então</u> sua intersecção p é perpendicular a α.

(3) <u>Se</u> a reta p é perpendicular ao plano α, <u>então</u> p é perpendicular a r', que está em α e passa pelo pé.

(4) <u>Se</u> a reta r é paralela ao plano α, <u>então</u> r é paralela à sua projeção r' em α; <u>se</u> $r \in \alpha$, <u>então</u> r coincide com r'.

(5) <u>Se</u> duas retas r e r' são paralelas ou coincidentes, <u>então</u> uma 3ª reta p, <u>complanar com ambas</u>, que é perpendicular à r', é também perpendicular a r.

(6) <u>Se</u> s não $\perp \alpha$ e p $\perp \alpha$, <u>então</u> s e p não podem ser paralelas nem coincidentes, e como pertencem à β_s, são concorrentes.

(7) <u>Se</u> duas retas s e p <u>são concorrentes</u> e uma 3ª reta r é perpendicular à p e ortogonal ou perpendicular a s, <u>então</u> r é perpendicular ao plano β_s que contém s e p.

(8) <u>Se</u> $r \perp \beta_s$ e β_r contém r, <u>então</u> $\beta_r \perp \beta_s$.

(9) <u>Se</u> $\beta_r \perp \beta_s$, <u>então</u> o diedro formado é reto;
<u>Se</u> $\alpha \perp p$, <u>então</u> $\widehat{r's'}$ é secção reta;
<u>Se</u> $\widehat{r's'}$ é secção reta de um diedro reto, <u>então</u> $r' \perp s'$.

200 • <u>Nota</u>: Observe que <u>todos</u> os componentes da hipótese foram usados; isto significa que a falta de um dêles <u>impede</u> que se conclua a tese. Por exemplo: sem afirmar que $\boxed{s \text{ não } \perp \alpha}$ não concluímos que s e p são concorrentes; sem saber que s e p são concorrentes, não podemos concluir que $r \perp \beta_s$; sem $r \perp \beta_s$, não concluímos $\beta_r \perp \beta_s$ e não concluímos a tese.

<u>Se a hipótese não se verifica integralmente, a tese pode se verificar ou não.</u>

<u>Se a hipótese se verifica integralmente, a tese obrigatòriamente se verifica.</u>

<u>1º recíproco do T - 5</u>

201 • $\boxed{\text{Se } \underbrace{2 \text{ e } 3}_{\text{hipótese}}, \quad \text{então } \underbrace{1}_{\text{tese}}}$

(<u>mesma figura</u>)

$$\text{Hip.} \begin{cases} \triangle \perp \alpha \\ r \parallel \text{ ou } \in \alpha \\ r' \perp s' \end{cases} \quad \text{Tese} \left\{ r \;\dot{\perp}\; \text{ou} \perp s \right.$$

Demonstração:

por Hip. $\boxed{\triangle \perp \alpha} \xrightarrow{(1)} \begin{Bmatrix} \beta r \perp \alpha \\ \beta s \perp \alpha \end{Bmatrix} \xrightarrow{(2)} p \perp \alpha \xrightarrow{(3)} p \perp r'$

por Hip. $\boxed{r \parallel \text{ ou } \in \alpha} \xrightarrow{(4)} r \parallel \text{ ou } \equiv r'$

$p \perp r'$ e $r \parallel$ ou $\equiv r'$ $\xrightarrow{(5)} r \perp p$

$r \parallel$ ou $\equiv r'$ e por Hip. $\boxed{r' \perp s'}$ $\xrightarrow{(6)} r \;\dot{\perp}$ ou $\perp s'$

$r \perp p$ e $r \;\dot{\perp}$ ou $\perp s'$, *mas p e s' concorrentes* $\xrightarrow{(7)}$

$\xrightarrow{(7)} \left. \begin{matrix} r \perp \beta s \\ \text{mas } s \in \beta s \end{matrix} \right\} \xrightarrow{(8)} r \;\dot{\perp}$ ou $\perp s$. c.q.d.

<u>Justificação das conclusões</u>:

(1), (2), (3), (4), (5) - As mesmas do **T-5 direto.**

(6) <u>Se</u> duas retas r' e s' são perpendiculares, <u>então</u> qualquer reta r que é paralela ou coincidente com r', obrigatòriamente ou é ortogonal ou é perpendicular a s'.

(7) <u>Se</u> duas retas p e s' são concorrentes e uma 3ª reta r é perpendicular a uma (p) e ortogonal ou perpendicular à outra (s'), <u>então</u> essa 3ª reta r é perpendicular ao plano β_s que contém p e s'.

(8) <u>Se</u> uma reta r é perpendicular a um plano β_s, <u>então</u> essa reta r é ortogonal ou perpendicular a qualquer reta s dêsse plano β_s.

<u>2º recíproco do T - 5</u>

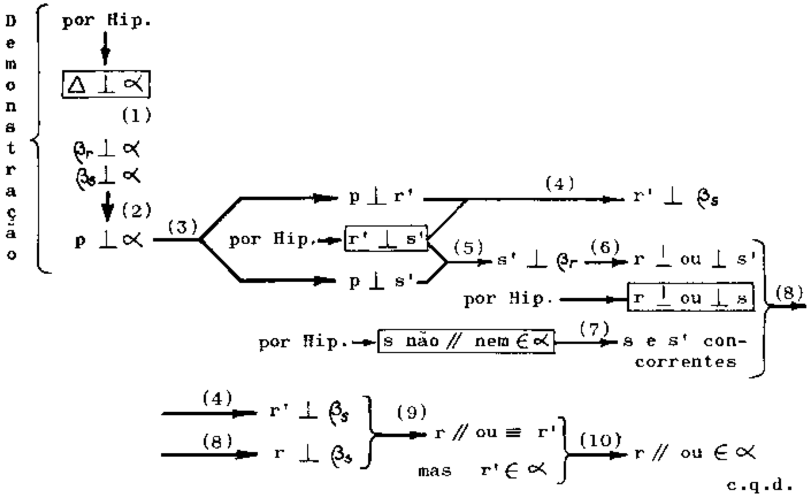
202 • $\boxed{\text{Se } \underbrace{1 \text{ e } 3}_{\text{hipótese}}, \quad \text{então } \underbrace{2}_{\text{tese}}.}$

(<u>mesma figura</u>)

$$\text{Hip.}\begin{cases} \triangle \perp \alpha \\ r \perp \text{ ou } \perp s \\ r' \perp s' \rightarrow s \text{ não } \perp \alpha \; * \\ s \text{ não } /\!/ \text{ nem } \in \alpha \; ** \end{cases} \qquad \text{Tese}\;\{\; r \,/\!/ \text{ ou } \in \alpha$$

* De fato, se $r' \perp s'$, então s' é reta, logo s não $\perp \alpha$.

** Para poder demonstrar que "uma delas é paralela ou pertence a α", somos obrigados a supor que "a outra" (no caso s) não é paralela nem pertence a α.



Justificação das conclusões

(1), (2) As mesmas do T - 5 direto.

(3) Se $p \perp \alpha$, então é perpendicular a qualquer reta de α que passa pelo seu pé, isto é, $p \perp r'$ e $p \perp s'$.

(4) Se r' é perpendicular a duas retas concorrentes p e s' do plano β_s, então $r' \perp \beta_s$.

(5) Se s' é perpendicular a duas retas concorrentes r' e p do plano β_r, então $s' \perp \beta_r$.

(6) Se $s' \perp \beta_r$ e $r \in \beta_r$, então $r \perp$ ou $\perp s'$.

(7) Se s não $/\!/$ nem $\in \alpha$ e $s' \in \alpha$, então s e s' são concorrentes, pois são complanares, e não podem ser nem paralelas e nem coincidentes.

(8) Se r é $\perp$ ou $\perp$ a duas retas concorrentes s e s' do plano β_s, então $r \perp \beta_s$.

(9) Se duas retas r' e r são perpendiculares ao mesmo plano β_s, então essas retas ou são paralelas, ou coincidem.

(10) Se uma reta r é paralela a uma reta r' de α, então $r /\!/ \alpha$; se $r \equiv r'$ e $r' \in \alpha$, então $r \in \alpha$.

Conseqüências do T - 5

203 • 1ª) Um ângulo reto com um lado paralelo ou pertencente, e o outro lado não perpendicular ao plano de projeção, tem projeção ortogonal em v.g.

204 • 2ª) Se um ângulo projeta-se ortogonalmente em v.g. sôbre um plano paralelo a um lado, então êsse ângulo é necessàriamente reto.

205 • 3ª) Se um ângulo reto tem projeção ortogonal em v.g., então pelo menos um de seus lados é paralelo ou pertencente ao plano de projeção.

206 • 4ª) A simetria de um ponto (e portanto de qualquer figura), com relação a uma reta paralela ou pertencente ao plano de projeção, conserva-se na projeção ortogonal.

Advertência:

207 • Um ângulo não reto só se projeta ortogonalmente em v.g. quando os dois lados são paralelos ao plano de projeção; no entanto, se o ângulo é reto, basta um só lado ser paralelo (ou pertencente) e o outro não perpendicular ao plano de projeção para que êle tenha projeção ortogonal em v.g.

RESUMO

Convém gravar, para posteriores aplicações, os seguintes enunciados para projeções ortogonais:

208 • [T - 0] - A projeção ortogonal de uma reta perpendicular ao plano de projeção é um ponto; caso contrário é uma reta. Valem os recíprocos.

209 • [T - 1] - Retas paralelas têm projeções ortogonais ou paralelas (sôbre planos oblíquos ao plano das retas), ou coincidentes (sôbre planos perpendiculares ao das retas), ou pontuais (sôbre planos perpendiculares às retas).

Se as projeções são paralelas, então as retas não têm ponto comum (paralelas ou reversas).

Se as projeções coincidem, então as retas são complanares (paralelas, concorrentes ou coincidentes).

Se as projeções são pontuais, então as retas são paralelas.

210 • [T - 2] - Se dois segmentos têm mesma direção então sua razão conserva-se (com sinal) na projeção, exceto se a direção fôr perpendicular ao plano de projeção.

211 • [T - 3] - Qualquer figura situada num plano paralelo (ou coincidente) com o plano de projeção, projeta-se em v.g.

A recíproca não vale para projeções oblíquas, mas vale para projeções ortogonais.

212 • [T - 4] - Consideremos uma figura plana, não linear - reta (não é ponto, nem reta, nem segmento).

Escrevamos três ítens:

1. O plano da figura é perpendicular ao plano de projeção.

2. A projeção da figura é um segmento.

3. A projeção da figura está no traço de seu plano com o plano de projeção.

Afirmemos que:

> Se um dos ítens se verifica, então os outros dois necessàriamente se verificam.

213 • [T - A] - A projeção ortogonal de um segmento não paralelo ao plano de projeção é sempre menor que o segmento.

214 • [T - 5] - Três ítens:

1. Duas retas (do Espaço) formam entre si ângulo reto ($\perp_s$ ou $\perp_s$).

2. Uma delas é paralela ou pertence ao plano de projeção e a outra não é perpendicular a êsse plano.

3. As projeções ortogonais dessas retas são perpendiculares entre si.

> Se dois ítens se verificam, então o 3º ítem obrigatòriamente se verifica.

> Se um só item se verifica, então os outros dois podem ou não se verificar.

Experiências

215 • Munindo-se de um anteparo plano (fôlha de cartolina), alguns araminhos, esquadros, etc., pode o Estudante verificar experimentalmente a validade dos Teoremas, num dia ensolarado.

Para verificar o T - A e o T - 5, é preciso colocar o anteparo perpendicular à direção dos raios solares; esta direção se obtém ligando um corpúsculo à sua sombra ou obrigando um arame bem reto ter sombra pontual (T - 0).

C - QUESTIONÁRIO

216 • Preencher os vazios numerados:

Nota: Δ - direção de projeção
α - plano de projeção.

[T - 0]

1. Se uma reta é paralela a Δ , então a sua projeção é .... (1).

2. Se uma reta é perpendicular a α , sua projeção ortogonal é .... (2).

3. Se a projeção de uma reta é um ponto, então essa reta é .... (3).

4. Se a projeção ortogonal de uma reta é um ponto, então essa reta é .... (4).

5. Se três (ou mais) pontos são colineares, então suas projeções ou são .... (5) ou são ... . (6); caso duas projeções coincidam, as restantes ....(7) e caso duas projeções sejam distintas, as restantes serão .... (8) e .... (9).

6. Se as projeções de três pontos coincidem, então êsses pontos são .... (10) e pertencem a uma .... (11).

7. Se as projeções de três pontos são colineares e os pontos não são colineares, então, na projeção oblíqua, o plano dos pontos é .... (12)

e na projeção ortogonal o plano dos pontos é ....
.... (13).

8. Se um ponto pertence a uma reta, então a projeção do ponto ....
.... (14).

9. Se a projeção ortogonal de um ponto pertence à projeção ortogonal de uma reta e o ponto não pertence à reta, então o plano determinado por êles é ....
.... (15).

[T - 1]

10. Se duas retas são paralelas, então as suas projeções cilíndricas só podem ser: ou ....
(16) ou .... (17) ou .... (18)

11. Se as projeções cilíndricas de duas retas são pontuais, então essas retas ....
.... (19).

12. Se as projeções cilíndricas de duas retas distintas são coincidentes, então os planos projetantes são .... (20) e as retas são .... (21), podendo ser: ou..
.... (22) ou ....
.... (23).

13. Se as projeções cilíndricas de duas retas são paralelas, então os planos projetantes são ....
.... (24) e as retas ou são ....
.... (25) ou são .... (26)

[T - 2]

14. Se dois segmentos têm mesma direção (distinta de Δ), então a razão dêles ....
.... (27).

15. Se a razão de dois segmentos conserva-se na projeção cilíndrica, então ....
.... (28).

16. Se um ponto divide um segmento numa certa razão, então a projeção do ponto divide a projeção do segmento .... (29).

17. Se a projeção de um ponto divide a projeção de um segmento numa certa razão e o ponto pertence ao segmento, então o ponto .... (30)

[T - 3]

18. Se uma figura pertence a um plano paralelo ao plano de projeção, então essa figura ....
.... (31).

19. Se uma figura tem projeção ortogonal em v.g., então essa figura é plana e seu plano é ....
.... (32).

20. Se uma figura tem projeção oblíqua em v.g. então essa figura é plana e seu plano ....
.... (33).

[T - 4]

21. Se um ponto pertence a um plano paralelo a Δ, então a projeção do ponto pertence ao ....
.... (34).

22. Se um ponto pertence a um plano perpendicular ao plano de projeção, então a projeção ortogonal do ponto pertence ao .... (35).

23. Se a projeção de um ponto pertence ao traço de um plano no plano de projeção e o ponto não pertence a êsse traço, mas pertence ao plano, então êsse plano é ......
.... (36) e se a projeção fôr ortogonal então êsse plano é .... (37)

24. Se um plano é paralelo a Δ e um ponto tem projeção no traço dêsse plano, então o ponto ....
.... (38).

25. Se um plano é perpendicular ao plano de projeção e um ponto tem projeção ortogonal no traço dêsse plano, então o ponto .... (39)

26. Se o plano de uma figura é paralelo a Δ então a projeção da figura é um .... (40) que pertence ao traço do plano.

27. Se o plano de uma figura é perpendicular ao plano de projeção, então a projeção ortogonal da figura é um .... (41) que pertence ao ...
.... (42).

28. Se a perspectiva cavaleira de uma figura plana é um segmento, então o plano da figura é ....
.... (43).

29. Se a proj. ortog. de uma figura plana é um segm., então o plano da figura é .... (44)

[T - 5]

Escreva os três itens do [T - 5]:

1. ....

2. ....

3. ....

Se 1 e 2, então .... (45); Se 1 e 3 então .... (46).

Se 2 e 3, então .... (47) Se (um item só), então .... (48).

[T-A] 24. Se um segmento é oblíquo ao plano de projeção, então sua projeção ortogonal é .... (49).

25. Se a projeção ortogonal de um segmento é menor do que o segmento, então o segmento não é .... (50).

[Vários]

26. A projeção ortogonal de um quadrado é um retângulo. Conclusão: .... (51)

27. A projeção ortogonal de um losango é um quadrado. Conclusão: .... (52).

28. A projeção ortogonal de um pentágono é um segmento. Conclusão: .... (53)

29. A projeção ortogonal de um triângulo equilátero é um triângulo isósceles. Conclusão: .... (54)

30. Duas retas têm projeções em α coincidentes e projeções em β concorrentes, sendo $\alpha \perp \beta$. Conclusão: .... (55)

31. As duas projeções de um quadrado, em α e em $\beta \perp \alpha$, são retângulos. Conclusão: .... (56)

32. Se A, O e B são colineares, então .... (57) ....

33. Se M é ptº médio de AB, então .... (58)

34. Se a reta r é paralela à reta s, então .... (59)

Que figura geométrica é a projeção oblíqua de uma esfera ?

Resp.: .... (60)

Duas retas reversas podem ter projeções cilíndricas:

coincidentes? Resp.: .... (61)

paralelas? Resp.: .... (62)

concorrentes? Resp.: .... (63)

A projeção ortogonal de um quadrado é um segmento quando .... (64)

é um quadrado quando .... (65)

é um retângulo quando .... (66)

é um losango quando .... (67)

é um paralelogramo quando .... (68)