

Lab. Informática
Ens

5071 - 5021

Fleury 99

INTRODUÇÃO À TEORIA DE CONTROLE

NOTAS DE AULA DO CURSO PMC 450 - INTRODUÇÃO
À TEORIA DE CONTROLE I

AGENCIAMENTO DE TOLEDO FLEURY

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
ESCOLA POLITÉCNICA DA USP

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
2. UM POUCO DA HISTÓRIA	4
3. A NECESSIDADE DE CONTROLE NA ENGA. MECANICA	4
4. TENDÊNCIAS EM CONTROLE DE SISTEMAS MECÂNICOS	6
5. CONCEITOS BÁSICOS	8
6. PROJETO DE UM CONTROLADOR	12
7. REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS	14
7.1. MATRIZ DE TRANSIÇÃO DE ESTADOS	24
7.2. FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA	29
8. TRANSFORMADAS DE LAPLACE	34
8.1. TRANSFORMAÇÃO INVERSA	39
9. AÇÕES BÁSICAS DE CONTROLE	44
9.1. CONTROLADOR ON-OFF	44
9.2. CONTROLADOR PROPORCIONAL	45
9.3. CONTROLADOR INTEGRAL	47
9.4. CONTROLADOR DERIVATIVO	49
9.5. CONTROLADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL	50
9.6. CONTROLADOR PROPORCIONAL-DERIVATIVO	51
9.7. CONTROLADOR PROPORCIONAL-INTEGRAL-DERIVATIVO	52
10. CONTROLADORES INDUSTRIAIS	54
10.1. CONTROLADORES PNEUMÁTICOS	54
10.2. CONTROLADORES HIDRÁULICOS	62
10.3. CONTROLADORES ELETRÔNICOS	66
11. ANÁLISE DE ERROS EM REGIME	69
11.1. CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE	72
12. ANÁLISE DE ERROS EM REGIME TRANSITÓRIO	76

12.1.	RESPOSTA TRANSIENTE A EXCITAÇÃO CONHECIDA	77
12.2.	ESPECIFICAÇÕES DA RESPOSTA TRANSITÓRIA	80
12.3.	SISTEMAS DE MAIOR ORDEM	85
12.4.	CRITÉRIOS DE DESEMPENHO GLOBAIS	86
12.5.	CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH	88
12.6.	CRITÉRIO DE ROUTH: COMPLEMENTOS	92
13.	O MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES	95
13.1.	REGRAS PARA CONSTRUÇÃO	97
13.2.	O LUGAR DAS RAÍZES COM VARIAÇÃO DE PARÂMETRO	108
13.3.	SISTEMAS COM ATRASO PURO	110
14.	MÉTODOS DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	114
14.1.	DIAGRAMAS DE BODE	116
14.2.	CONSTRUÇÃO DOS DIAGRAMAS DE BODE	125
14.3.	GRÁFICOS POLARES: CRITÉRIO DE NYQUIST	126
14.4.	ROBUSTEZ E MARGENS DE ESTABILIDADE	131
14.5.	COMPENSADORES	138
15.	PROJETO ATRAVÉS DE VARIÁVEIS DE ESTADO	145
15.1.	CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE	146
15.2.	PROJETO DE CONTROLADORES	153
15.2.1.	MÉTODO DE ALOCAÇÃO DE PÓLOS	153
15.2.2.	CONTROLADORES LINEARES - QUADRÁTICOS (LQ)	158
15.3.	OBSERVADORES DE ESTADO	163
15.4.	ALOCÇÃO DE PÓLOS PARA ACOMPANHAMENTO DE REFERÊNCIA	162
15.5.	TRATAMENTO DE SISTEMAS COM VARIÁVEIS FORÇANTES	170

PMC 450

INTRODUÇÃO À TEORIA DE CONTROLE I

Prof. Fleury

1. INTRODUÇÃO

O desejo do homem de controlar (ou reproduzir) as forças da Natureza tem sido o catalizador para o progresso ao longo da História. O objetivo tem sido sempre controlar essas forças para permitir ao homem realizar tarefas que muitas vezes estão acima de sua capacidade.

Controle de sistemas é um assunto interdisciplinar que tem raízes em praticamente todos os campos de conhecimento e, logicamente, em todas as especialidades de Engenharia. Nos campos de conhecimento, o conceito fundamental da Engenharia de Controle, a idéia de regulamentação, - tem sido utilizado (e surpreendido) nas aplicações de Medicina (exemplos são a Anestesia, a Cardiologia, os aparelhos extra corpóreas, como a hemodiálise, e, em outro nível, o controle de epidemias), de Psicologia (como exemplo, as Redes Neurais e suas diversas interfaces), de Bioquímica (todas as células vivas incorporam mecanismos!

de reequipamento) e muitos outros.

Nas especialidades de Engenharia, o emprego de sistemas de controle se dá em vários níveis. Apenas para citar algumas aplicações em campos não muito usuais, basta lembrar:

- Engenharia Civil:

- * prédios inteligentes: conforto térmico, segurança

- * Controle de reservatórios (nível, solo)

- * Isolação quanto a vibrações externas

- Engenharia Metalúrgica

- * Controle de espessura em laminadores

- * Controle de banhos em galvanoplastia, p. ex

- Engenharia de Petróleo

- * Posicionamento de sondas

- * Refinarias

- * Transporte (oleodutos e gasodutos)

- Engenharia de Produção

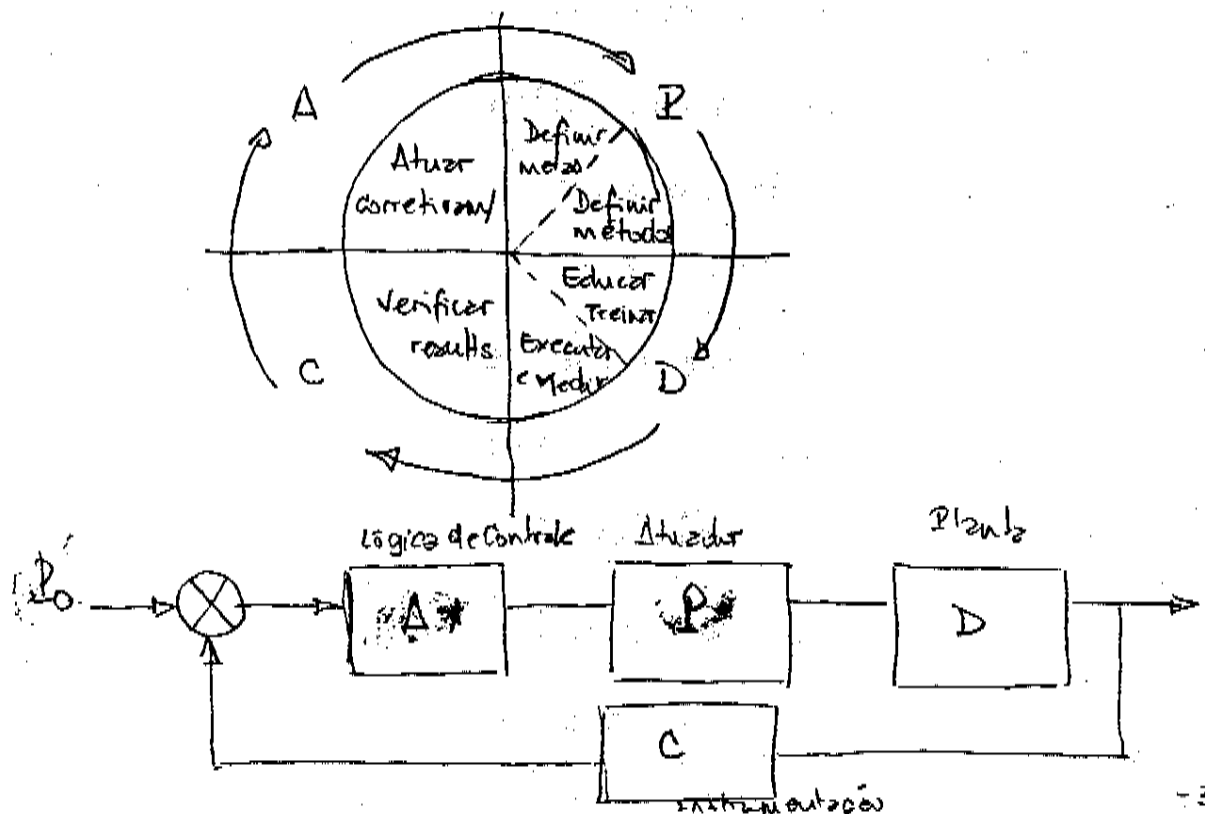
- * Células Flexíveis de Manufatura

- * Sistema Integrado de Manufatura

- * Controle da Fábrica

Num ponto de vista macro, envolvendo Engenharia de Produção, Administração de Empresas e mesmo Macroeconomia, a situação é no mínimo curiosa. Vários dos grandes inovadores em Teoria de Controle das décadas de 60 e 70 trabalham hoje em sistemas Econômicos (ex: Aoki, Luenberger) desenvolvendo modelos e sistemas de controle aplicados ao Planejamento Estratégico Nacional.

O próprio modelo industrial japonês se baseia na chamada Gestão de Qualidade Total que nada mais é do que um esquema de controle aplicado a cada um dos níveis de atividade industrial. O esquema básico é o do PDCA (Plan / Do / check / Action):



A importância do estudo de controle em outras áreas da Engenharia é reconhecida hoje pela própria instalação de grupos de estudo nos diversos departamentos. Porém são as escolas com graduação nas Engenharias Mecânica, Naval, Química, Elétrica (caso da EPUSP), Aeronáutica ou Aeroespacial que não mantêm cursos em Controle nos seus currículos. Aplicações serão mostradas na sequência.

2. UM POUCO DA HISTÓRIA

É importante notar que até a década de 40 os controladores utilizados eram puramente mecânicos.

- Pêndulo de Watt (1750)
- Início da teoria (mecânica): Maxwell (1868)
- Era de Transição (1850-1940)
- A Ciência de Controle (1940-1960)
- A Teoria de Controle como Instrumento do Progresso Tecnológico (1960 -)

3. A NECESSIDADE DE CONTROLE EM ENGENHARIA MECÂNICA

Sistemas de controle podem ser caracterizados como dispositivos que, baseados em informações (medidas, observações ou regress), são capazes de regular os fluxos de energia, matéria ou outros recursos, a serem processados em outro dispositivo (planta). O arranjo e a complexidade de um sistema de controle dependem do seu propósito ou função.

Como se viu nos exemplos anteriores, até cerca de 1940 os controladores eram essencialmente mecânicos. Muitas aplicações atuais ainda o são:

- Copiador hidráulico para torno
- Circuito sequencial para função de chaves

Logicamente, os adventos da eletrônica e do computador modificaram esse estado de coisas, principalmente no que se refere ao processamento das informações sobre o sistema. Como será exaustivamente comentado ao longo do curso, o controle que pode ser exercido sobre um sistema é tão bom quanto o conhecimento que se tem sobre o mesmo sistema. Se, por um lado, isso torna inevitável o uso da Eletrônica, por outro não há como realizar ações de controle sobre o sistema.

sem o uso de dispositivos mecânicos. Exemplos:

- Controle do leme do Shuttle
- Controle do empuxo do Shuttle
- Controle de Suspensões Ativas (F1, Trans)
- Controle da Pressurização de Cabine de Aviões
- Controle de uma Bomba de Deslocamento Variável
- Controle de Troca de Marchas num Veículo
- Controle de um Processo Fermentativo
- Controle de um Motor de Combustão Interna

4. TENDÊNCIAS EM CONTROLE DE SISTEMAS MECÂNICOS

Baseado na experiência pessoal e na revista de 50^o aniversário da Dynamic Systems and Automatic Control Division da ASME (Trans ASME/J Dyn Syst, Meas. Control, Junho 1993), as áreas de investimento para sistemas de controle em Engenharia Mecânica são, principalmente:

- Controle de Estruturas Flexíveis

Interesse: robôs, usinagem de precisão, estruturas especiais, aviões

- Modelagem e Controle de Processos de Manufatura

Interesse: soldas, retificação, estamparias, etc (série)

- Controle de Processos de Usinagem
Interesse: Torneamento, Frezagem, Furagem, etc.
(relação de 1/1000 num ciclo: investimento de US\$30K numa máquina de US\$300K produz até US\$30M durante o ciclo de vida da máquina).
- Controle de Veículos
Interesse: suspensões, motores, sistemas propulsores (motor + cambio + rodas), direções
- Controle de Sistemas Térmicos
Interesse: energias alternativas (solar, p.ex); grandes substitutas, etc.
- Automação e Controle de Laboratórios
Interesse: garantia de qualidade, aumento de produtividade
- Controle de Sistemas Aeroespaciais
Interesse: aviões, foguetes, satélites, etc.

Tecnologia necessária:

- Modelagem (muita): determinística + estocástica
- Controle Sequencial
- Controle Robusto (LAG/LTR, H_{∞} , μ -síntese)
- Controle Adaptativo (Self Tuning, Mod. Referência)
- Controle por Reconfiguração Quasidistribuída

5. CONCEITOS BÁSICOS

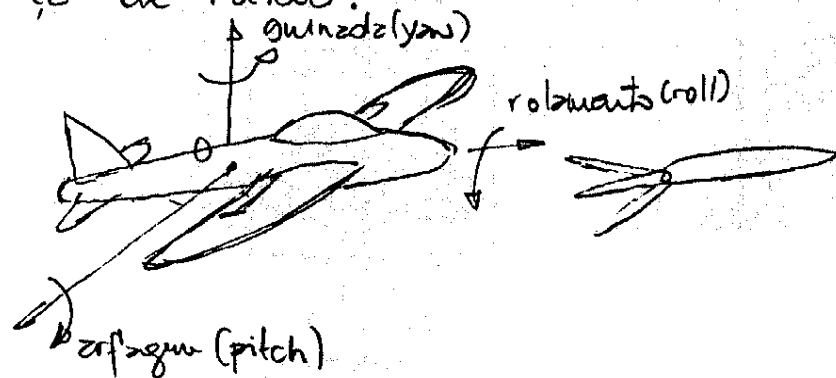
a. Planta e Ação de Controle

A primeira diferenciação pode ser entendida em termos dos níveis de energia envolvidos:

* Planta (ou processo) é um sistema dinâmico que envolve altos níveis de potência relativa

* Controle (ou controlador) é um sistema dinâmico que trabalha com níveis de sinal (informação), i.e., com baixa potência, e cuja ação é capaz de modificar a planta ou processo.

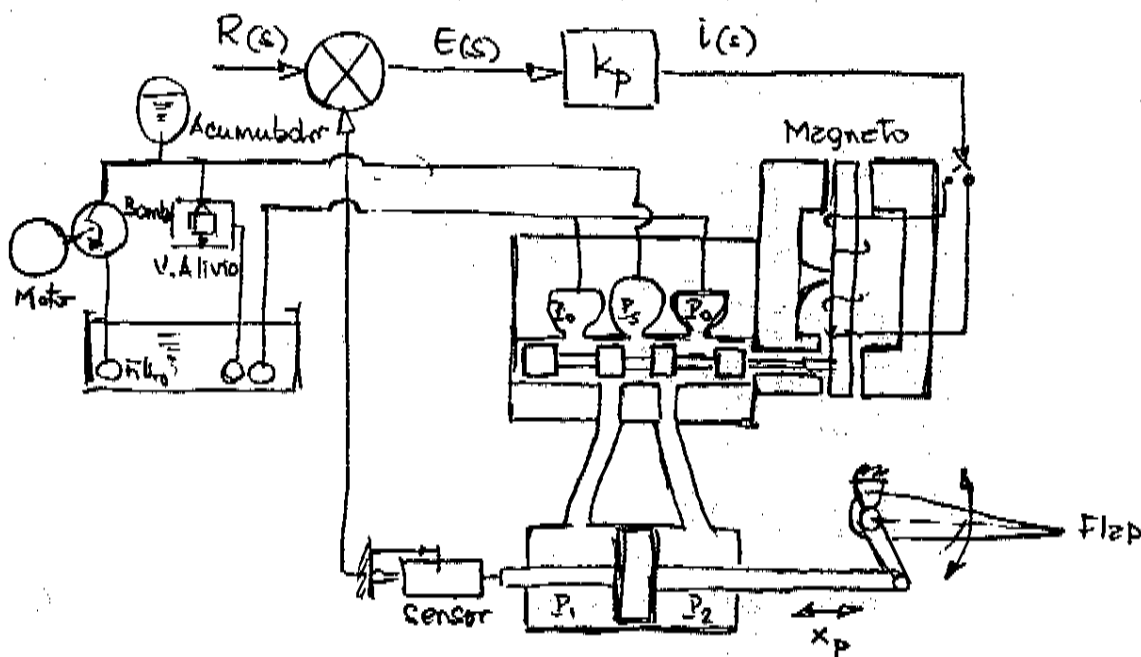
Exemplos: - um pequeno incremento (deslocamento) no ângulo do flap de um avião provoca mudança de rumo.



- item para o ângulo de leme de um navio
- um pequeno deslocamento na comporta de uma turbina hidráulica controla a potência gerada na usina

Em todos esses casos a ação de controle é um pequeno deslocamento (no flap, no leme ou no computador) realizada pelo controlador ou sistema de controle. Apesar de envolver potências pequenas comparadas à planta, o sistema de controle é muitas vezes um sistema dinâmico em si.

Exemplo: Para alterar o ângulo do flap usa-se um sistema de controle hidráulico, envolvendo bombas, reservatórios, filtros, válvulas, etc, para amplificar o sinal comandado pelo piloto na cabine.



A ação de controle é necessária para atingir qualquer ou todos os seguintes objetivos:

- Mudança do ponto de operação da planta

Exs.: - Manobras de um satélite

- Mudança de cruzeiro para aproximação de uma zeronave

- Aumentar ou diminuir a produção de uma planta química.

- Compensar as perturbações que sempre ocorrem nas plantas reais.

Exs.: - Efeitos cumulativos em altitude e órbita de satélites

- Rajadas de vento em zeronaves

- Mudança na qualidade das matérias primas processadas numa planta

- Estabilizar uma planta ou sistema naturalmente instável

Exs.: - Navio super-petrolero (não anda em balde)

- Avião com asa de enfilechamento negativo (melhora de manobrabilidade)

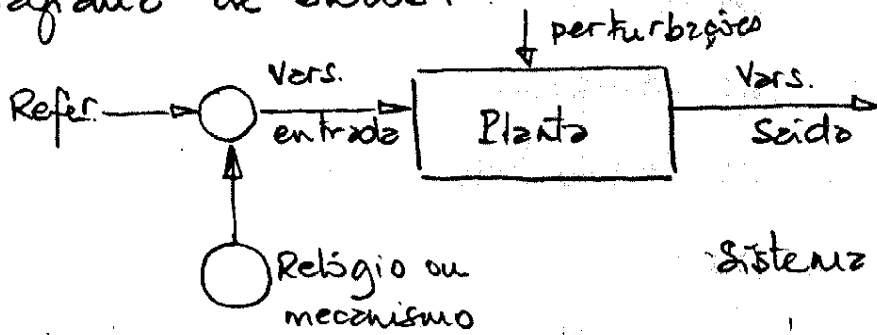
- Pêndulo Invertido

Os requisitos para gerar uma ação de controle sobre um sistema são:

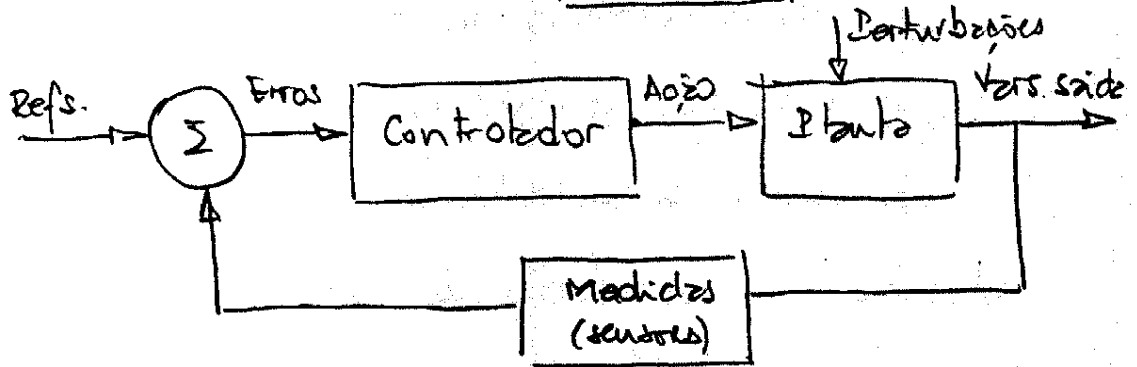
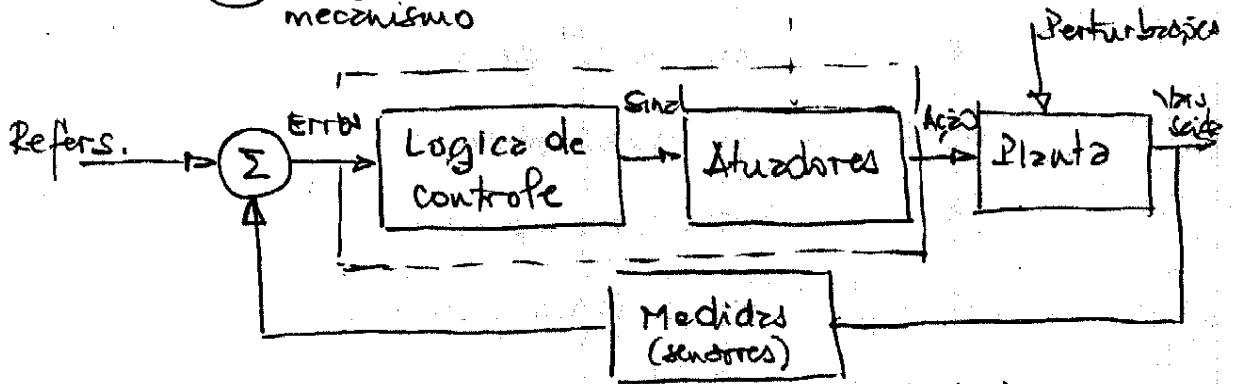
- Informações do erro, que, por sua vez, depende de:
 - * referência (input), variável ou não, que vem de fora do sistema
 - * medida da variável (ou variáveis) a ser comparada → instrumentação (ou sensores) para malha fechada ou tempo (ou evento) para malha aberta
- Estratégia ou lógica de controle, que define a maneira como o erro será transformado numa atuação de controle. É a parte "inteligente" do sistema. Exemplos: controladores PID, controladores "liga-desliga" (on-off), controladores "fuzzy" (regres), etc.
- Atuadores, que desenvolvem a ação de controle sobre a planta. Representam o "hardware" adicional sobre o sistema (músculos). Ex.: motores elétricos, atuadores hidráulicos, atuadores pneumáticos, mecanismos, etc.

Para representar uma planta controlada usa-se

Diagrama de Blocos:



Sistema em malha aberta



Exs. : - Serra para corte de metais

- Controle de Atitude de um Satélite

6. PROJETO DE UM CONTROLADOR

Embora não existam regras gerais, as seguintes fases devem ser completadas:

1) Definição dos requisitos desejados da planta controlada, para os quais existem vários critérios que serão discutidos ao longo do curso. Dependem do objetivo final da planta e da experiência acumulada e podem envolver combinações de, por exemplo:

- * desvios máximos permitidos no regime permanente
- * desvios máximos permitidos nos transitórios
- * velocidades, máxima e mínima, de correção dos desvios
- * efeitos transitórios indesejáveis
- * tempo máximo ou mínimo para correção
- * potência, máxima ou mínima, gasta para controle
- * custos de investimento e espaço

- 2) Sintetizar o controlador de modo que os requisitos sejam atendidos (técnicos e econômicos)
- 3) Verificar critérios associados: confiabilidade, manutenção, reposição de componentes
- 4) Verificar a robustez do projeto, i.e., a imunidade do sistema quanto a variações de parâmetros da planta, que sempre ocorrem devido ao ruído ou outros efeitos.

A verificação do projeto é, geralmente, feita na seguinte sequência:

- * Análise e simulação da planta controlada (sw)
- * Protótipo
- * Testes no sistema real (sintonia)

É importante notar que todos estes procedimentos são baseados, até se realizar testes no sistema definitivo, em análise e simulação, para os quais é indispensável se trabalhar com um modelo matemático da planta.

7. REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

A tarefa mais importante que o projetista de controle deve enfrentar é o desenvolvimento de um modelo matemático do processo de interesse (Bernard Friedland, Control Systems Design, McGraw Hill, 1988). Concordo com essa afirmação

O engenheiro de controle pode ter de tratar com subsistemas que se baseiam em princípios físicos que dependem de leis físicas totalmente diferentes (processos químicos, trocadores de calor, válvulas hidráulicas e pneumáticas, motores de combustão interna, etc, etc.)

Ex.: Avião - controle geral - interação aerodinâmica / estrutura
 Atuadores - em geral, hidráulicos
 Sensores - acelerômetros e giroscópios - mecânica corpos rígidos

Controle é multidisciplinar e, em geral, exige equipes multidisciplinares. O projetista de controle precisa de um modelo matemático que descreva o sistema. Conseguir modelos simples que representem bem o sistema em estado é uma obra de Engenharia.

Existem duas maneiras de representar ou modelar um sistema dinâmico:

- Domínio das frequências ou modelos de função de transferência
- Domínio do tempo ou representações por variáveis de estado

As técnicas baseadas em modelos descritos no domínio da frequência constituem a chamada Teoria de Controle Clássico, que corresponde à maior parte do curso. Por outro lado, as técnicas baseadas no domínio do tempo estão sob um chapéu dito Teoria de Controle Moderno. Após anos de polêmica a respeito dessas denominações um tanto esdrúxulas, as técnicas mais atuais reúnem as melhores características de cada uma das duas correntes, Clássico e Moderno (Ótimo, Robusto, etc). Na realidade, Controle Clássico recebeu esse nome apenas em função da

época em que ocorreu sua sistematização (década de 40), enquanto o desenvolvimento das técnicas do domínio do tempo só se deu na década de 60.

De qualquer forma, para o Engenheiro Mecânico é inevitável passar pelo domínio do tempo, pois as ferramentas de modelagem disponíveis para sistemas mecânicos são, via de regra, leis físicas temporais (leis de Newton, momentos, transferência de calor, etc.). Com isso, vamos caracterizar agora a idéia de variável de estado.

O estado de um sistema dinâmico é um conjunto de quantidades físicas cuja especificação determina completamente a evolução do sistema no tempo na ausência de excitação externa.

Dificuldade: as quantidades físicas específicas que definem o estado não são únicas. O número dessas variáveis de estado, ou a ordem do sistema, é única.

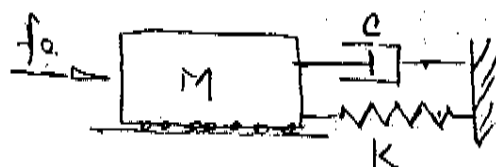
Como o comportamento de um sistema dinâmico é representado por conjunto de equações diferenciais (ordinárias ou parciais), o modelo matemático do sistema é constituído por esse conjunto de E.D. mais um conjunto de condições iniciais (E.I.) e de condições ini-

aisis e de contorno (EDDP).

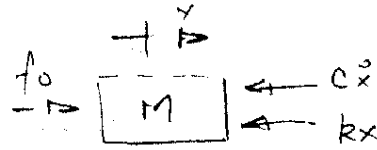
No vasto mundo, só iremos utilizar sistemas com parâmetros concentrados, que podem ser descritos por equações diferenciais ordinárias (mais condições iniciais convenientes). Já existem teorias para lidar com sistemas de parâmetros distribuídos (EDDP), como os que ocorrem em sistemas térmicos, ou com sistemas híbridos (EDDP + EDO), como os de estruturas flexíveis, porém isto ainda representa fronteira tecnológica.

Na abordagem por espaço de estado, todas as equações diferenciais do modelo são reduzidas a equações de primeira ordem. As variáveis dinâmicas que aparecem no sistema de equações de 1ª ordem são chamadas variáveis de estado. O número de equações de 1ª ordem define o ordem do sistema e serão necessárias tantas condições iniciais quantas são as variáveis de estado ou o ordem do sistema.

Exs.: 1) Sistema Massa-Mola-Amortecedor



Lei de Newton:



$$M\ddot{x} = f_0 - C\dot{x} - kx$$

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + kx = f_0$$

Representação em vars. estado:

- define-se $x = x_1$ (posição)

$$\frac{dx}{dt} = x_2 \text{ (velocidade)} \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$$

$$M\dot{x}_2 + Cx_2 + kx_1 = f_0$$

Então: $\dot{x}_1 = x_2$

$$\dot{x}_2 = -\frac{C}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1 + \frac{f_0}{M}$$

ou, em representação vetorial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -C/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_0/M \end{bmatrix}$$

Se admitirmos que f_0 é uma força de controle para posicionar a massa do sistema, escrevemos:

$$f_0 = u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -C/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u$$

$$\underline{\dot{x}} = A \underline{x}(t) + B u(t)$$

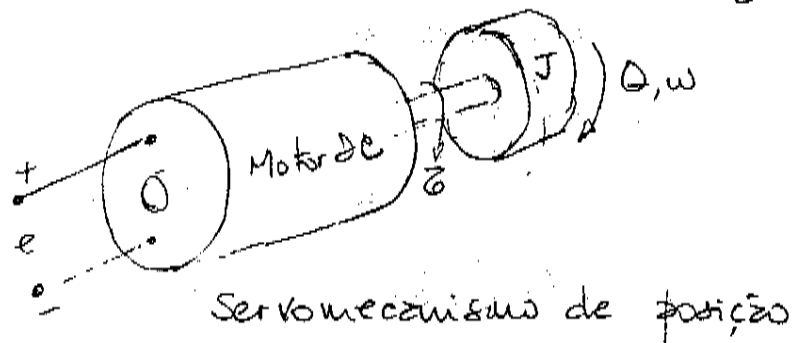
que é a representação usual no espaço de estado
 devem ser definidas 2 condições iniciais ($x_1(0)$ e $x_2(0)$),

por exemplo), para o problema ter sentido

13/10
-12

2) Motor elétrico com carga inercial

Sistema muito comum em controle: por exemplo, posicionar uma antena de recepção (carga).



O motor elétrico é um conversor de energia elétrica em energia mecânica que, em condições ideais, gera um torque no eixo de saída proporcional à corrente de entrada no motor e uma força contraeletromotriz proporcional à velocidade de rotação do eixo. Então:

$$\tau = k_1 i$$

$$v = k_2 \omega \quad (\text{emf})$$

A potência elétrica de entrada no motor é o produto da corrente pela força contraeletromotriz:

$$p_e = v \cdot i = k_2 \omega \tau / k_1$$

A potência mecânica de saída é dada pelo produto do torque pela velocidade angular:

$$\dot{\phi}_m = \omega \bar{\phi}$$

Então $p_e = \frac{k_2}{k_1} \dot{\phi}_m$ e a conversão de energia é 100% eficiente se $k_2 = k_1$. Como esse não é o caso $k_2 > k_1$, este parâmetro servirá para escolha do motor

Usando a lei de Ohm:

$$e - v = Ri$$

onde R é a resistência da armadura no motor.

Além disso, a variação do momento angular é a soma dos torques externos (TMA) atuando na carga e,

portanto:

$$J \frac{d\omega}{dt} = \bar{\tau}$$

onde J é o momento de inércia da carga em torno do eixo de rotação. Então:

$$J \frac{d\omega}{dt} = k_1 i - \frac{k_1 (e - v)}{R}$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = \frac{k_1 e}{R} - \frac{k_1 v}{R} = \frac{k_1 e}{R} - \frac{k_1 k_2 \omega}{R}$$

$$\boxed{\frac{d\omega}{dt} = -\frac{k_1 k_2 \omega}{JR} + \frac{k_1 e}{JR}}$$

A equação acima é uma equação de 1ª ordem na velocidade de rotação. Como estamos interessado na posição-

amento angular basta ver que

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

e completamos o sistema de equações de 2ª ordem

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = -\frac{k_1 k_2}{JR} \omega + \frac{k_1}{JR} e$$

e o modelo do sistema em variáveis de estado é:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k_1 k_2 / JR \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 / JR \end{bmatrix} u$$

ou seja $\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} u(t)$

Na sua forma mais geral, o sistema é não-linear e dependente do tempo. Cada uma das n variáveis de estado é descrita por uma equação diferencial

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r, t)$$

$$\dot{x}_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r, t)$$

ou

$$\dot{\underline{x}} = \frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t)$$

onde, a partir de agora, se abandona a notação para designar vetor. Se o sistema tiver mais de uma variável, o índice subscrito deverá diferenciar o vetor da variável e cada

Embora a maioria dos modelos que melhor descrevem processos físicos sejam não lineares, a quase totalidade dos métodos de análise e síntese de controladores está baseada em modelos lineares como os descritos nos exemplos:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

Nos exemplos, as matrizes A e B são matrizes de constantes e, nesse caso, os sistemas são ditos invariantes no tempo. A representação acima se justifica para os casos em que A e B variam com o tempo.

Note que A é sempre quadrada ($k \times k$), mas B não necessariamente é quadrada ($k \times l$). Em geral, $l < k$.

Definidas A e B se tem a representação da dinâmica do sistema mas ainda não se tem uma descrição das informações sobre o estado do sistema. As medidas realizadas são agrupadas em um vetor de saída $y(t)$ que contém todas as observações realizadas no instante t . Supondo que sejam m medidas (números):

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

deve-se construir um modelo de observações, relacionando as saídas dos sensores às variáveis de estado. Este

modelo é tão importante quanto o modelo dinâmico.

No caso linear:

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (1)$$

representa o modelo completo com $C(t)$, matriz $m \times k$, podendo ser variante no tempo, assim como $D(t)$, $m \times l$.

Em geral $C(t)$ é invariante no tempo e se faz $D=0$ resultando:

$$y(t) = Cx(t) \quad (2)$$

Este modelo simplificado reflete o fato de se admitir as ações de controle (entradas) conhecidas e reduzir y em (2) a $y - Du$ do modelo (1).

Em resumo, a representação de um sistema dinâmico no espaço de estado é, no caso linear:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{mod. dinâmico})$$

$$y = Cx \quad (\text{mod. observações})$$

Para integrar o modelo dinâmico no tempo é usual fazer uso da matriz de transição de estados. Vamos usar a ideia de matriz de transição para fazer a transformação do modelo em variáveis de estado para o modelo no domínio de frequência.

7.1. MATRIZ DE TRANSIÇÃO DE ESTADOS OU MATRIZ FUNDAMENTAL

Considere o sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

onde x é $n \times 1$ e u é $m \times 1$

Como é uma EDO, procuramos uma solução geral como a soma de uma solução particular com a solução da homogênea. Começamos com a homogênea:

$$\dot{x} = Ax$$

e a solução é escrita primeiramente como uma série infinita com coeficientes não determinados:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) = (I + C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_n t^n + \dots)x(0) \quad (1)$$

onde $\Phi(t)$ é a solução e $x(0)$ a condição inicial

Para determinar os coeficientes, substituímos (1) na equação homogênea:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(t)x(0) &= (C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + \dots + n C_n t^{n-1} + \dots)x(0) = \\ &= A \Phi(t)x(0) = (A + A C_1 t + A C_2 t^2 + \dots + A C_n t^n + \dots)x(0) \end{aligned}$$

Iguando os coeficientes:

$$C_1 = A$$

$$C_2 = \frac{1}{2} A C_1 = \frac{1}{2} A^2$$

$$C_3 = \frac{1}{3} A C_2 = \frac{1}{3 \cdot 2} A^3, \dots, C_n = \frac{1}{n!} A^n$$

Daí:

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots + \frac{1}{n!} A^n t^n + \dots \quad (2)$$

$\Phi(t) = e^{At}$ — Matriz de Transição de Estados

Propriedades:

$$I) \frac{d}{dt} \underline{\Phi}(t) = \frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A \quad (3)$$

$$\dot{\underline{\Phi}} = A \underline{\Phi}$$

$$II) x(t+\tau) = \underline{\Phi}(t) x(\tau) \quad (4)$$

$$x(\tau) = \underline{\Phi}(\tau) x(0) \quad (5)$$

$$x(t+\tau) = \underline{\Phi}(t) \underline{\Phi}(\tau) x(0) \quad (6)$$

$$\Rightarrow \underline{\Phi}(t+\tau) = \underline{\Phi}(t) \underline{\Phi}(\tau) \quad \text{ou} \quad e^{A(t+\tau)} = e^{At} \cdot e^{A\tau} \quad (7)$$

$$III) \text{ se } \tau = -t \Rightarrow \underline{\Phi}(0) = \underline{\Phi}(t) \underline{\Phi}(-t) = e^{A \cdot 0} = I \quad (8)$$

$$\underline{\Phi}(-t) = \underline{\Phi}^{-1}(t)$$

$$IV) \dot{\underline{\Phi}} = A \underline{\Phi} \text{ é a geratriz da solução com } \underline{\Phi}(0) = I$$

$$V) \underline{\Phi}(t) \underline{\Phi}(\tau) = \underline{\Phi}(\tau) \underline{\Phi}(t) \quad (9)$$

Consideremos agora a solução particular de

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B u$$

$$\text{Tentativa: } x_p(t) = \underline{\Phi}(t) \phi(t) = e^{At} \phi(t)$$

com $\phi(t)$ desconhecida e tal que $\phi(t) = 0$ para $t=0$

$$\dot{\underline{x}}_p = \left(\frac{d}{dt} \underline{\Phi}(t) \right) \phi(t) + \underline{\Phi}(t) \left(\frac{d}{dt} \phi(t) \right)$$

$$\dot{\underline{x}}_p = A \underline{\Phi}(t) \phi(t) + \underline{\Phi}(t) \frac{d}{dt} \phi(t) \quad (10)$$

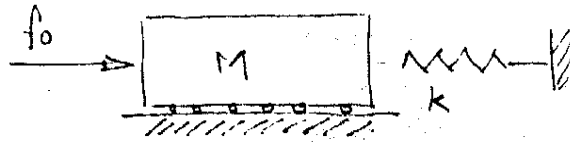
$$\text{Mas } \dot{\underline{x}}_p = A \underline{x}_p + B u \quad (11)$$

$$\text{De (10) e (11)} \Rightarrow \underline{\Phi}(t) \frac{d}{dt} \phi(t) = B u$$

$$\frac{d}{dt} \phi(t) = \underline{\Phi}^{-1}(t) B u$$

$$\Rightarrow \phi(t) = \int_0^t \underline{\Phi}^{-1}(\tau) B u(\tau) d\tau \quad (12)$$

um sistema massa-mola (oscilador harmônico) forçado



como já deduzido

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

$$\text{Então : } \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} ; \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\Delta^2 = \begin{bmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{bmatrix} = -\omega^2 \mathbf{I} ; \Delta^3 = -\omega^2 \Delta ; \Delta^4 = +\omega^4 \mathbf{I}, \dots$$

$$\text{e por indução } \Delta^k = (-1)^{k/2} \omega^k \mathbf{I} ; \Delta^{k+1} = (-1)^{k/2} \omega^k \Delta, k \text{ par}$$

$$e^{\Delta(t-\tau)} = \Phi(t, \tau) = \mathbf{I} + (t-\tau) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\omega^2(t-\tau)^2}{2!} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \dots$$

$$\Phi(t, \tau) = \left[\begin{array}{c|c} 1 - \frac{\omega^2(t-\tau)^2}{2!} + \frac{\omega^4(t-\tau)^4}{4!} - \frac{\omega^6(t-\tau)^6}{6!} + \dots & (t-\tau) - \frac{\omega^2(t-\tau)^3}{3!} + \frac{\omega^4(t-\tau)^5}{5!} - \dots \\ \hline -\omega^2(t-\tau) + \frac{\omega^4(t-\tau)^3}{3!} - \frac{\omega^6(t-\tau)^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{\omega^2(t-\tau)}{2!} + \frac{\omega^4(t-\tau)^4}{4!} - \dots \end{array} \right]$$

$$\Phi(t, \tau) = \begin{bmatrix} \cos \omega(t-\tau) & \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-\tau) \\ -\omega \sin \omega(t-\tau) & \cos \omega(t-\tau) \end{bmatrix}$$

Admitindo que a condição inicial é $x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e

que $u = f_0 = M$ para $t > 0$, a resposta do sistema será dada por:

$$x(t) = \Phi(t,0) x(0) + \int_0^t \Phi(t,\lambda) B u(\lambda) d\lambda$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \cos \omega(t-\lambda) & \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-\lambda) \\ -\omega \sin \omega(t-\lambda) & \cos \omega(t-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} d\lambda$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} -\cos \omega t \\ \omega \sin \omega t \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-\lambda) \\ \cos \omega(t-\lambda) \end{bmatrix} d\lambda$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} -\cos \omega t \\ \omega \sin \omega t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +\frac{1}{\omega^2} \cos \omega(t-\lambda) \\ +\omega \sin \omega(t-\lambda) \end{bmatrix} \Big|_0^t = \begin{bmatrix} -\cos \omega t \\ \omega \sin \omega t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^2} \cos 0 \\ \omega \sin 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^2} \cos \omega t \\ \omega \sin \omega t \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} -\left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right) \cos \omega t + \frac{1}{\omega^2} \\ 2\omega \sin \omega t \end{bmatrix}$$

Se o soido medido for apenas a posição da massa

$$y = C x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = -\left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right) \cos \omega t + \frac{1}{\omega^2}$$

As soluções acima poderiam facilmente (?) ter sido geradas por Transformadas de Laplace. Embora exista um espaço mais adiante para relembraer as principais propriedades das T.L., vamos partir de:

$$\mathcal{L} [A x(t)] = A x(s)$$

e aplicar ao sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A \text{ e } B \text{ constantes}$$

Então $sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$

$$(sI - A)X(s) = x(0) + BU(s)$$

Resolvendo para $X(s)$

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (*)$$

Quando aplicada a uma matriz de funções do tempo, é ainda possível verificar que:

$$\mathcal{L}[e^{At}] = (sI - A)^{-1}$$

Logo, a matriz de transição do sistema tem T.L.

$$\phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (\text{resolvente ou matriz característica})$$

Usando a transformação inversa, recupera-se a matriz de transição $\phi(t)$

Exemplo 4) do sistema massa-mola

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\omega^2 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \frac{1}{s^2 + \omega^2} \\ \frac{-\omega^2}{s^2 + \omega^2} & \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix}$$

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

7.2. FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

P. 205f

No Controle clássico, como já mencionado, o foco está centrado na relação entre a saída $y(t)$ e a entrada (controle) $u(t)$. Para efeito de análise entrada-saída é comum não se considerar condições iniciais que são admitidas todas nulas. Portanto a T.Laplace da equação de estado (*) do item anterior fica:

$$x(s) = (sI - A)^{-1} B u(s)$$

A saída é definida por $y(t) = C x(t)$ donde

$$y(s) = C x(s)$$

e portanto: $y(s) = C(sI - A)^{-1} B u(s)$

A matriz

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

relaciona a T.L da saída com a T.L da entrada.

$H(s)$ é chamada matriz de FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA.

A transformada inversa leva a outra matriz

$$H(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = C e^{At} B$$

$H(t)$ é a matriz resposta ao impulso.

Com isso espera-se ter tornado claras as maneiras de passar de um para outro lado, tempo para frequência e vice-versa, de variáveis de estado para frequências e vice-versa. Uma última observação, que será retomado

$$sI - A = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1k} \\ -a_{21} & s - a_{22} & & -a_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{k1} & -a_{k2} & & s - a_{kk} \end{bmatrix}$$

mais adiante se refere a matriz $(sI - A)^{-1}$. De fato

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$$

Pode-se verificar que no cálculo do determinante um dos termos será o produto dos elementos da diagonal

$$(s - a_{11})(s - a_{22}) \dots (s - a_{kk}) = s^k + c_1 s^{k-1} + \dots + c_k$$

que é um polinômio de grau k com coeficiente 1 para s^k . Os termos fora da diagonal também entram no determinante, mas nenhum com grau tão alto quanto k . Pode-se então escrever:

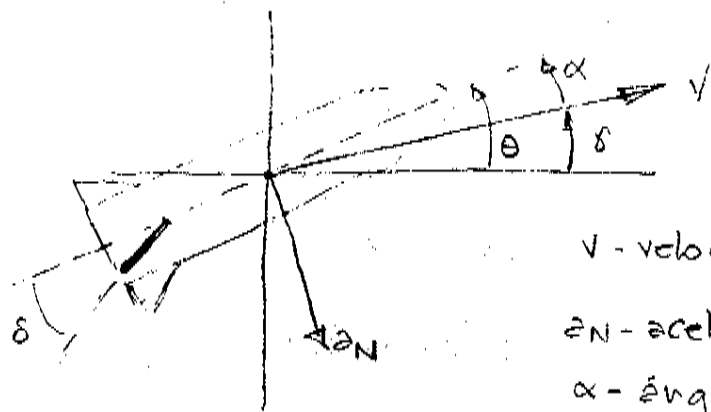
$$|sI - A| = s^k + z_1 s^{k-1} + \dots + z_k$$

conhecido como **POLINÔMIO CARACTERÍSTICO DA MATRIZ A** , que desempenha papel fundamental no comportamento dinâmico do sistema. As raízes deste polinômio são chamados **POLOS** ou **AUTOVALORES** ou **RAÍZES CARACTERÍSTICAS** do sistema. O numerador $\text{adj}(sI - A)$ não pode ter ordem maior que $k-1$, como será visto. Com isso, a **FT** (transferência) é uma função racional de s com numerador de ordem $\leq k-1$ e denominador de ordem k .

Exemplo: Dinâmica de um míssil

Apesar de não nutrir nenhuma simpatia pela aplicação, o exemplo do míssil é muito interessante para

ilustrar os conceitos desenvolvidos,



- V - velocidade do míssil
- a_N - aceleração normal
- α - ângulo de ataque
- δ - ângulo de trajetória
- θ - ângulo de pitch (arfi)

Admitindo que a trajetória se dá no plano vertical, a dinâmica de pitch (arfiagem) é dada por (Ford, 87).

$$\dot{\alpha} = \frac{z_\alpha}{V} \alpha + q + \frac{z_\delta}{V} \delta$$

$$\dot{q} = M_\alpha \alpha - M_q q + M_\delta \delta$$

onde δ é a deflexão de superfície de controle

q é a velocidade em pitch

$z_\alpha, M_\alpha, z_\delta, M_\delta$ são as derivadas aerodinâmicas

As leis de arfiagem de um míssil são usualmente expressas em termos das componentes da aceleração normal do veículo. A saída de interesse é então a_N

$$a_N = -V \dot{\delta}$$

onde δ é o ângulo de trajetória de figura

$$\delta = \theta + \alpha$$

$$\dot{\delta} = \dot{\theta} + \dot{\alpha} = q + \dot{\alpha}$$

$$z_N = -\sqrt{g} = -\sqrt{g} + 1k = -\sqrt{g} + 1 \left(\frac{z_\alpha}{V} \alpha + \dot{\gamma} + \frac{z_\delta}{V} \delta \right)$$

$$z_N = z_\alpha \alpha + z_\delta \delta$$

Define-se, então o estado x , o controle u e a saída y :

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad u = \delta \quad y = z_N$$

Representações $\dot{x} = Ax + Bu$

$$y = Cx + Du$$

$$A = \begin{bmatrix} z_\alpha/V & 1 \\ M_\alpha & M_\gamma \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} z_\delta/V \\ M_\delta \end{bmatrix}$$

$$C = [z_\beta \quad 0] \quad D = [z_0]$$

Função de Transferência ($u = \delta \rightarrow y = z_N$)

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$H(s) = \frac{z_\delta (s^2 \cdot M_\gamma s - M_\alpha) + z_\alpha M_\delta}{s^2 - (M_\gamma + \frac{z_\alpha}{V})s + \frac{z_\alpha}{V} M_\gamma - M_\alpha}$$

Num míssil típico, $z_\delta, z_\alpha, M_\alpha, M_\delta$ são todos negativos e com isso, o coeficiente de s^2 no numerador é negativo. Por outro lado, o coeficiente $z_\alpha M_\delta - z_\delta M_\alpha$ é tipicamente positivo \Rightarrow numerador de $H(s)$ tem uma raiz positiva (ou um zero positivo) no semiplano direito do plano complexo \Rightarrow SISTEMA DE FASE NÃO-MÍNIMA, que exige grandes cuidados no projeto do controlador.

O aspecto importante neste exemplo é que apesar de termos duas variáveis de estado na descrição da dinâmica o sistema de malha fechada é de uma única entrada (u) e uma única saída (y), caracterizando os sistemas SISO (single input - single output) que estudaremos na sequência.

8. TRANSFORMADA DE LAPLACE : UMA BREVE REVISÃO

As vantagens apresentadas pelo uso da T.L. no estudo da Teoria de Controle podem ser resumidas assim:

- maneira simples de resolver E.D. lineares
- converter funções complicadas como as senoidais em funções algébricas da variável complexa s .
- diferenciação e integração são substituídas por operações algébricas no plano complexo.
- permitir o uso de técnicas gráficas para previsão de desempenho sem ter que resolver o sistema de equações lineares que descrevem a dinâmica.

Para lembrar alguns conceitos das T.L's, definiremos a variável complexa

$$s = \sigma + j\omega$$

e a função complexa $f(s)$

$$F(s) = F_x + j F_y$$

F_x, F_y - reais,

O módulo de $F(s)$ é $|F(s)| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ e o ângulo θ , medido no sentido anti-horário é dado por:

$$\theta = \arctg\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$

Uma função complexa $G(s)$ é analítica numa região se $G(s)$ e todas as suas derivadas em relação a s existem nessa região.

$$\frac{d}{ds} G(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{G(s+\Delta s) - G(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta s}$$

Como $\Delta s = \Delta \sigma + j \Delta \omega$, Δs vai para zero ao longo de infinitas curvas. Para $\Delta s = \Delta \sigma$ (// eixo real)

$$\frac{d}{ds} G(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta G_x}{\Delta \sigma} + j \frac{\Delta G_y}{\Delta \sigma} \right) = \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial G_y}{\partial \sigma}$$

Para $\Delta s = j \Delta \omega$ (// eixo imaginário)

$$\frac{d}{ds} G(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\partial G_x}{j \Delta \omega} + j \frac{\partial G_y}{j \Delta \omega} \right) = -j \frac{\partial G_x}{\partial \omega} + \frac{\partial G_y}{\partial \omega}$$

Para que os valores das derivadas sejam iguais é necessário que:

$$\boxed{\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} \quad \underline{\underline{e}} \quad \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = - \frac{\partial G_x}{\partial \omega}}$$

Condições de Cauchy-Riemann

Se uma função $G(s)$ satisfizer as condições de Cauchy-Riemann, $G(s)$ é analítica.

$$\text{Ex. } G(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow G(\sigma+j\omega) = \frac{1}{\sigma+j\omega+1} = G_x + jG_y$$

$$G_x = \frac{\sigma+1}{(\sigma+1)^2 + \omega^2} \quad ; \quad G_y = \frac{-\omega}{(\sigma+1)^2 + \omega^2}$$

G_x e G_y existem em todo plano menos em $s=-1$, onde $\sigma=-1$ e $\omega=0$. Por outro lado:

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} = \frac{\omega^2 - (\sigma+1)^2}{[(\sigma+1)^2 + \omega^2]^2} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega}$$

$$\frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = - \frac{\partial G_x}{\partial \omega} = \frac{2\omega(\sigma+1)}{[(\sigma+1)^2 + \omega^2]^2}$$

e, com isso, $G(s) = \frac{1}{s+1}$ é analítica em todo plano menos para $s=-1$.

$$\text{Também } \frac{d}{ds} G(s) = \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial G_y}{\partial \omega} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} - j \frac{\partial G_x}{\partial \omega} = - \frac{1}{(\sigma+j\omega+1)^2} = - \frac{1}{(s+1)^2}$$

que poderia ter sido obtida pela derivação direta de

$$\frac{1}{s+1} \text{ em relação a } s. \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+1} \right) = - \frac{1}{(s+1)^2}$$

Os pontos onde as derivadas de $G(s)$ e a própria $G(s)$ tendem para infinito são pontos singulares, chamados POLOS de $G(s)$

Se $G(s) \rightarrow \infty$ quando $s \rightarrow -p$ e se a função $(s+p)^n G(s)$ tem valor finito não nulo em $s = -p$, então $s = -p$ é um polo de ordem n ou de multiplicidade n .

Pontos onde $G(s) = 0$ são chamados ZEROS da função.

Exemplo:
$$G(s) = \frac{k (s+2)(s+10)}{s(s+1)(s+5)(s+15)^2}$$

ZEROS : $s = -2 ; s = -10$

POLOS : $s = 0 ; s = -1 ; s = -5 ; s = -15$ (multiplicidade 2)

Note ainda que para $s \rightarrow \infty$, $G(s) = \frac{k}{s^3} \rightarrow 0$ e se diz que ∞ é um zero de ordem 3 para esta função.

Com estes conceitos pode-se definir o transformado de Laplace de $f(t)$, $f(t) = 0$ para $t < 0$, por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

e o transformado Inverso

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Limitações:

a- $f(t)$ é localmente contínua ($0 \leq t_1 \leq t \leq t_2$)

b- $f(t)$ é de ordem exponencial ($e^{-at} |f(t)|$ existe)

O Laplace é um operador linear sobre $f(t)$

$$a. \mathcal{L}[A f(t)] = A \mathcal{L}[f(t)], \quad A \text{ constante}$$

$$b. \mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

e existem várias propriedades que podem ser deduzidas a partir da definição.

Em particular são de grande interesse os Teoremas do Valor Inicial e do Valor Final que podem ser obtidos a partir da regra de diferenciação dos T.L.:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right] = s^2 F(s) - s f(0) - \dot{f}(0)$$

⋮

Diz o Teorema do Valor Final que se $f(t)$ e $df(t)/dt$ tem T.L. e se $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existe então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Este Teorema é importante para estabelecer o comportamento em regime permanente de sistemas descritos por $f(t)$.

Exemplo: $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s(s+1)}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{s(s+1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s+1} = 1$$

O Teorema do Valor Inicial estabelece que se $f(t)$ e $\frac{d}{dt} f(t)$ são Laplace transformáveis e se $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ existe, então:

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Finalmente, quando o problema é de integração:

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s}$$

desde que $f(t)$ seja de ordem exponencial.

8.1. TRANSFORMAÇÃO INVERSA E EXPANSÃO EM FRAÇÕES

PARCIAIS

$$\mathcal{L}^{-1} [F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (t > 0)$$

A importância da transformação inversa em Teoria de Controle vem da análise de funções de transferência,

usualmente expressa por: $F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$

Em geral, o grau de $B(s)$ é menor que o de $A(s)$

Se $f(s)$ pode ser quebrada em componentes:

$$f(s) = f_1(s) + f_2(s) + \dots + f_n(s)$$

então $\mathcal{L}^{-1} [f(s)] = \mathcal{L}^{-1} [f_1(s)] + \dots + \mathcal{L}^{-1} [f_n(s)] = f_1(t) + \dots + f_n(t)$

Com isso, $F(s)$ é obtida de maneira única exceto possivelmente nos polos onde a $f(t)$ é descontínua.

O interesse principal na Transformada Inversa e expansão em frações parciais reside na solução de E.D. lineares.

Exemplo: Achar a solução de:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 3 \quad ; \quad CI: x(0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$\mathcal{L}[\ddot{x}] = s^2 X(s) \quad ; \quad \mathcal{L}[2\dot{x}] = 2s X(s) \quad ; \quad \mathcal{L}[5x] = 5X(s)$$

$$\mathcal{L}[3] = 3/s \quad \text{com as condições iniciais acima.}$$

$$s^2 X(s) + 2s X(s) + 5X(s) = \frac{3}{s}$$

$$X(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

Agora se a expansão em frações parciais envolve apenas polos distintos como é o caso acima

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{k(s+z_1) \dots (s+z_m)}{(s+p_1) \dots (s+p_n)} \quad (m < n)$$

então $X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \dots + \frac{a_n}{s+p_n}$ onde as a_k , $k=1, \dots, n$ são os resíduos do polo em $s = -p_k$, e:

$$a_k = \left[(s+p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k}$$

No nosso caso: $X(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2 s + a_3}{s^2 + 2s + 5} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2 s + a_3}{(s+1)^2 + 2^2}$

$$a_1 = \left[s \cdot \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)} \right]_{s=0} = \frac{3}{5}$$

$$X(s) = \frac{3}{5s} + \frac{a_2 s + a_3}{(s+1)^2 + 2^2} = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

$$\frac{3(s^2 + 2s + 5) + 5s(e_2s + e_3)}{5s(s^2 + 2s + 5)} = \frac{15}{5s(s^2 + 2s + 5)}$$

$$(3 + 5e_2)s^2 + (6 + 5e_3)s + 15 = 15$$

$$3 + 5e_2 = 0 \Rightarrow e_2 = -3/5$$

$$6 + 5e_3 = 0 \Rightarrow e_3 = -6/5$$

$$e \quad X(s) = \frac{3}{5s} - \frac{3}{5} \frac{s+2}{s^2 + 2s + 5} = \frac{3}{5} \frac{1}{s} - \frac{3}{10} \frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} = \frac{3}{5} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = 1 \quad ; \quad \mathcal{F}^{-1} \left[\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} \right] = e^{-t} \sin 2t$$

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} \right] = e^{-t} \cos 2t$$

Com isso

$$X(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{10} e^{-t} \sin 2t - \frac{3}{5} e^{-t} \cos 2t$$

Transformadas de Laplace podem ser obtidas em tabelas. Vamos listar apenas as mais importantes para nosso estudo:

a. Função exponencial

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-\alpha t} & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)] = \frac{A}{s+\alpha}$$

b. Função degrau unitário

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{s}$$

c. Função rampa

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2}$$

d. Função seno

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \text{sen } \omega t & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

e. Função cosseno

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \text{cos } \omega t & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

f. "Função" impulso

$$f(t) = \begin{cases} \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t_0} & 0 < t < t_0 \\ 0 & t < 0, t > t_0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = 1$$

9. AÇÕES BÁSICAS DE CONTROLE

Como já colocado, um controlador deve ser capaz de comparar o valor de saída da planta com uma referência de entrada (valor desejado, variável ou não), determinar o erro e , a partir desse erro, determinar um sinal de controle para reduzir o erro a zero ou a um valor convenientemente pequeno (zona morta).

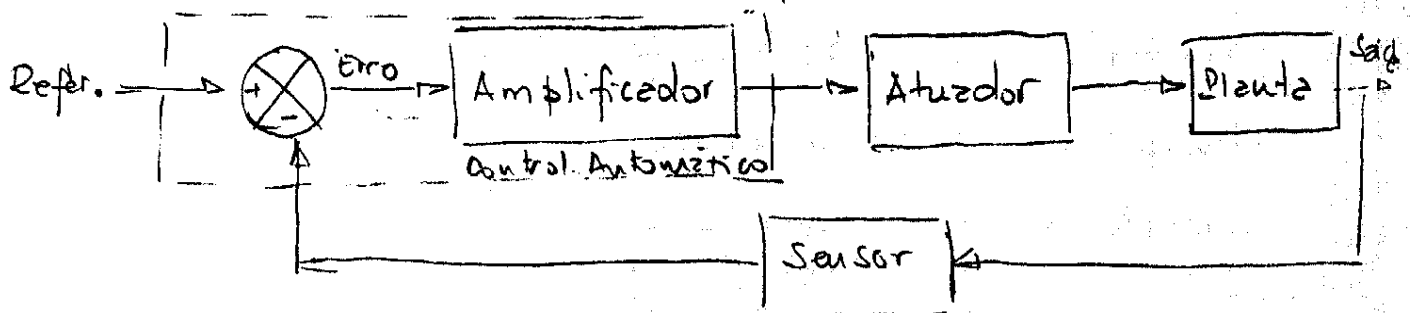
Essa ação básica é usualmente chamada ESTRATÉGIA

Para sistemas SISO de uso industrial é comum se levar em mão de uma das seguintes estratégias:

1. Controladores "liga-desliga" ("on-off")
2. Controladores proporcionais (P)
3. Controladores integrais (I)
4. Controladores proporcionais-integrais (PI)
5. Controladores proporcionais-derivativos (PD)
6. Controladores proporcionais-integrais-derivativos (PID)

A forma de implementação de um controlador varia de caso para caso. Na grande maioria dos casos atuais, a implementação é eletrônica, embora existam aplicações específicas que exijam emprego de lógicas pneumática ou hidráulica, para garantir imunidade à radiação eletromagnética ou para poder trabalhar a altas temperaturas.

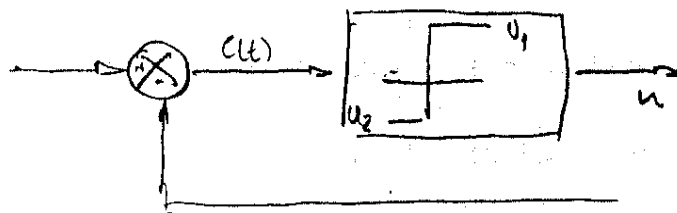
Tomemos uma malha padrão:



9.1. Controlador liga-desliga (on-off)

Relativamente simples e baratos, designam controladores em que a variável de controle $u(t)$ só pode assumir dois valores, dependentes do erro $e(t)$

$$u(t) = \begin{cases} U_1 & e(t) > 0 \\ U_2 & e(t) < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(NÃO LINEAR)} \\ \text{não tem TL} \end{matrix}$$



Um exemplo típico é controle de processos por

válvulas solenoide

$$C dh = (q_i - q_o) dt$$

C - capacitância = $\frac{\text{var. em } q_i}{\text{var. altura}}$

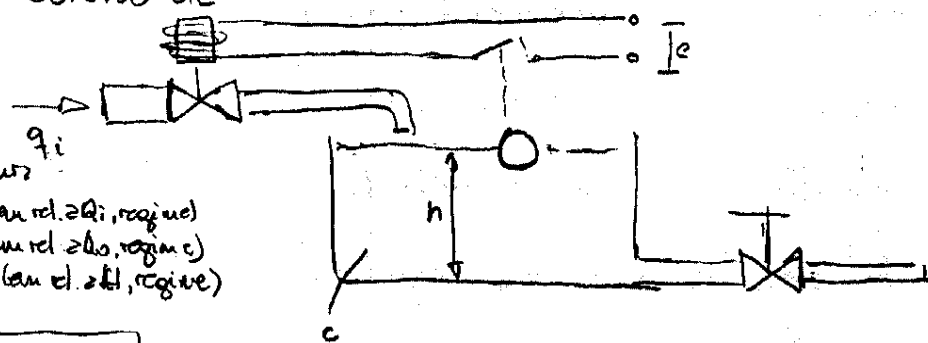
q_i - var. vazão de entrada (em rel. a q_i , regime)

q_o - " " " saída (em rel. a q_o , regime)

h - var. altura do nível (em rel. a h , regime)

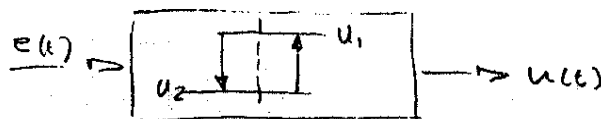
$$q_o = \frac{h}{R} \quad (\text{linearizado})$$

$$RC \frac{dh}{dt} + h = R q_i \Rightarrow \left[h + \frac{1}{RC} h = \frac{1}{R} q_i \right]$$



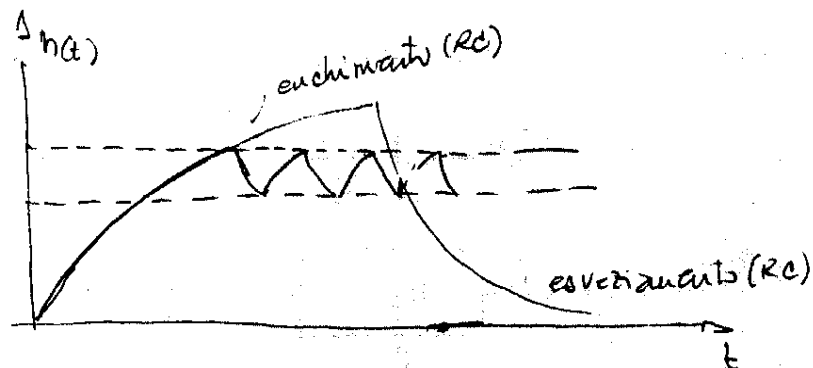
Um controle estremo seguindo a lei acima é

impraticável: o sistema ficaria abrindo e fechando o tempo todo. Introduz-se, então, uma zona morta no controlador



$$u(t) = \begin{cases} U_1 & e(t) > d \\ U_2 & -e(t) < d \end{cases} \quad \text{ou } |e(t)| > d$$

Para o sistema de controle de nível mantendo o objetivo é manter o nível do tanque entre valores máximo e mínimo usando controle "on-off" com zona morta



Note que quanto maior for a largura da zona morta menor será o número de chaveamentos, com consequente diminuição no desgaste dos elementos. Por outro lado, perde-se em precisão (se se controla em média).

0.2. CONTROLADOR PROPORCIONAL (P)

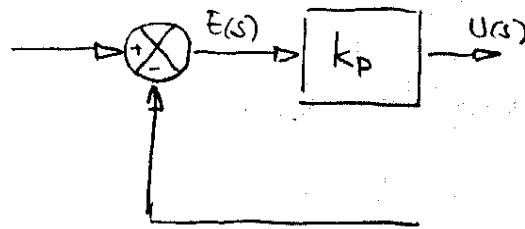
Um controlador proporcional gera uma ação de controle proporcional ao erro medido:

$$u(t) = k_p e(t)$$

Em variáveis de frequência, a F.T. do controlador proporcional é:

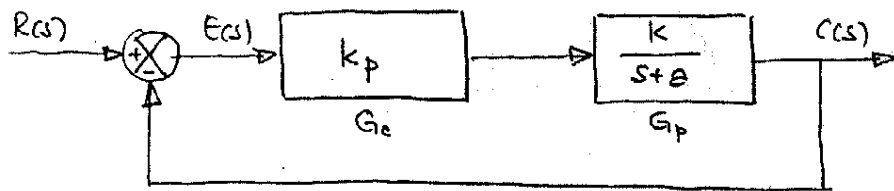
$$\frac{U(s)}{E(s)} = k_p$$

onde k_p é dito GANHO PROPORCIONAL



Consideremos um controlador proporcional aplicado a uma planta de 1ª ordem (apenas um polo, resp. exponencial)

$$G_p(s) = \frac{k}{(s+a)} \quad k, a > 0 \text{ são parâmetros da planta}$$



$$\begin{aligned} E &= R - C \\ C &= G_c G_p E \\ \frac{C}{G_c G_p} &= R - C \\ R &= \left(1 + \frac{1}{G_p G_c}\right) C \\ C &= \frac{G_p G_c}{1 + G_p G_c} R \end{aligned}$$

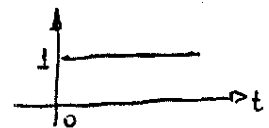
$$C(s) = \frac{G_c G_p}{1 + G_c G_p} R(s) = \frac{k_p k / (s+a)}{1 + k_p k / (s+a)} R(s)$$

$$C(s) = \left(\frac{k_p k}{k_p k + (s+a)} \right) R(s) \quad \text{I.T. malha fechada}$$

$$E(s) = R(s) - C(s) = \left(1 - \frac{k_p k}{k_p k + (s+a)} \right) R(s)$$

Para uma entrada em degrau unitário $R(s) = 1/s$

$$E(s) = \left(1 - \frac{k_p k}{k_p k + (s+a)} \right) \frac{1}{s}$$

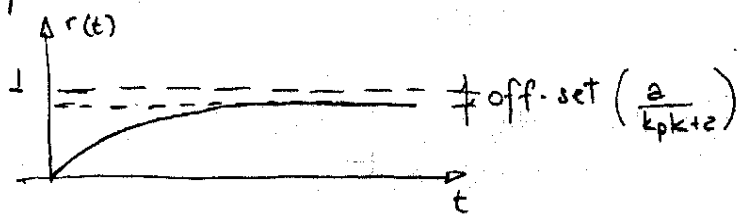


Pelo Teorema do Valor Final: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

Portanto $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(1 - \frac{k_p k}{k_p k + (k+2)s} \right) \cdot \frac{1}{s}$

$$e(\infty) = 1 - \frac{k_p k}{k_p k + a} = \frac{k_p k + a - k_p k}{k_p k + a} = \frac{a}{k_p k + a}$$

Então $e(\infty) \rightarrow 0$ só se $k_p \rightarrow \infty$, fisicamente impossível, e sempre existe erro em regime permanente para valores finitos de k_p .



Com isto, quase nunca se usa um controlador apenas proporcional.

9.3. CONTROLADOR INTEGRAL (I)

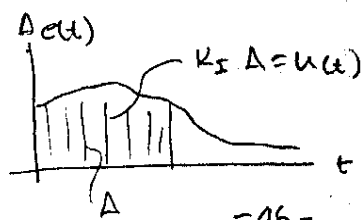
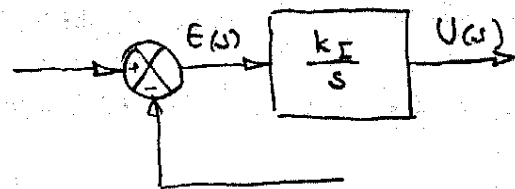
Nesse tipo de controlador a variável de controle é calculada como a integral do erro ao longo do tempo

$$u(t) = k_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

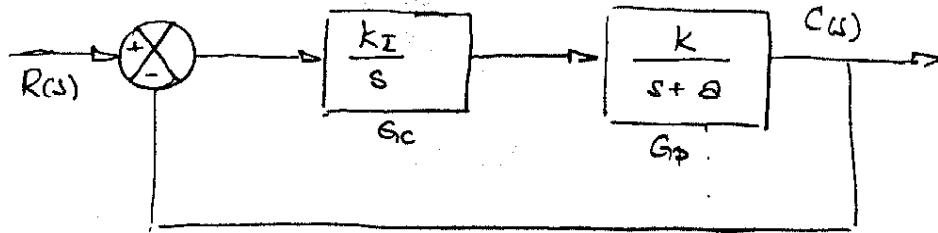
onde k_I é uma constante dita GANHO INTEGRAL.

Em variáveis de frequência, a FT. do controlador é

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{k_I}{s}$$



Um controlador integral atua sobre a história passada do erro. Da mesma forma que para o controlador P, vamos ver o efeito sobre uma planta de 1ª ordem.



$$C(s) = \frac{G_p G_c}{1 + G_p G_c} R(s) = \frac{k_I k / s(s+a)}{1 + \frac{k_I k}{s(s+a)}} R(s)$$

$$C(s) = \left(\frac{k_I k}{s(s+a) + k_I k} \right) R(s) \quad \text{F.T. Malha Fechada}$$

$$E(s) = R(s) - C(s) = \left[1 - \frac{k_I k}{s(s+a) + k_I k} \right] R(s)$$

Para $R(s) = 1/s$

$$E(s) = \left[1 - \frac{k_I k}{s(s+a) + k_I k} \right] \cdot \frac{1}{s}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left[1 - \frac{k_I k}{s(s+a) + k_I k} \right] \cdot \frac{1}{s} = [1 - 1] = 0$$

O controlador I elimina o erro em regime permanente. Em função disso, a ação integral é também chamada ação de "reset" ou reinicialização. A desvantagem é que atua sobre o passado do sistema.

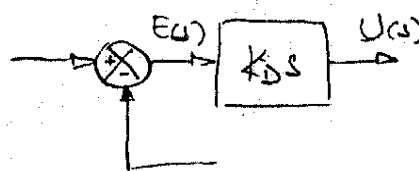
9.4. CONTROLADOR DERIVATIVO (D)

Com o controlador derivativo pretende-se introduzir um caráter antecipativo à ação de controle, trabalhando com a derivada do erro.

$$u(t) = k_d \frac{de(t)}{dt}$$

onde k_d é chamado GANHO DERIVATIVO. Em frequência

$$\frac{U(s)}{E(s)} = k_d s$$



Um controlador derivativo nunca é usado isoladamente pois atua somente nos transitórios. Seguindo o mesma metodologia para a planta de 1ª ordem:

$$C(s) = \frac{G_p G_c}{1 + G_p G_c} R(s) = \frac{k_d k s / (s + a)}{1 + k_d k s / (s + a)} R(s) = \frac{k_d k s}{(1 + k_d k) s + a} R(s)$$

$$E(s) = C(s) \cdot R(s) = \left[1 - \frac{k_d k s}{(1 + k_d k) s + a} \right] R(s)$$

Para $R(s) = \frac{1}{s}$:
$$E(s) = \left[1 - \frac{k_d k s}{(1 + k_d k) s + a} \right] \cdot \frac{1}{s}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[1 - \frac{k_d k s}{(1 + k_d k) s + a} \right] \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[1 - \frac{k_d k}{(1 + k_d k) + \frac{a}{s}} \right]$$

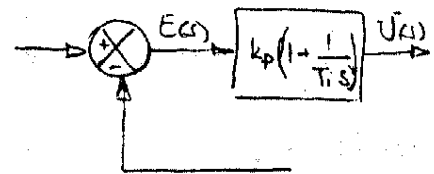
$$e(\infty) = 1$$

4.5. CONTROLADOR PROPORCIONAL- INTEGRAL (PI)

Nesse caso : $u(t) = k_p e(t) + \frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$

onde k_p é o GANHO PROPORCIONAL e T_i é o TEMPO INTEGRAL com k_p e T_i ajustáveis. Em frequências

$$U(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) E(s)$$



Aplicando para um sistema de 1ª ordem:

$$C(s) = \frac{G_c G_p}{1 + G_p G_c} R(s) = \frac{\frac{k_p(1+T_i s)}{T_i s} \cdot \frac{k}{s+a}}{1 + \frac{k_p(1+T_i s)}{T_i s} \cdot \frac{k}{s+a}} R(s)$$

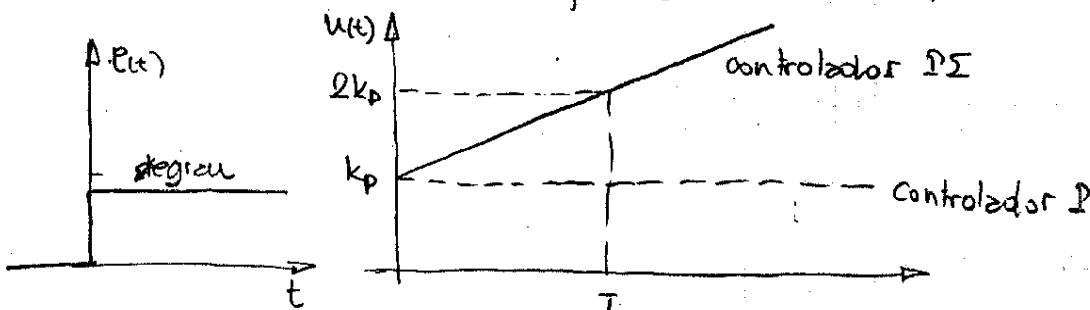
$$C(s) = \frac{k k_p (1+T_i s)}{T_i s(s+a) + k k_p (1+T_i s)} R(s) \Rightarrow E(s) = \left[1 - \frac{k k_p (1+T_i s)}{T_i s(s+a) + k k_p (1+T_i s)} \right] R(s)$$

Para $R(s) = \frac{1}{s}$ (degrau): $E(s) = \left[1 - \frac{k \cdot k_p (1+T_i s)}{T_i s(s+a) + k k_p (1+T_i s)} \right] \cdot \frac{1}{s}$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[1 - \frac{k k_p (1+T_i s)}{T_i s^2 + T_i(a+k k_p)s + k k_p} \right] \cdot \frac{1}{s} = \left[1 - \frac{k k_p}{k k_p} \right] = 0$$

Portanto, o erro em regime $\rightarrow 0$ com um controlador

PI atuando sobre uma planta de 1ª ordem



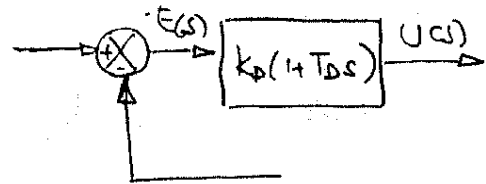
9.6. CONTROLADOR PROPORCIONAL - DERIVATIVO (PD)

Num controlador PD : $u(t) = k_p e(t) + k_p T_D \frac{de(t)}{dt}$

onde k_p é o GANHO PROPORCIONAL e T_D é o TEMPO DERIVATIVO.

No domínio das frequências

$$U(s) = k_p (1 + T_D s) E(s)$$



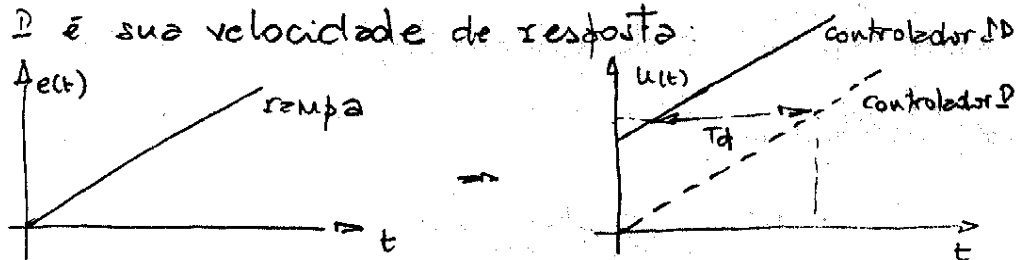
Novamente para um sistema de 1ª ordem:

$$E(s) = C(s) - R(s) = \left[1 - \frac{k_p(1+T_D s) \frac{k}{(s+a)}}{1 + k k_p \frac{(1+T_D s)}{(s+a)}} \right] R(s)$$

$$E(s) = \left[1 - \frac{k k_p (1+T_D s)}{(s+a) + k k_p (1+T_D s)} \right] R(s) = \left[1 - \frac{k k_p (1+T_D s)}{(1+k k_p T_D) s + (a+k k_p)} \right] R(s)$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left[1 - \frac{k k_p (1+T_D s)^0}{(1+k k_p T_D) s + (a+k k_p)} \right] \cdot \frac{1}{s} = \left[1 - \frac{k k_p}{k k_p + a} \right] = \frac{a}{a+k k_p} \neq 0$$

e, com isso, um controlador PD responde, em regime, exatamente como um controlador P. A vantagem, em relação ao controlador P é sua velocidade de resposta:



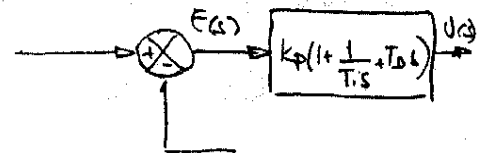
Portanto, se erros em regime permanente não devem ser tolerados e a resposta deve ser rápida, adota-se uma ação PID.

9.7. CONTROLADOR PROPORCIONAL- INTEGRAL- DERIVATIVO (PID)

São controladores de larga utilização industrial.

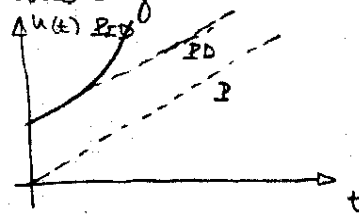
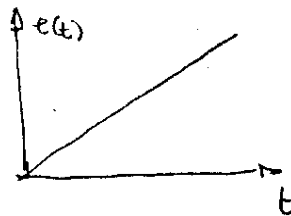
$$u(t) = k_p e(t) + \frac{k_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + k_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$U(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s)$$



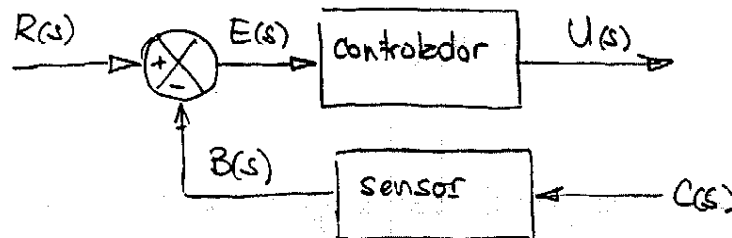
Nesse caso $e(\infty) = 0$ e a resposta do controlador

a uma entrada em rampa é como segue:

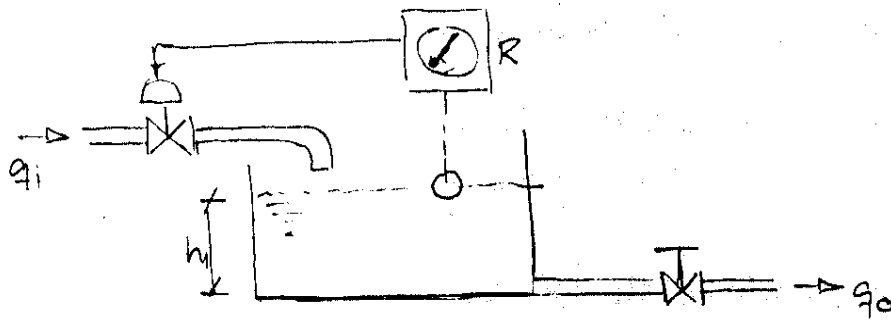


9.10. Inclusão do sensor na malha

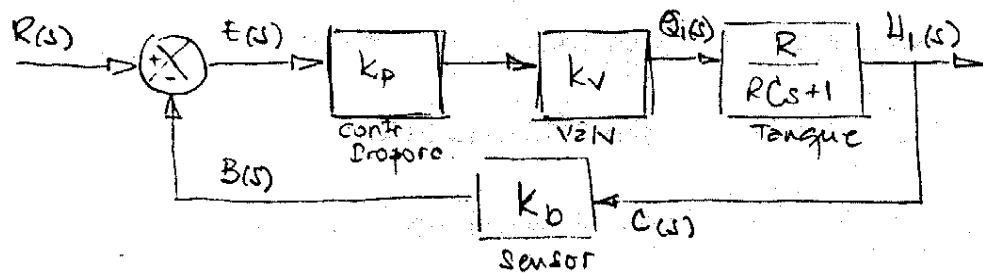
As características estáticas e dinâmicas dos elementos de medida (sensores) tem importância fundamental no desempenho do sistema como um todo. A função de transferência na malha de realimentação é determinada por essas características.



Exemplo: Controle de nível de um tanque



Equivalente a um circuito RC (1ª ordem). A variável medida, através de um sensor de nível, é a altura \$h\$, do tanque.

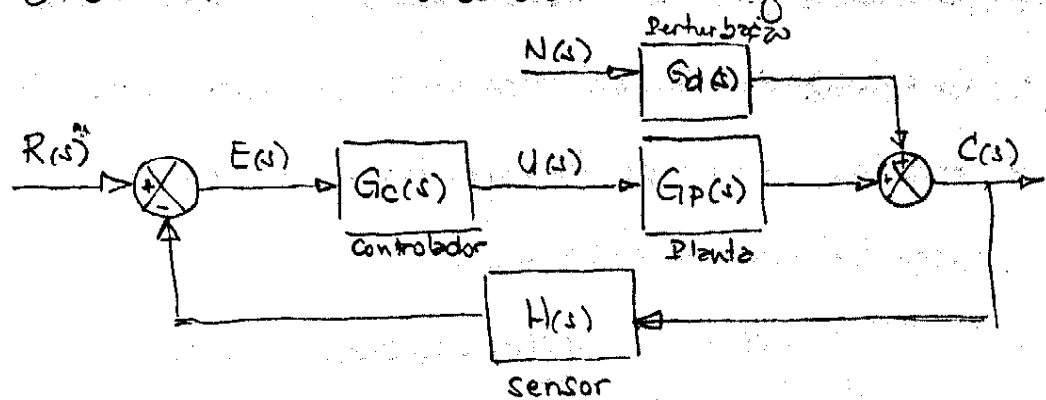


$$H(s) = K_b$$

Se estivéssemos medindo a variação do nível,

$$H(s) = \frac{K_b}{s+1}, \text{ correspondente a um sistema de 1ª ordem.}$$

Com isso, temos os meios para representar um sistema de controle através de seu diagrama de blocos



\$N(s)\$ representa a perturbação sobre o sistema. A F.T. que relaciona a saída \$C(s)\$ com a entrada \$R(s)\$ e a

perturbação $N(s)$ para essa malha básica é dada por

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} R(s) + \frac{G_d(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)H(s)} N(s)$$

Em controle de processos, geralmente o interesse está na resposta a perturbações $N(s)$. Em sistemas de regulação (servomecanismos de posição ou velocidade), o interesse é maior na resposta do sistema a entradas $R(s)$.

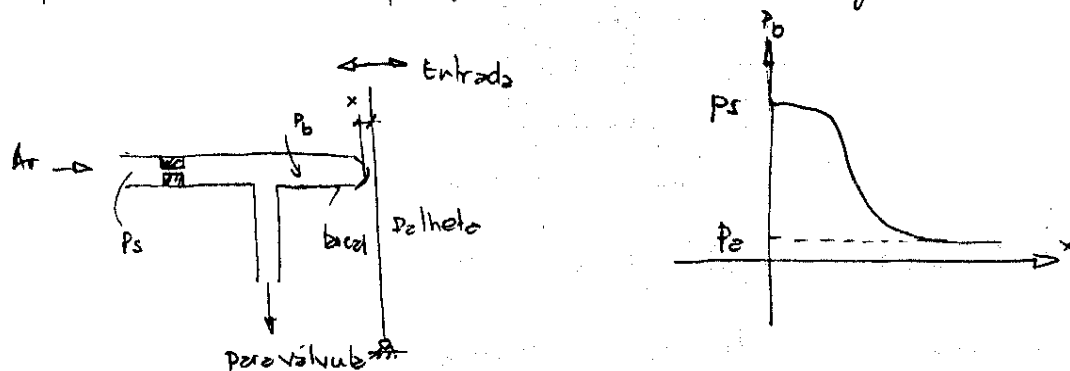
10. CONTROLADORES INDUSTRIAIS

Embora o avanço dos controladores eletrônicos de implementação digital seja inevitável, pela facilidade de manipulação de sinais que introduzem, controladores industriais analógicos utilizando meios pneumáticos ou hidráulicos ainda têm lugar importante devido principalmente à potência que são capazes de gerar. No que segue, vamos detalhar alguns controladores pneumáticos, outros hidráulicos e discutir controladores eletrônicos analógicos.

10.1. CONTROLADORES PNEUMÁTICOS

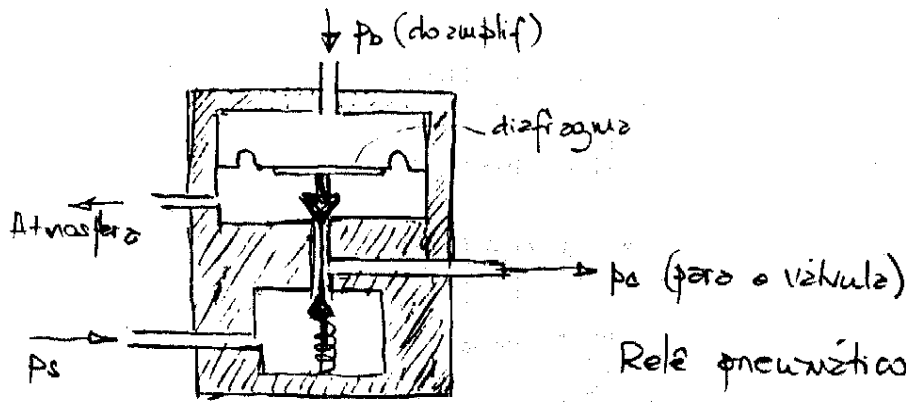
Para se poder fabricar controladores totalmente pneumáticos devem ser usados componentes básicos como amplificadores e relés pneumáticos (Fluidics)

Exemplos são os amplificadores bocal-palhetas (nozzle-flapper) e as redes com esem sangria (see Ogata). O amplificador tem esquemas básicos como segue



P_b é a pressão de interesse pois atua sobre a válvula. Se a palheta fecha totalmente o bocal, a pressão P_b iguala P_s de entrada e atua sobre a válvula. À medida que o flapete se afasta (até 0,01in em equipamentos comerciais), haverá descarga de ar pelo bocal e a pressão na válvula cai até igualar a pressão ambiente P_e . O diâmetro do bocal deve ser o menor possível mas sempre será maior que o diâmetro do orifício para ser funcional.

Amplificadores desse tipo convertem deslocamento x em pressão P_b . Em controladores industriais grandes potências de saída são necessárias para operar válvulas pneumáticas de atuação e, com isso, a amplificação não é suficiente. Amplificadores bocal-palheta são usados como 1º estágio e se acopla um relé pneumático



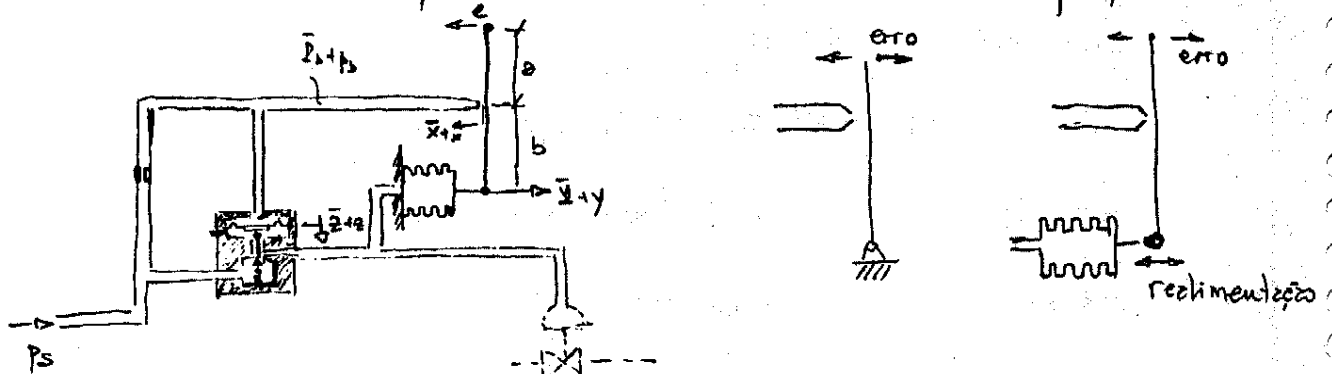
Relé pneumático com langria

Neste caso, a pressão do amplificador p_b comanda um diafragma que permite ou não a descarga para a atmosfera. Com o diafragma fechando a passagem, a pressão p_c na direção da válvula é igual à pressão de suprimento p_s . Quando p_b decresce há escape de parte do ar para a atmosfera e p_c decresce. Usualmente p_c pode ser controlada de 0 a 20 psi

Existem diversas formas construtivas para amplificadores e relés pneumáticos.

10.1.1. Controlador pneumático proporcional

O esquema abaixo mostra um do tipo força-distância



Operação do controlador de dois estágios:

- aumento do sinal de erro e move a palheta para a esquerda;

- com isso, aumenta a pressão atrás do bocal, que move o diafragma para baixo, aumentando a pressão de controle;
- esse aumento expande o fole que, por sua vez, leva a pelheta para a direita, abrindo o bocal. O movimento do fole deve ser menor que o movimento causado pelo sinal de erro. Se fossem iguais, não haveria ação de controle.

No equilíbrio, $e=0$ e todas as variáveis \bar{X} e \bar{Y} , \bar{Z} , \bar{P}_b e \bar{P}_c se igualam. Quando $e \neq 0$, admite-se pequenas variações em torno dessas condições de equilíbrio para que valham aproximações lineares:

- entre a variação de pressão no bocal e a distância bocal-pelheta

$$P_b = k_1 x, \quad k_1 > 0$$

- entre a pressão no rele e o deslocamento do diafragma

$$P_b = k_2 z, \quad k_2 > 0$$

- entre o deslocamento do diafragma e a pressão de controle

$$P_c = k_3 z, \quad k_3 > 0$$

Dessas 3 relações $P_c = \frac{k_3}{k_2} P_b = k x$, $k = k_1 k_3 / k_2$

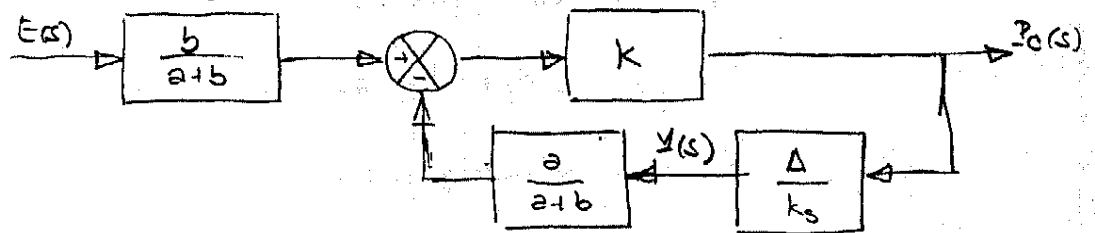
Por outro lado, o deslocamento x da pelheta é:

$$x = \frac{b}{a+b} e - \frac{a}{a+b} y$$

O fole age como uma mola e a seguinte relação se verifica:

$A p_c = k_s y$, A - árcz do folpe
 k_s - constante de mola equivalente

O diagrama de blocos equivalente é :

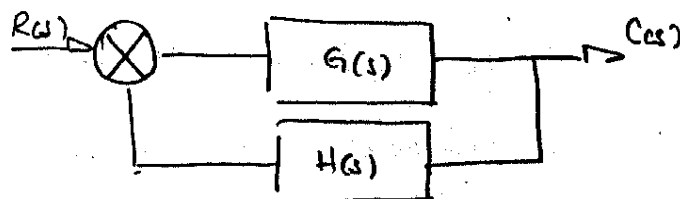


Finalmente, podemos obter a F.T. entre $P_c(s)$ e $E(s)$:

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} K}{1 + K \frac{A}{k_s} \frac{a}{a+b}} = k_p$$

k_p - ganho proporcional , e o sistema se comporta como um controlador proporcional

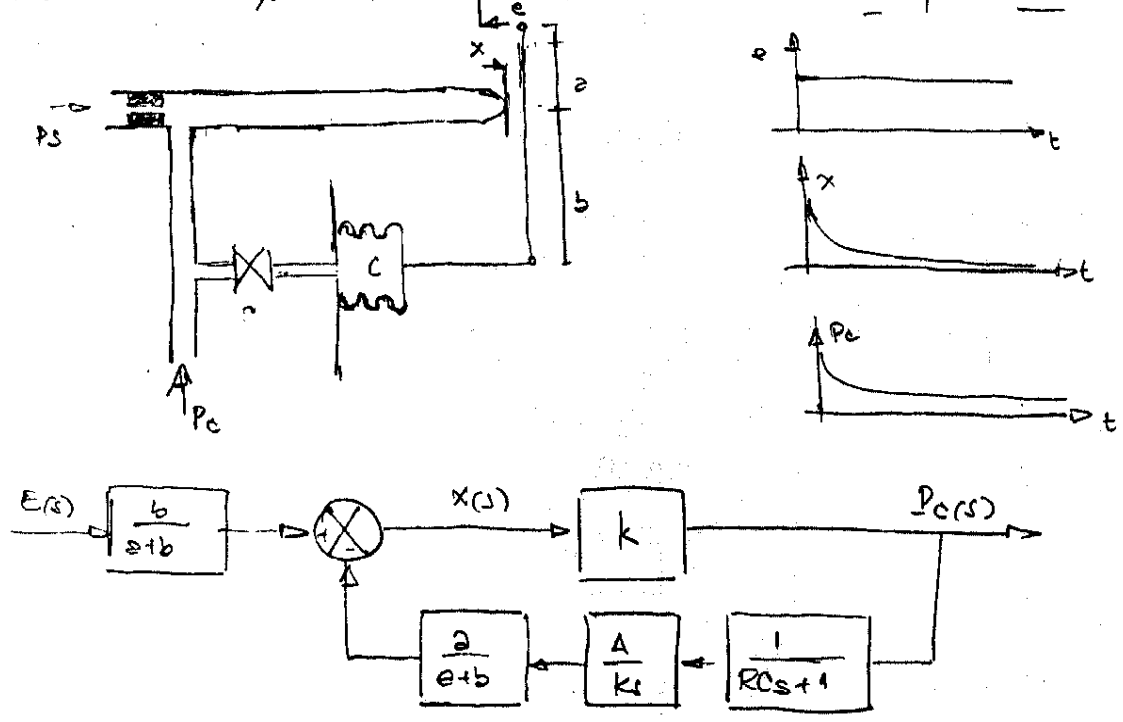
Para se poder modificar o aspecto proporcional adicionando características integrais ou derivativas, é usual inserir uma inversa da F.T. desejada na malha de realimentação. Para o sistema



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

se $|G(s)H(s)| \gg 1 \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{H(s)}$

Para o controlador pneumático proporcional que acabamos de modelar, a adição de uma restrição na malha de realimentação modifica o controlador P para PD



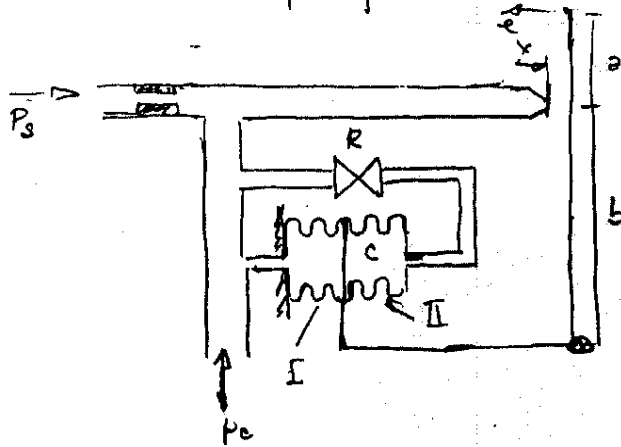
Para qualquer entrada de erro, a mudança na pressão de controle p_c será instantânea. No entanto, a restrição R previne que o fole C sinta imediatamente essa mudança em p_c e com isso, a válvula pneumática (ver figura anterior) vai sentir todo o efeito da mudança em p_c . À medida que o tempo passa, o fole expande e contrai e, em regime permanente age como mecanismo normal de realimentação. Do diagrama de blocos acima, a F.T do sistema é:

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{s+b} k}{1 + k \frac{a}{s+b} \frac{A}{K_s} \frac{1}{R s + 1}}$$

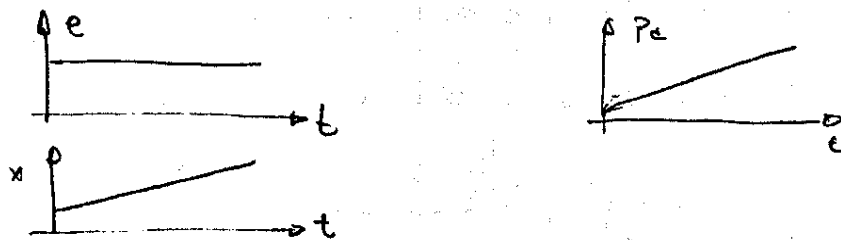
Em geral $k \approx \Delta / [(a+b)K_s (RCs+1)] \gg 1$, o que simplifica a F.T. para: $\frac{D_c(s)}{E(s)} = k_p (1+T_d s)$

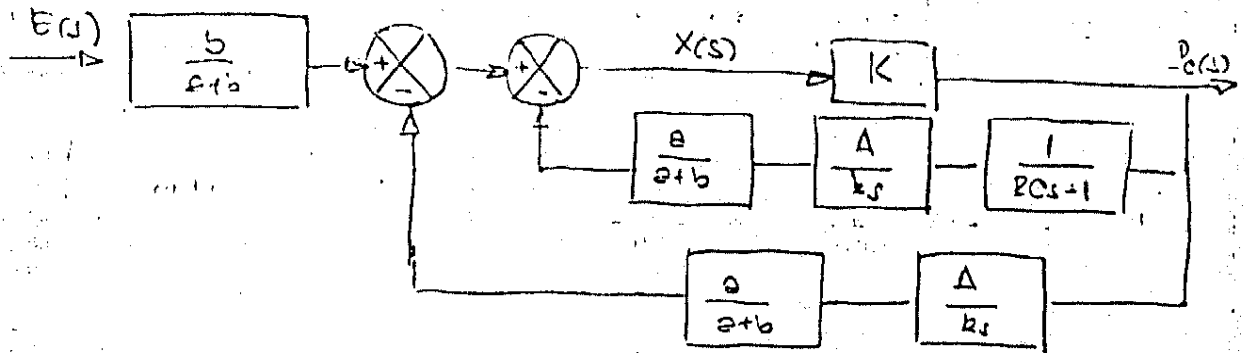
onde: $k_p = \frac{b k_s}{a \Delta}$; $T_d = RC$

Para se fazer um controlador PI pneumático usa-se um duplo folc com restrição:

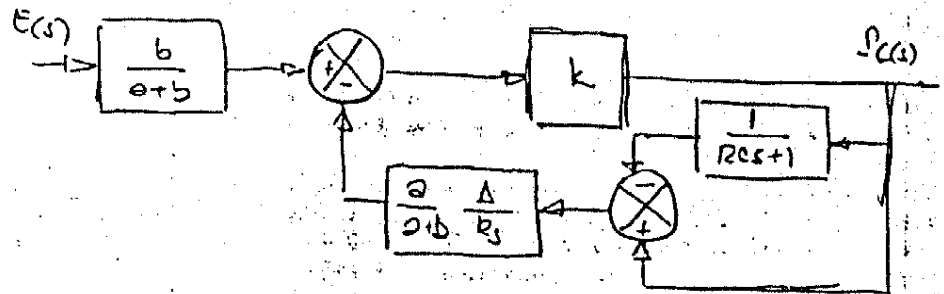


Note que a câmara I do folc está diretamente ligada à P_c enquanto a II se comunica com P_c pela restrição R . Mudanças em P_c afetam diretamente I mas não II, Com o passar do tempo II expande e contrai de modo a levar a palheta um deslocamento adicional na direção do deslocamento original e . Isso faz com que P_c no bocal varie continuamente:





Redução

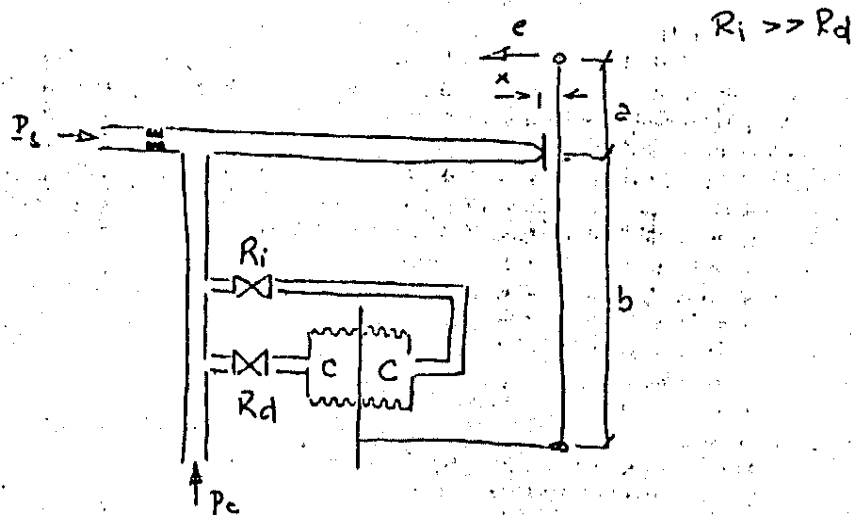


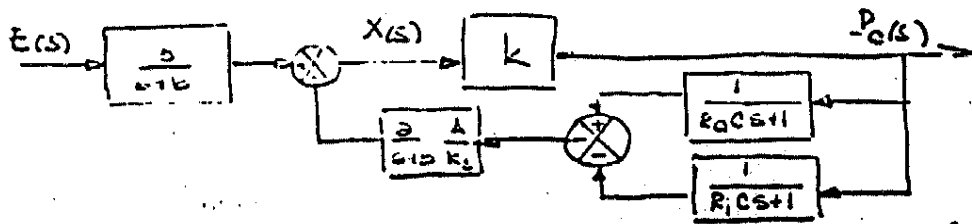
Função de transferência sistema reduzido

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} k}{1 + \frac{k a}{a+b} \frac{A}{k_s} \left(1 - \frac{1}{RCs+1}\right)}$$

$$\frac{P_c(s)}{E(s)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) ; k_p = \frac{b k_s}{a A}, T_i = RC$$

Finalmente para se fazer um PID pneumático:





Função de Transferência:

$$\frac{P_o(s)}{E(s)} = \frac{\frac{bk}{s+1/b}}{1 + \frac{k \frac{a}{s+1/b} \frac{1}{k_s} (R_i C s + 1)}{(R_d C s + 1)(R_i C s + 1)}}$$

Definindo $T_i = R_i C$, $T_d = R_d C$ e fazendo a hipótese de que

$$\frac{k \frac{a}{s+1/b} \frac{1}{k_s} (T_i - T_d) s}{(s+1/b) k_s (T_d s + 1)(T_i s + 1)} \gg 1 \quad \text{jé que } T_i \gg T_d, \text{ vem:}$$

$$\frac{P_o(s)}{E(s)} = \frac{b k_s}{a A} \frac{(T_d s + 1)(T_i s + 1)}{(T_i - T_d) s} = \frac{b k_s}{a A} \frac{T_d T_i s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$

$$\frac{P_o(s)}{E(s)} = k_p \left(1 - \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad k_p = \frac{b k_s}{a A}$$

10.2. CONTROLADORES HIDRÁULICOS

As aplicações de controladores hidráulicos envolvem, de maneira geral, maiores responsabilidades (máquinas-ferramentas, sistemas de controle de superfície em aviões, ABS, etc).
 Fatores para isso: flexibilidade, precisão, partida rápida, reversão suave, etc. Sistemas hidráulicos são praticamente iniciais quando o problema é controlar grandes cargas (turbinas, prensas, etc).

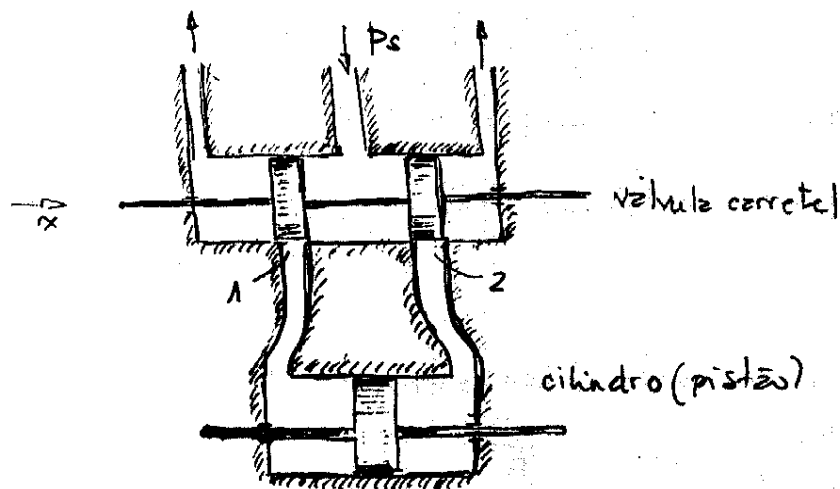
Vantagens

- Capacidade de lubrificação
- Relação peso ou tamanho/potência
- Velocidade de resposta
- Atuadores lineares (pistões) ou rotativos
- Operação contínua, reversíveis, intermitente

Desvantagens

- Custo
- Perigo de fogo
- Explosão
- Vazamentos
- Não linear

10.2.1. Controlador hidráulico integral



Centro aberto e
fechado
No de vias
Centro orificios
overlapped,
underlapped

Esquema de Funcionamento:

- deslocamento x , para a direita, do correte abre e fecha 2 para o lado pressurizado e o cilindro ou pistão hidráulico se desloca para a esquerda
- deslocamento x para a esquerda, inverte o movimento

A vazão de óleo q vezes o tempo dt é igual ao deslocamento dy do pistão vezes a área A vezes a densidade do óleo (eq. continuidade):

$$A \rho dy = q dt$$

A válvula é admitida linear, o que é sempre usado em projetos de controle, embora seja apenas uma aproximação:

$$q = k_1 x$$

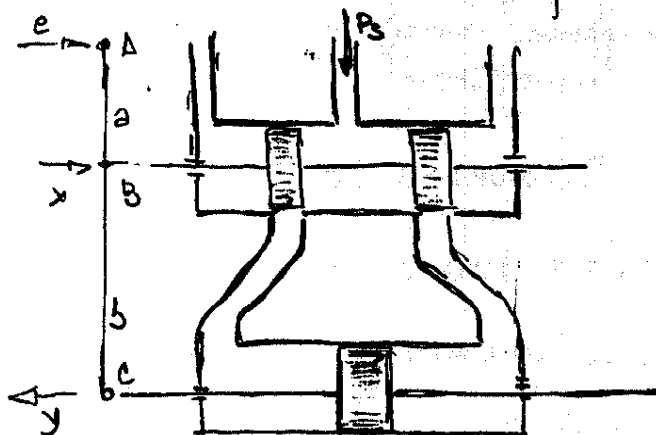
k_1 - const. positiva chamada ganho de vazão da válvula

$$A \rho \frac{dy}{dt} = k_1 x$$

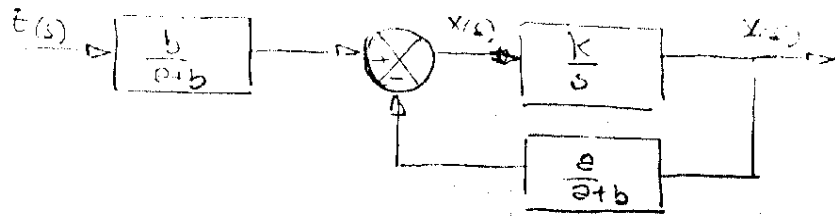
Admitindo condição inicial nula e aplicando T.L:

$$A \rho s Y(s) = k_1 X(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k_1}{A \rho s} = \frac{k}{s}$$

e o servomotor hidráulico representado é um controlador I



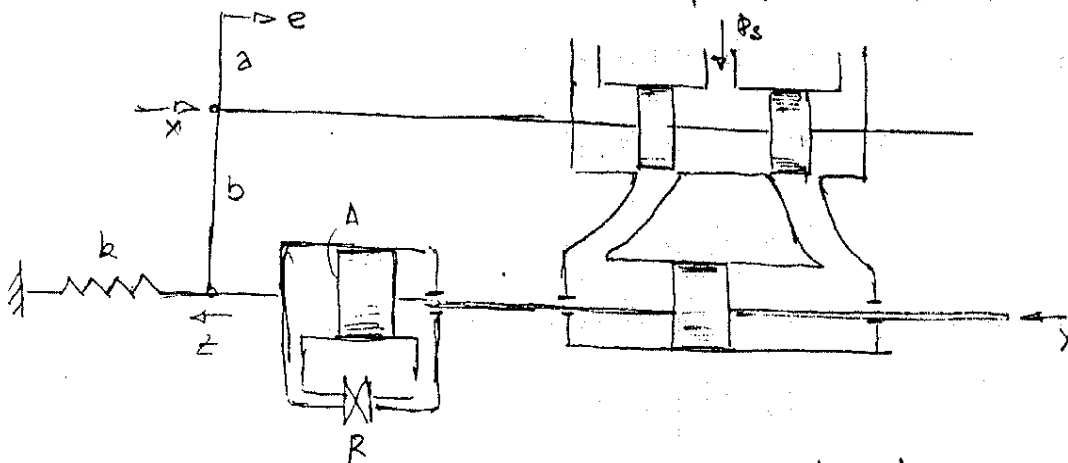
Para se conseguir um controlador hidráulico proporcional coloca-se uma elevação de restrição ABC. O diagrama de blocos correspondente fica



Função Transf.:
$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} \frac{k}{s}}{1 + \frac{k}{s} \frac{a}{a+b}} = \frac{bk}{s(a+b) + ka}$$

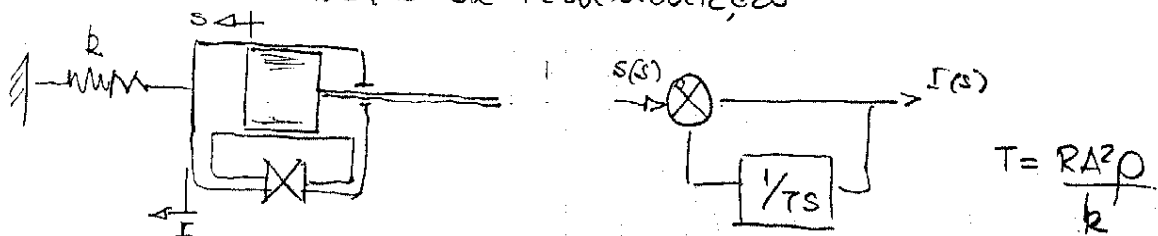
Em geral se faz $\frac{ka}{[s(a+b)]} \gg 1 \Rightarrow \boxed{\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{b}{a} = k_p}$ Controlador P

Controlador Hidráulico PI: Deve-se acrescentar ao esquema acima um amortecedor (dashpot) e uma mola:

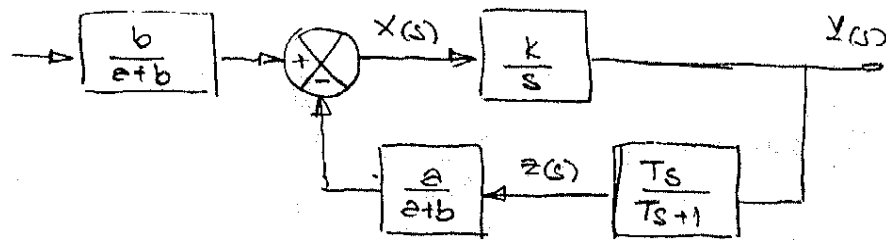


Função de Transferência:
$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\frac{b}{a+b} \frac{k}{s}}{1 + \frac{ka}{a+b} \frac{T}{Ts+1}}$$

O termo $\frac{T}{Ts+1}$ vem de inclusão do sistema mola-amortecedor na malha de realimentação



Para o controlador PI a malha fica



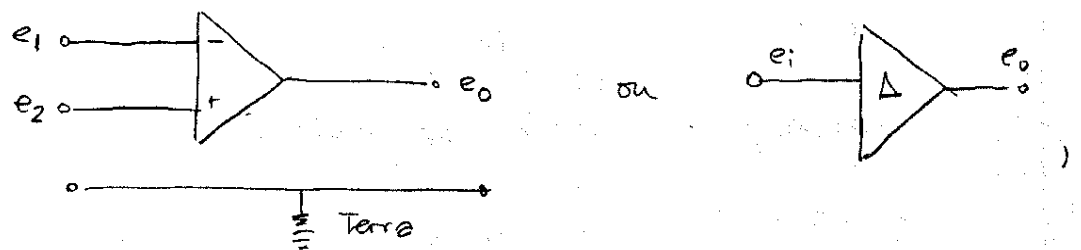
Como, em geral, $\frac{K_0 T}{(a+b)(T_s+1)} \gg 1 \Rightarrow \frac{Y(s)}{E(s)} = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$

$k_p = \frac{b}{a}$ $T_i = T = \frac{R_0^2 \rho}{k}$, controlador PI

Da mesma maneira, diferentes arranjos de válvulas, pistões, mola, amortecedor e barra de realimentação conduzem a controladores PD e PID.

10.3. CONTROLADORES ELETRÔNICOS

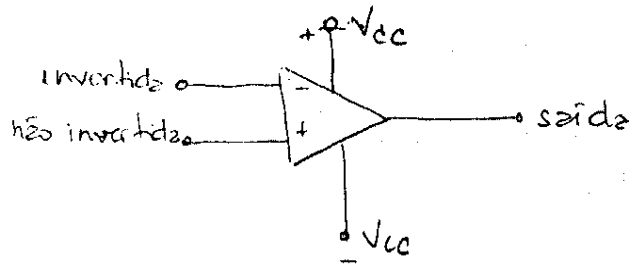
Controladores eletrônicos tem como elemento básico um CI chamado Amplificador Operacional. É fabricado em chips simples e custam hoje bem menos que US\$ 1,00 por chip. Sua função é amplificar sinais.



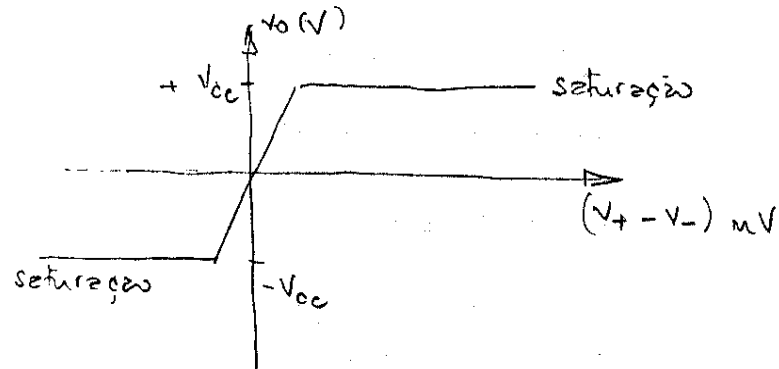
$e_0 = A(e_2 - e_1)$

O Amplificador funciona sobre a diferença $(e_2 - e_1)$ e

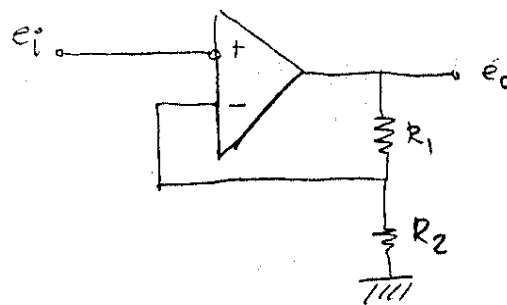
fisicamente tem pelo menos 5 terminais



Apresentam resistência de entrada muito alta ($\rightarrow \infty$) e resistência de saída praticamente nula ($\rightarrow 0$), levando a uma curva característica



Na faixa linear $v_o = A(v_+ - v_-)$, com A entre 10^4 e $10^6 \Rightarrow$ sensibilidade muito elevada, o que é um problema. Pode-se então usar realimentação para diminuir a sensibilidade



$$v_+ = e_i$$

$$v_- = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_o \quad (\text{divisor})$$

$$e_o = A(v_+ - v_-) = A\left(e_i - \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_o\right) \Rightarrow e_o \left(1 + \frac{R_2 A}{R_1 + R_2}\right) = A e_i$$

$$e_o = \frac{e_i}{\frac{1}{A} \left(1 + \frac{R_2 A}{R_1 + R_2}\right)} = \frac{e_i}{\frac{1}{A} + \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

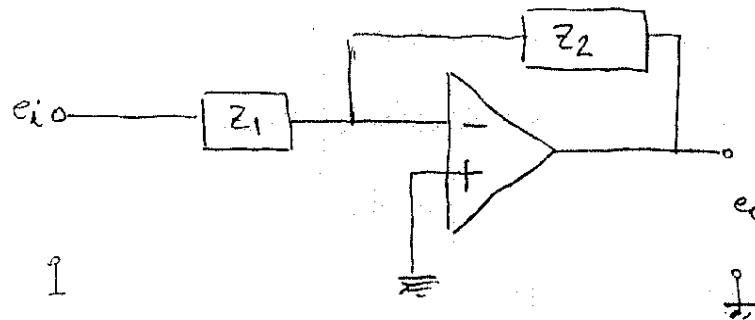
Como A é muito grande, $\frac{1}{A} \rightarrow 0$ e

$$e_o = \frac{R_1 + R_2}{R_2} e_i \Rightarrow \boxed{e_o = k_p e_i}$$

e se tem um controlador P com ganho $k_p = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$, independente A . Com isso, a sensibilidade é controlada pela escolha de R_1 e R_2

Pelo arranjo conveniente de resistências (R), indutâncias (L) e capacitores (C), é possível projetar qualquer ação de controle. A generalização é feita através do conceito de impedância

$$Z(s) = \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{\text{T.L. voltagem entre os terminais}}{\text{T.L. corrente entre os terminais}}$$

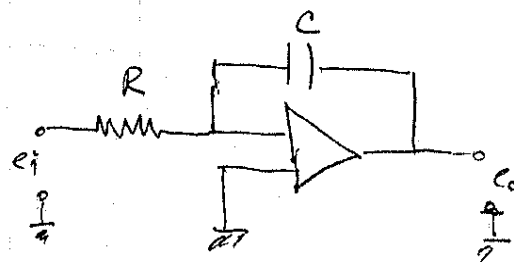


$$e_o = -\frac{Z_2}{Z_1} e_i$$

Com isso :

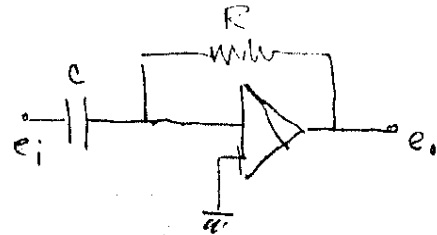
a) $Z_1 = R, Z_2 = \frac{1}{cs}$

$$e_o = -\frac{1}{Rc} \frac{1}{s} e_i$$



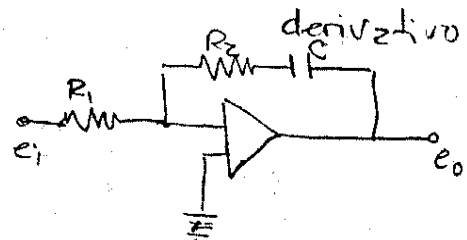
$$e_o = -\frac{1}{Rc} \int e_i(t) dt \quad \text{integrador}$$

b) $z_1 = \frac{1}{Cs}$ $z_2 = R$
 (inversão do circuito a)



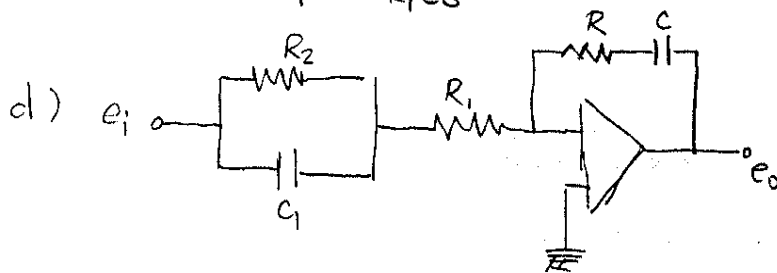
$$e_o = - \frac{R}{\frac{1}{Cs}} e_i \Rightarrow e_o = -RCs e_i, e_o = -RC \frac{d}{dt} e_i$$

c) $z_1 = R_1$ $z_2 = R_2 + C$



$$e_o = - \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1} e_i$$

$$e_o = - \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{R_1 Cs} \right) e_i \Rightarrow \text{Controlador PI}$$



$$e_o = - \left(k_p e_i + k_I \int e_i(\cdot) dt + k_D \frac{de_i}{dt} \right) - \beta R_1 C_1 \frac{de_o}{dt}$$

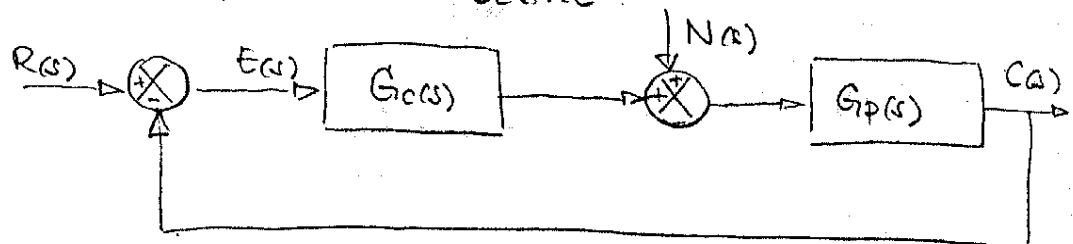
Controlador PID

onde $\beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

$$k_p = \beta \frac{RC + R_2 C_1}{R_2 C}; k_I = \frac{\beta}{R_2 C}; k_D = \beta R C_1$$

II. ANÁLISE DOS ERROS EM REGIME ($t \rightarrow \infty$)

considere a malha básica:



1) entre entrada e saída ($N(s) = 0$)

$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

2) entre perturbação e saída ($R(s) = 0$)

$$\frac{C_N(s)}{R(s)} = \frac{G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

Como $C(s) = C_R(s) + C_N(s)$, $C(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_c G_p} [N(s) + G_c(s)R(s)]$

O erro no sistema fica:

1) em relação à entrada: $\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_p(s)G_c(s)}$
($N(s) = 0$)

2) em relação à perturbação: $E(s) = -C(s)$; $\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$

Exemplo: 1) Vamos tomar uma planta de 1ª ordem com termo integral e um controlador proporcional

$$G_p(s) = \frac{1}{s(\tau s + 1)}$$

$$G_c(s) = k_p$$

Então :

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_p G_c} = \frac{1}{1 + \frac{k_p}{s(\tau s + 1)}} = \frac{s(\tau s + 1)}{\tau s^2 + s + k_p}$$

T. Valor Final: $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s)$

$$R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(\tau s+1)}{s(\tau s+1) + k_p} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

Para uma perturbação $N(s) = \frac{1}{s}$

$$\frac{E(s)}{N(s)} = - \frac{G_p(s)}{1 + G_p G_c} = - \frac{\frac{1}{s(\tau s+1)}}{1 + k_p \frac{1}{s(\tau s+1)}} = - \frac{1}{\tau s^2 + s + k_p}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{\tau s^2 + s + k_p} \cdot \frac{1}{s} = - \frac{1}{k_p} \neq 0$$

Para $e(\infty) \rightarrow 0$ então $k_p \rightarrow \infty$ (aumentar k_p em geral implica resposta + oscilatória).

2) Para a mesma planta, vamos fazer um controlador PI

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_I}{s}$$

$$\text{Para } R(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1 + \frac{k_p + k_I/s}{s(\tau s+1)}} \cdot \frac{1}{s}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(\tau s+1)}{s \tau s^3 + s^2 + k_p s + k_I} = 0$$

$$\text{Para } N(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \frac{E(s)}{N(s)} = - \frac{\frac{1}{s(\tau s+1)}}{1 + \frac{k_p + k_I/s}{s(\tau s+1)}} = - \frac{s}{\tau s^3 + s^2 + k_p s + k_I}$$

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(- \frac{s}{\tau s^3 + s^2 + k_p s + k_I} \right) \cdot \frac{1}{s} = 0$$

$$\text{Para } N(s) = \frac{1}{s^2} \text{ (rampa)} \Rightarrow e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left(- \frac{s}{\tau s^3 + s^2 + k_p s + k_I} \right) \cdot \frac{1}{s^2} = - \frac{1}{k_I}$$

3) Para um controlador PD $G_c(s) = k_p + k_D s$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_p G_c} = \frac{1}{1 + (k_p + k_D s) \frac{1}{s(\tau s + 1)}} = \frac{s(\tau s + 1)}{\tau s^2 + s + k_D s + k_p}$$

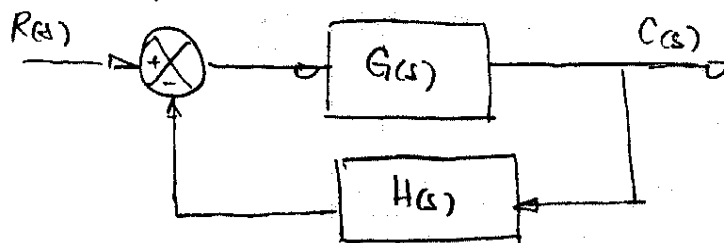
$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{s(\tau s + 1)}{\tau s^2 + s + k_D s + k_p} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

$$\frac{E(s)}{N(s)} = - \frac{G_p}{1 + G_p G_c} = - \frac{\frac{1}{s(\tau s + 1)}}{\frac{\tau s^2 + s + k_D s + k_p}{s(\tau s + 1)}} = - \frac{1}{\tau s^2 + (k_D + 1)s + k_p}$$

$$\text{Para } N(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow e(\infty) = - \frac{1}{k_p}$$

CLASSIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE CONTROLE

Antes de falar sobre a classificação, define-se a função de Transferência em Malha Aberta do sistema.



A F.T.M.A é dada por $G(s)H(s)$

Lembre que a F.T.M.F. é: $\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$

Considere a seguinte F.T.M.A.:

$$G(s)H(s) = \frac{K (T_2s+1)(T_3s+1)\dots(T_ms+1)}{s^N (T_1s+1)(T_2s+1)\dots(T_2s+1)}$$

Note o termo s^N no denominador, indicando um polo de multiplicidade N na origem, e, assim, o número de integrações da FTMA.

$$N=0 \quad \Rightarrow \text{ sistema tipo 0}$$

$$N=1 \quad \Rightarrow \text{ sistema tipo 1}$$

$$N=n \quad \Rightarrow \text{ sistema tipo } n$$

Esta classificação não tem nada a ver com a ordem do sistema (planta).

Não se consegue melhor precisão porém compromete estabilidade. Como existe sempre o compromisso entre estabilidade e precisão use-se no máximo $N=3$.

Como já vimos o erro em regime permanente se define a partir de

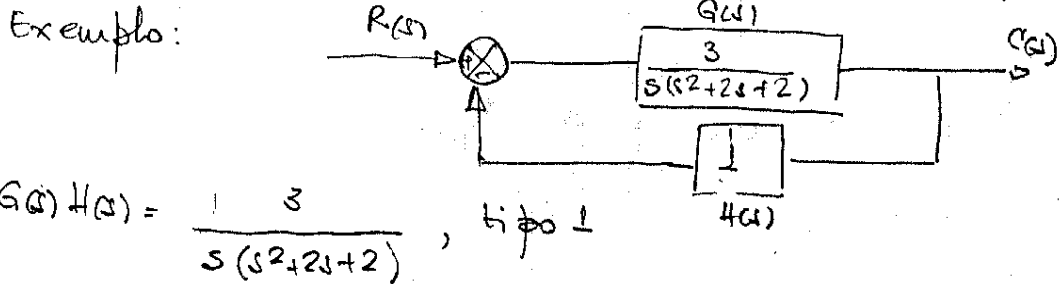
$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

$$e_{ss} = e(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

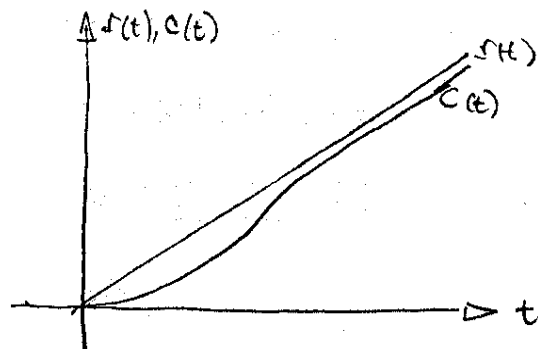
Erro Estático de Posição: Para uma entrada em

degrau $R(s) = \frac{1}{s}$, $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G(s)H(s)} = \frac{1}{1+G(0)H(0)}$

Logo : $e_{ss} = 00$ para sistemas tipo 0
 $e_{ss} = 1/k_v = 1/k$ para sistemas tipo 1
 $e_{ss} = 0$ para sistemas tipo N, $N \geq 2$



Um sistema deste tipo segue uma entrada em rampa com erro finito. Em regime, a velocidade de saída é exatamente a mesma velocidade de entrada, mas existe erro de posição, proporcional à velocidade de entrada e inversamente proporcional a k



Erro Estático de Aceleração Para uma entrada em aceleração (parabólica), $R(s) = 1/s^3$, demonstra-se, que, defini-

mando $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s)H(s)$, $e_{ss} = \frac{1}{k_a}$

$k_a = 0$ para sistemas tipo 0 ou 1

$k_a = k$ para sistemas tipo 2

Defina-se $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) H(s) = G(0) H(0)$

Logo:

$$ess = \frac{1}{1+k_p}, \quad k_p - \text{erro estático de posição}$$

Para um sistema tipo 0: $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k(T_2s+1)(T_3s+1)\dots}{(T_1s+1)(T_2s+1)\dots} = k$

Para um sistema tipo 1: $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k(T_2s+1)(T_3s+1)\dots}{s^N(T_1s+1)(T_2s+1)\dots} = \infty$
ou maior ($N \geq 1$)

Com isso: $ess = 1/1+k$ tipo 0

$ess = 0$ tipo 1 ou maior ordem

Conclusão: um sistema tipo 0 tem erro em regime para uma entrada em degrau, que pode ser ajustado pelo ajuste de k .
Sistemas do tipo N , $N \geq 1$, tem erro nulo para entrada degrau.

Erro Estático de Velocidade: Para uma entrada em

rampa $R(s) = \frac{1}{s^2}$; $ess = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1+G(s)H(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{sG(s)H(s)}$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)H(s) \Rightarrow ess = \frac{1}{k_v}$$

Sistema tipo 0: $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s k (T_2s+1)(T_3s+1)\dots}{(T_1s+1)(T_2s+1)\dots} = 0$

Sistema tipo 1: $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s k (T_2s+1)(T_3s+1)\dots}{s (T_1s+1)(T_2s+1)\dots} = k$

Sistema tipo N ($N \geq 2$): $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s k (T_2s+1)(T_3s+1)\dots}{s^N (T_1s+1)(T_2s+1)\dots} = \infty$

$k_a = \infty$ para sistemas tipo N , $N \geq 3$

Portanto pode-se organizar uma tabela com os diversos tipos de erros em regime

Erros em	Degráu	Rampa	Aceleração ...
Tipo 0	$1/k$	∞	∞
Tipo 1	0	$1/k$	∞
Tipo 2	0	0	$1/k$

As constantes de erro k_p , k_v , k_a descrevem a habilidade do sistema para reduzir ou eliminar o erro em regime, descrevendo o desempenho do sistema. Pode-se pensar em melhorar o desempenho de um sistema pela adição de um ou mais integradores na malha de avanço (GHI). Isto, no entanto, traz problemas de estabilidade.

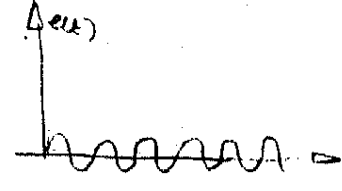
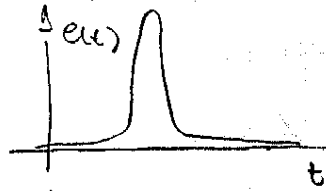
12. ANÁLISE DOS ERROS EM REGIME TRANSITÓRIO

Já temos uma boa idéia sobre como o sistema se comporta no regime permanente, após "dissipar" a parte transitória. No entanto, conhecer a resposta transitória é, muitas vezes, mais importante que o desempenho em regime.

O critério ideal para projeto de qualquer sistema é que o erro seja, ou tenda a, zero, a qualquer tempo.

Como isso é impossível, deve-se estabelecer qual o

critério :



Qual a melhor resposta de erro? O primeiro "quebra" o sistema; o segundo "fadiga".

Para sistemas SISO como os que estamos estudando é usual analisar os erros do sistema em 2 situações :

- para entradas não periódicas (degrau, rampa, etc)
- para otimizar o comportamento do erro.

12.1. RESPOSTA TRANSIENTE A UMA EXCITAÇÃO CONTÍNUA

Vamos considerar sistemas de 1ª e 2ª ordem

- Para um sistema de 1ª ordem $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1}$

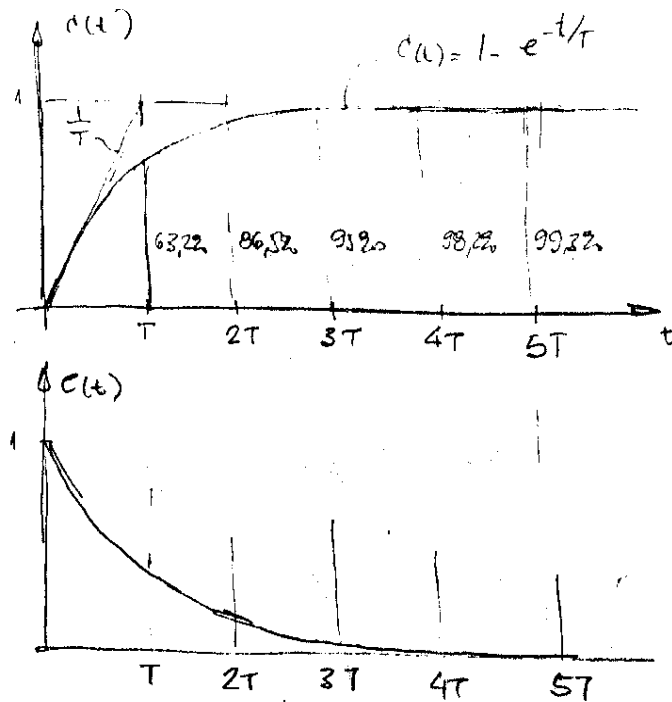
a resposta é um degrau $R(s) = \frac{1}{s}$ é.

$$C(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1}$$

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}$$

para $t = T \Rightarrow c(t) = 0,632$

T - constante de tempo do sistema



A curva de resposta $c(t)$ (ou do erro $e(t)$) só depende de T .
 Para $t = 4T$, $|e(t)| < 2\%$

A resposta a uma rampa, $R(s) = \frac{1}{s^2}$ é dada por:

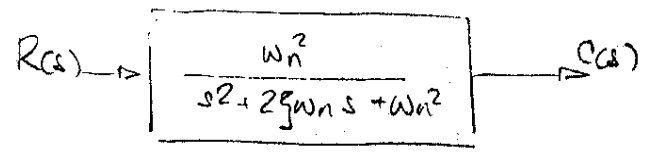
$$C(s) = \frac{1}{s^2} \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1}$$

$$c(t) = t - T + T e^{-t/T}$$

O erro fica $e(t) = r(t) - c(t) = T(1 - e^{-t/T})$, $e(\omega) = T$

- Para um sistema de 2ª ordem

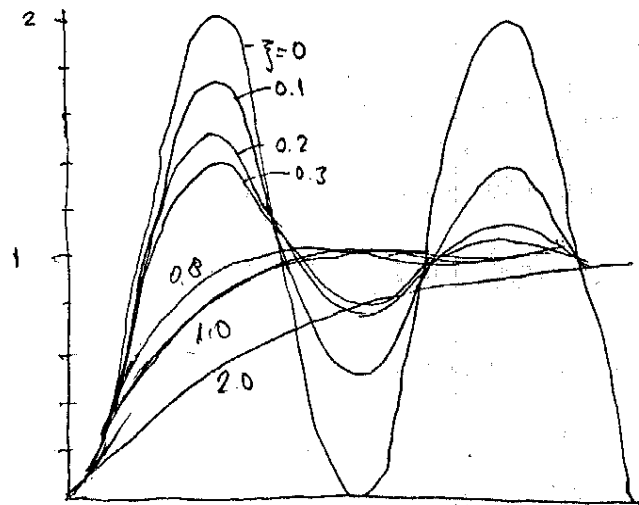
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (\text{um erro, por ex.})$$



O comportamento dinâmico de um sistema de 2ª ordem fica caracterizado por 2 parâmetros, ζ e ω_n .

- $0 < \zeta < 1 \Rightarrow$ polos de malha fechada são conj. complexos.
 $\zeta = 1 \Rightarrow$ duas raízes iguais, não oscila.
 $\zeta > 1 \Rightarrow$ duas raízes reais negativas, não oscila.

- Resposta a um degrau unitário



* caso subamortecido ($0 < \zeta < 1$)

$$c(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$e(t) = r(t) - c(t) = e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right)$$

* caso crítico ($\zeta = 1$)

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

$$e(t) = e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

* caso supercrítico ($\zeta > 1$)

$$c(t) = 1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2} \right)$$

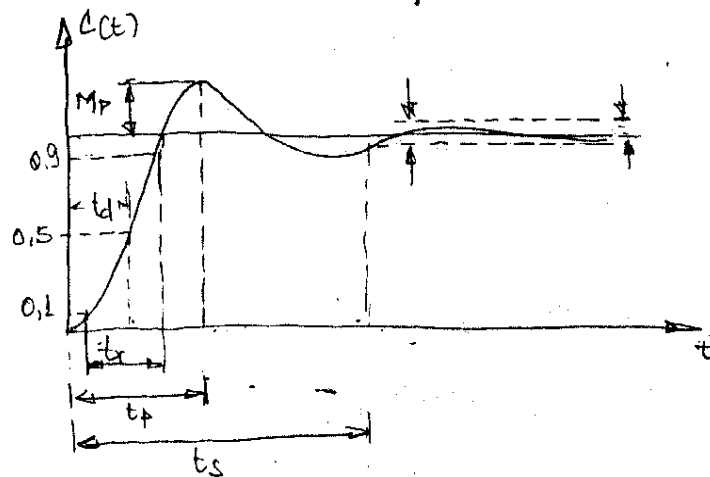
$$s_1 = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

$$s_2 = (\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n$$

Aproximação $c(t) = 1 - e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$

12.2. ESPECIFICAÇÕES DA RESPOSTA TRANSITÓRIA

São definidas a partir de uma entrada em degrau. Entrada em degrau pode ser facilmente gerada e é suficientemente drástica. Se a resposta ao degrau é conhecida, é possível matematicamente computar a resposta a qualquer entrada. As especificações são usualmente as seguintes:



1. Tempo de atraso (t_d), para atingir, pela 1ª vez, 50% do valor final.
2. Tempo de subida (t_r), para subir de 10 a 90% (ou 5 a 95%) ou 0 a 100% do valor final.

3. Tempo de Pico (t_p), tempo necessário para atingir o primeiro pico do overshoot (sobresinal)

4. Overshoot Máximo (M_p), definido em %, valor do pico máximo comparado com o degrau. Indica diretamente a estabilidade relativa do sistema

5. Tempo de Acomodação (t_s), tempo necessário para a resposta atingir e permanecer numa faixa especificada (2% ou 5%) de desvio em relação ao valor final.

A forma da curva fica totalmente determinada a partir das especificações no domínio do tempo. No entanto, existem sempre conflitos entre as especificações desejadas. Se uma resposta rápida é necessária (t_r pequeno, baixo ζ), então M_p será grande e o sistema será bastante oscilatório.

Para obter os parâmetros acima definidos, faz-se:

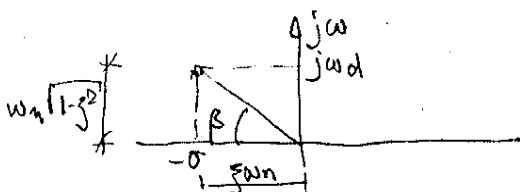
- Tempo de subida, t_r

$$\text{De } c(t) = 1 - e^{-\zeta \omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t \right) \quad (0 < \zeta < 1)$$

$$c(t) = 1 \Rightarrow \cos \omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_d t_r = 0$$

$$\text{tg } \omega_d t_r = - \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = - \frac{\omega_d}{\sigma}$$

$$\Rightarrow t_r = \frac{1}{\omega_d} \arctg \left(\frac{\omega_d}{-\sigma} \right) = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$



Então
$$\frac{\pi}{2} < \arctg\left(\frac{-\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right) < \pi$$

se $\zeta = 0$, $\arctg(\quad) = \pi/2 \Rightarrow t_r = \frac{\pi}{2\omega_d}$

se $\zeta = 1$, $\arctg(\quad) = \pi \Rightarrow t_r = \infty$

- Tempo de Pico, t_p :

Note que t_p corresponde ao ponto onde a derivada de $c(t)$

muda de sinal $\Rightarrow \frac{dc}{dt} \Big|_{t=t_p} = 0$

$$\sin(\omega_d t_p) \left(\frac{\omega_n}{1-\zeta^2} \right) e^{-\zeta \omega_n t_p} = 0 \Rightarrow \sin \omega_d t_p = 0 \Rightarrow \omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

Para o 1º overshoot: $\omega_d t_p = \pi \Rightarrow$

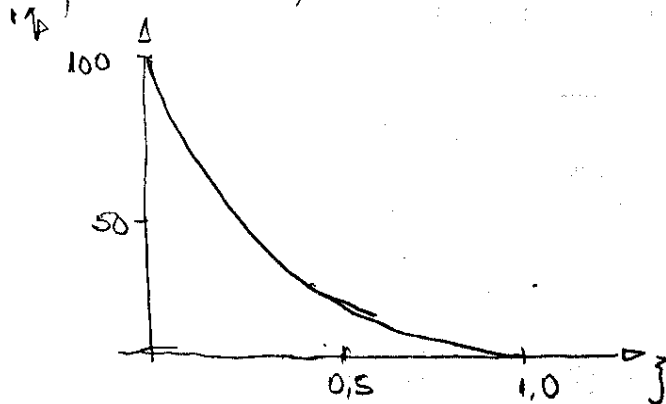
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

- Overshoot máximo M_p :

Para o tempo de pico acima: $M_p = c(t_p) - 1$

$$M_p = e^{-(\zeta/\omega_d)\pi} \quad \text{ou} \quad M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi}$$

É possível traçar uma curva de M_p contra ζ :



- Tempo de acomodação (t_s)

As curvas envelope de resposta transiente são dadas

por:

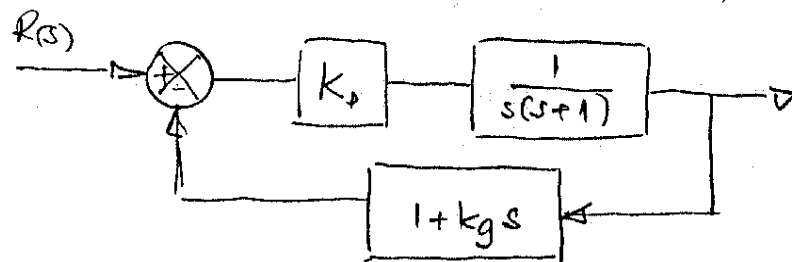
$$e_v = 1 \pm \frac{e^{-\zeta \omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Para os critérios de 2% ou 5%, usz-se comparar t_s com a constante de tempo $T = \frac{1}{\zeta \omega_n}$

Com $0 < \zeta < 0,9$, e 2% : $t_s \approx 4T = \frac{4}{\zeta \omega_n}$

Com $0 < \zeta < 0,9$, e 5% : $t_s \approx 3T = \frac{3}{\zeta \omega_n}$

Exemplo: a) Para o sistema da figura determinar os ganhos k_p e k_g tais que para uma entrada em degrau o overshoot máximo seja 20% e o tempo de pico seja 1s.



$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)T} = 0,2 \Rightarrow \frac{\zeta T}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 1,61$$

$$\zeta^2 T^2 = (1,61)^2 (1-\zeta^2) \Rightarrow \zeta^2 (T^2 - 1,61^2) = (1,61)^2 \Rightarrow \zeta = 0,456$$

Amortecimento subcrítico; 2 polos complexos \approx FT.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \Rightarrow \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{k_p}{s(s+1)}}{1 + \frac{k_p}{s(s+1)}(1+k_g s)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_p}{s^2 + (1+k_k g)s + k_p}$$

$$\omega_n^2 = k_p$$

$$\text{Como } t_p = 1s \quad t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = 1$$

$$\omega_n = \frac{\pi}{\sqrt{1-(0,456)^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{0,7921}} = \frac{\pi}{0,89} = 3,53 \text{ Hz}$$

$$\omega_n^2 = 12,46 \Rightarrow k_p = 12,46$$

b) Nesse caso, determinar tempos de subida e de acomodação 2%

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad ; \quad \beta = \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \arctg \left(\frac{0,89}{0,456} \right)$$

$$\beta = \arctg 1,952 = 62,87^\circ = 1,10 \text{ rad}$$

$$t_r = \frac{\pi - 1,1}{3,53 \sqrt{1-(0,456)^2}} \Rightarrow t_r = 0,65s$$

$$t_s(2\%) = 4T = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{(0,456)(3,53)}$$

$$t_s = 2,48 \text{ s.}$$

12.2. SISTEMAS DE MAIOR ORDEM

A função de transferência em malha fechada é sempre da forma:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{k (s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

onde os z_j , $j=1,\dots,m$ são os zeros e os p_j , $j=1,\dots,n$ são os polos do sistema.

Admitindo uma entrada em degrau $R(s) = \frac{1}{s}$ e expandindo em frações parciais

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s+p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k s + w_k}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2}$$

$n = 2r + q$

Esta última expressão nos mostra que a resposta de um sistema de ordem maior que 2 é composta por uma soma dos termos das respostas de sistemas simples de 1ª e de 2ª ordens.

Se todos os polos do sistema em malha fechada estão no semi-plano esquerdo de s , todos os termos exponenciais e trigonométricos tendem a zero para t crescente e a saída em regime permanente é $C(\infty) = a$.

A análise da resposta de um sistema de maior ordem se simplifica se puder ser aplicado um

critério de dominância de polos.

A regra é que se a razão entre as partes reais exceder 5 e se não houver zeros nas vizinhanças, os polos mais próximos ao eixo imaginário dominam a resposta transitória. Os engenheiros de um sistema de maior ordem são muitas vezes, ajustados para que permaneça um par de polos dominantes em malha fechada. A presença desses polos reduz efeitos de não-linearidades como folgas, atritos secos ou zonas mortas.

12.3. CRITÉRIOS DE DESEMPENHO GLOBAIS

Um critério ou índice de desempenho é a tradução matemática do comportamento global do sistema através de uma função a ser maximizada ou minimizada. O sistema de controle é ótimo em relação a um dado critério se os parâmetros de projeto são escolhidos de modo a tornar o índice de desempenho máximo ou mínimo.

Os critérios mais utilizados são:

$$ISE : I_p = \int_0^{\infty} e^2 dt \quad (\text{integral square error})$$

$$ITSE : I_p = \int_0^{\infty} t e^2 dt \quad (\text{integral of time squared error})$$

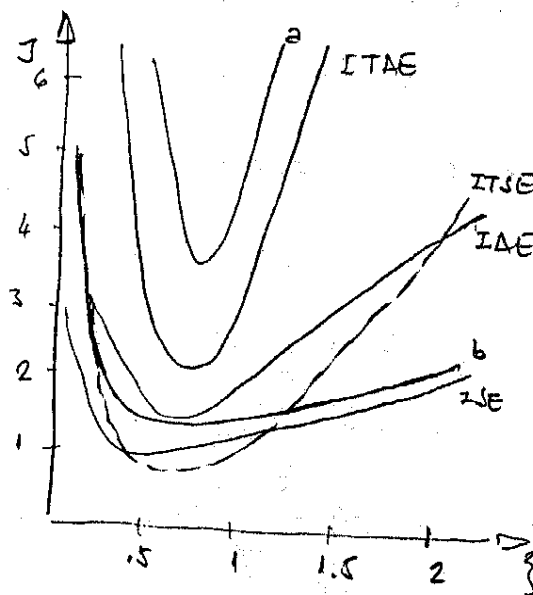
$$IDE : I_p = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (\text{integral absolute error})$$

$$ITDE : I_p = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt \quad (\text{integral of time absolute error})$$

- ISE : - Penaliza fortemente grandes erros e freza os pequenos
 - faz decrescer rapidamente um grande erro inicial \Rightarrow resposta rápida e oscilatória, pequena margem de estabilidade
- ITSE : - grandes erros iniciais são levemente penalizados e pequenos erros ao longo são fortemente penalizados
 - apresenta um melhor desempenho que o ISE
- IAE : - só funciona com sistemas de controle estável e resposta transitória satisfatória
 - difícil de implementar, embora o mais difundido
- ITAE : - características de pequeno overshoot e bom amortecimento

Comparação para

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}$$



critérios mistos

(a) $J = \int_0^{\infty} t(|e| + |e'|) dt$

(b) $J = \int_0^{\infty} (e^2 + e'^2) dt$

Observa-se, das curvas mostradas, que para um sistema de 2ª ordem, o valor $\zeta = 0,7$ corresponde ao valor ótimo (ou próximo) para os critérios de desempenho listados.

Em particular, se o critério ITAE for aplicado a um sistema de ordem n na forma

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{a_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad a_n = \omega_n^n$$

os coeficientes determinados serão:

$$n=1 \quad s + \omega_n$$

$$n=2 \quad s^2 + 1,4 \omega_n s + \omega_n^2$$

$$n=3 \quad s^3 + 1,75 \omega_n s^2 + 2,15 \omega_n s + \omega_n^3$$

Para um sistema de 2ª ordem, $\zeta = 0,7$ corresponde ao ótimo.

12.5. CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH

Estabilidade é o problema mais importante relacionado com sistemas de controle. As perguntas chegam no caso são:

- sob que condições dado sistema se torna instável?
- se já é instável, como fazer para estabilizá-lo?

Já foi dito que um sistema controlado é estável se todos os polos de malha fechada estão no semi-plano esquerdo do plano complexo. O critério de Routh permite saber se um sistema é estável ou não sem ter que descobrir quais são os polos desse sistema. O critério se baseia apenas nos coeficientes da equação característica: se a função de transferência é

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

só é necessário analisar os coeficientes de $A(s)$

O procedimento é como se segue:

1. Isolar o polinômio $A(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$
2. Admitindo $a_n \neq 0$ (qualquer raiz nula de $A(s)$ já foi removida), se qualquer dos coeficientes for zero ou negativo, existe uma raiz (ou raízes) com parte real positiva e o sistema é instável.

3. Se todos os coeficientes forem positivos, monte uma tabela como abaixo:

s^n	a_0	a_2	a_4	a_6
s^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4

s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$c_4 \dots$
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	$d_4 \dots$
s^2	e_1	e_2		
s^1	f_1			
s^0	g_1			

4. Os coeficientes b_i, c_i, d_i, \dots são calculados recursivamente através de:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} ; b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} ; b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} ; c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} ; c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}, \dots$$

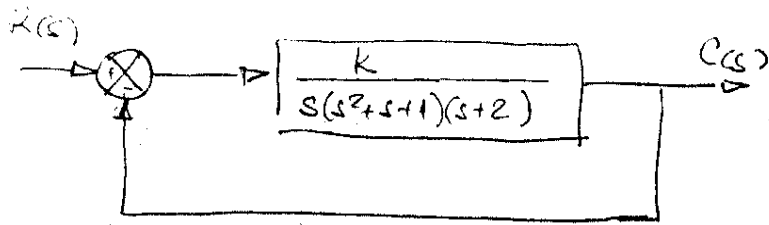
$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_2} ; d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} ; \dots$$

até g_1 .

5. O número de raízes de $A(s)$ com partes reais positivas é igual ao número de trocas de sinal nos coeficientes da primeira coluna da tabela. Note que não é necessário conhecer os coeficientes, só o seu sinal.

6. A Cond. Nec. e Suficiente para $A(s)$ ter todas as raízes no semi-plano esquerdo é que os coeficientes de $A(s)$ sejam todos positivos e que todos os termos da 1ª coluna tenham sinais positivos.

Exemplo:



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s(s^2 + s + 1)(s + 2) + k}$$

Eq. Característica $A(s) = s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 2s + k = 0$

critério de Routh.

s^4	1	3	k
s^3	3	2	
s^2	$7/3$	k	
s^1	$2 - \frac{9k}{7}$		
s^0	$(2 - \frac{9k}{7})k$		

$$b_1 = \frac{2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 3}{3} = \frac{3 \cdot 3 - 12}{3}$$

$$b_2 = \frac{2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 2}{3} = \frac{3 \cdot k}{3}$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot 2 - 2 \cdot b_2}{b_1}; c_2 = 0$$

$$d_1 = \frac{c_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot c_2}{c_2}; d_2 = 0$$

Para o sistema ser estável:

$$2 - \frac{9k}{7} > 0 \quad e \quad k > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < k < 14/9}$$

CRITÉRIO DE ROUTH: COMPLEMENTOS

1. zeros na Coluna Esquerda

O critério pode ser usado mesmo no caso em que surge um zero na coluna esquerda, impedindo completar todo o esquema. Exemplo.

$$H(s) = 3s^4 + 6s^3 + 2s^2 + 4s + 5$$

s^4	3	2	5
s^3	6	4	
s^2	0	5	
s^1			
s^0			

O zero em s^2 exigiria divisão por zero. Existem 2 alternativas:

Atenas:

a. Forma computacional mais usada é multiplicar $H(s)$ por um novo polinômio cujas raízes são conhecidas, o que aumenta o ordem e introduz novos coeficientes.

No caso acima, multiplicando $H(s)$ por $(s+1)$

$$\begin{aligned} \bar{H}(s) &= (s+1)(3s^4 + 6s^3 + 2s^2 + 4s + 5) \\ &= 3s^5 + 9s^4 + 8s^3 + 6s^2 + 9s + 5 \end{aligned}$$

s^5	3	8	9
s^4	9	6	5
s^3	6	$22/3$	
s^2	-5	5	
s^1	$40/3$		
s^0	5		

Existem 2 trocas de sinal, de tal maneira que o polinômio original tem 2 raízes no semiplano direito

b. Alterações do polinômio original pela colocação de um pequeno parâmetro, ϵ , positivo.

$$H(s) = 3s^4 + 6s^3 + 2s^2 + 4s + 5$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 3 & 2 & 5 \\ s^3 & 6 & 4 & \\ s^2 & \frac{\epsilon}{8} & 5 & \\ s^1 & \frac{4\epsilon - 30}{\epsilon} & & \\ 0 & 5 & & \end{array}$$

Traz-se agora o limite para $\epsilon \rightarrow 0$, $\epsilon > 0$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{4\epsilon - 30}{\epsilon} = 4 - \frac{30}{\epsilon} = -\infty$$

$$\begin{array}{c|c} s^4 & 3 \\ s^3 & 6 \\ s^2 & 0 \\ s^1 & -\infty \\ 0 & 5 \end{array}$$

Como em a., existem duas trocas de sinal indicando a presença de duas raízes positivas.

2. Termo parâmetro

O corre quando existe raízes sobre o eixo imaginário e se caracteriza pelo aparecimento de uma linha inteira de zeros. O critério do pequeno parâmetro ϵ não pode ser usado.

Considere o polinômio

$$H(s) = s^5 + 2s^4 + 8s^3 + 11s^2 + 16s + 12$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 8 & 16 \\ s^4 & 2 & 11 & 12 \\ s^3 & 5/2 & 10 & \\ s^2 & 3 & 12 & \\ s^1 & 0 & 0 & \\ s^0 & - & & \end{array}$$

Existe um polinômio divisor de $H(s)$, nesse caso, dado pela linha zero da linha dos zeros:

$$p_{dir}(s) = 3s^2 + 12 = 3(s^2 + 4) = 3(s + 2i)(s - 2i)$$

$$\text{De fato: } \frac{H(s)}{p_{dir}(s)} = \frac{s^5 + 2s^4 + 8s^3 + 11s^2 + 16s + 12}{s^2 + 4} = s^3 + 2s^2 + 4s + 3 \text{ com resto 0}$$

Para completar o quadro, a linha de zeros é reposta pelos coeficientes da derivada de $p_{dir}(s)$ em relação s

$$\frac{d p_{dir}(s)}{ds} = 6s$$

s^5	1	8	16
s^4	2	11	12
s^3	$\frac{5}{2}$	10	
s^2	3	12	
s^1	6		
s^0	12		

13. O MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES (ROOT LOCUS)

Os polos de malha fechada, como visto, são as raízes da equação característica e sua localização, embora fundamental, não permite uma análise mais completa do sistema porque se os ganhos das funções de transferência variam, a equação característica se modifica.

O Lugar das Raízes ou Método de Evans permite essa análise por plotar as raízes da equação característica para todos os valores de um parâmetro do sistema.

Como exemplo, vamos tomar $G(s) = \frac{k}{s(s+2)}$ e $H(s) = 1$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + 2s + k}$$

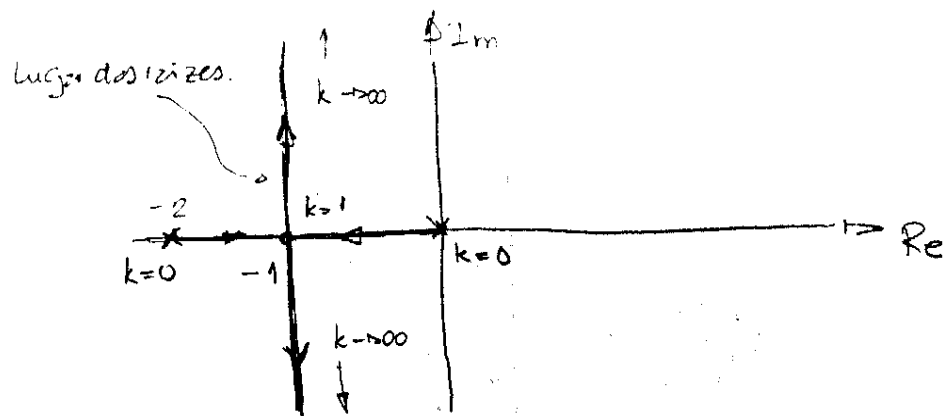
Equação característica $s^2 + 2s + k = 0$

Critério de Routh $a, k > 0 \Rightarrow$ sist. estável

Tomemos $a = 2$, e examinemos as raízes

$$s_1, s_2 = -1 \pm \sqrt{1-k}$$

- $k = 0 \Rightarrow s_1 = 0, s_2 = -2$
- $0 < k < 1 \Rightarrow s_1, s_2$ reais negativas
- $k = 1 \Rightarrow$ raiz dupla; $s_1 = s_2 = -1$
- $+1 < k < +\infty \Rightarrow s_1, s_2$ complexas conjugadas com parte real -1 e imaginária $\rightarrow \infty$



É possível também fixar o valor de k e fazer um lugar das raízes com a variação do parâmetro $\underline{\epsilon}$.

No caso geral, a equação característica

$$1 + G(s)H(s) \quad \text{ou} \quad G(s)H(s) = -1$$

pode ser dividida em 2 equações, correspondentes ao módulo e ao ângulo complexos:

$$|G(s)H(s)| = 1$$

$$\angle G(s)H(s) = -1 \Rightarrow \angle G(s)H(s) = (2k+1)\pi$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{ou ainda} \quad \angle G(s)H(s) = \pm 180^\circ(2k+1), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Se escrevermos:

$$G(s)H(s) = \frac{k (s+z_1)(s+z_2)\dots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\dots(s+p_n)}$$

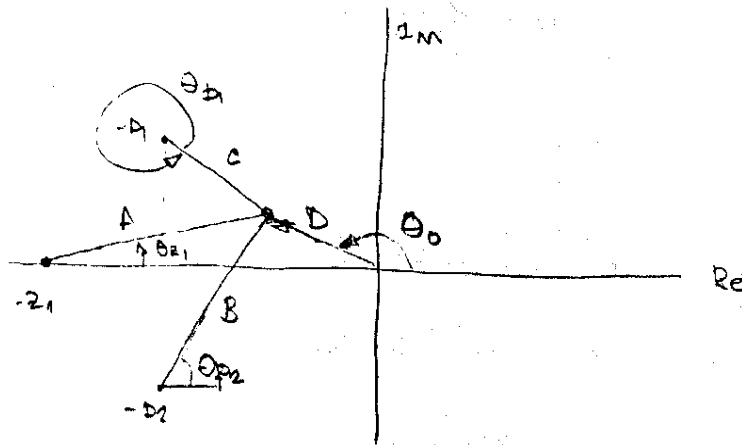
onde p_i são os polos, z_i zeros e k é o ganho

$$\text{Para } 0 < k < \infty \quad |G(s)H(s)| = \frac{|k| \prod_{i=1}^m |s+z_i|}{\prod_{j=1}^n |s+p_j|} = 1$$

$$\angle G(s)H(s) = \angle k + \sum_{i=1}^m \angle (s+z_i) - \sum_{j=1}^n \angle (s+p_j) = (2k+1)\pi$$

Exemplo:

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$



s_1 - ponto de teste $\Rightarrow G(s_1)H(s_1) = \frac{k(s_1+z_1)}{(s_1+p_1)(s_1+p_2)}$

Pontos s_1 do LR devem satisfazer:

$$\frac{k |s_1+z_1|}{|s_1+p_1| |s_1+p_2|} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{A}{BCD} = \frac{1}{k}$$

$$\theta_{z_1} - (\theta_0 + \theta_{p_1} + \theta_{p_2}) = (2k+1)\pi \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

13.1. REGRAS PARA CONSTRUÇÃO DO ROOT-LOCUS

A 1ª regra vem do seguinte:

$$\text{se } |GH| = 1 \Rightarrow \frac{\prod_{i=1}^m |(s+z_i)|}{\prod_{j=1}^n |(s+p_j)|} = \frac{1}{k}$$

logo $k \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\prod |(s+z_i)|}{\prod |(s+p_j)|} \rightarrow \infty$, i.e., $s \rightarrow p_j$

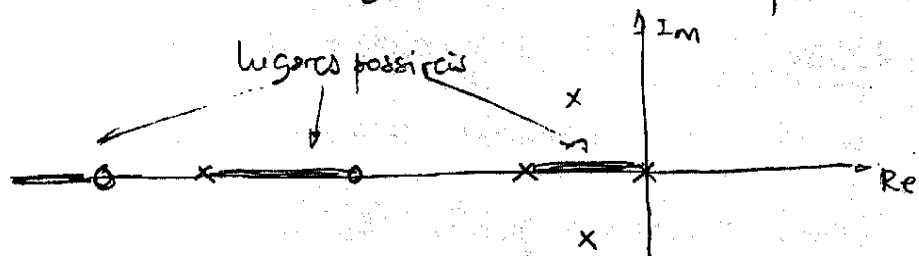
$k \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\prod |(s+z_i)|}{\prod |(s+p_j)|} \rightarrow 0$, i.e., $s \rightarrow z_i$ ou $s \rightarrow \infty$

REGDA I : Os ramos do Root-locus começam nos polos de GH ($k=0$) e terminam nos zeros de GH ou no ∞ . O nº de segmentos N é igual ao número de polos P menos o número de zeros Z (se $P > Z$).

As raízes da equação característica são complexas conjugadas ou reais:

- se complexas conjugadas, os ramos do LR são simétricos em relação ao eixo real.
- sobre o eixo real só existem segmentos do LR se à direita do segmento a soma dos polos e zeros for ímpar. Isto vem de que a contribuição de polos e zeros complexos é nula sobre o eixo real e a condição ímpar se impõe para satisfazer

$$\angle \sum \theta_z - \angle \sum \theta_p = (2k+1)\pi \quad \text{Exemplo:}$$



REGDA II : O Root locus é simétrico em relação ao eixo real e segmentos do Root locus sobre o eixo real só existem se à direita do segmento houver um ímpar de polos e zeros.

A 3ª regra vem das assíntotas do R.Locus. Se $P-Z > 0$ e $s \rightarrow \infty$, os ramos do R.Locus aproximam assintoticamente retas com ângulos dados por

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{P-Z} \quad k = 0, 1, 2, \dots, (P-Z-1)$$

Exemplo: Se $P=3$ e $Z=1$, $P-Z=2$

Logo existem 2 assíntotas com ângulos θ_0 e θ_1

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}; \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{2}$$

Devido à simetria (2ª regra), as assíntotas sempre se interceptam sobre o eixo real. O ponto de intersecção das assíntotas com o eixo real é dado por:

$$\sigma_a = \frac{\sum \text{polos GH} - \sum \text{zeros GH}}{P-Z}$$

REGRAS III Os segmentos do Lugar das Raízes que tendam

a ∞ se aproximam assintoticamente de retas que tem como origem o ponto $(\sigma_a, 0)$ do eixo real e ângulos

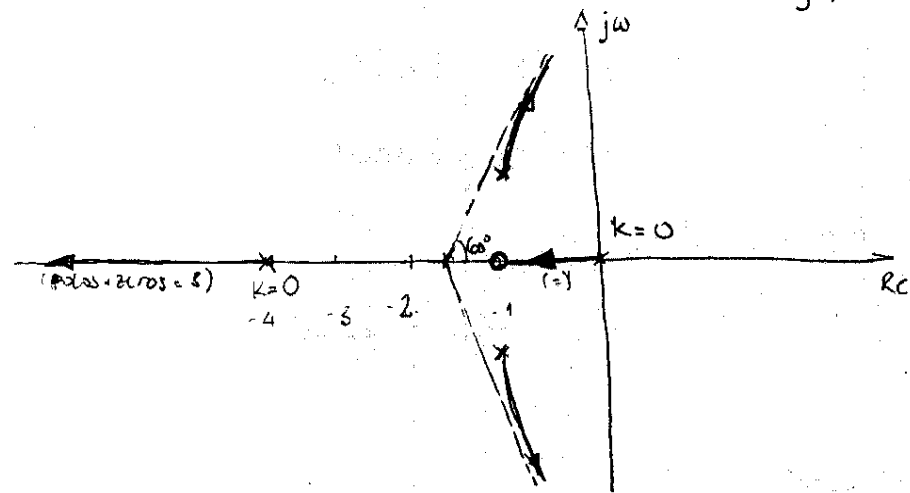
$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{P-Z}, \quad k = 0, 1, \dots, (P-Z-1) \text{ com o mesmo eixo}$$

Exemplo:

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

zeros : 1 em $s = -1$

Polos : 4 em $s_1 = 0, s_2 = -4, s_3 = -1+j, s_4 = -1-j$



Assíntotas

$$\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{p-z}, \quad p=4, \quad z=1, \quad k=0,1,2$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \theta_1 = \pi, \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{3}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{Polos} - \sum \text{zeros}}{p-z} = \frac{[0 + (-1+j) + (-1-j) + (-4)] - [-1]}{3}$$

$$\sigma_0 = -\frac{5}{3} = -1,67$$

Problema: está certo o ângulo de saída "dividido"? Não!

O ângulo de partida dos polos ou de chegada em zeros do Root locus é obtido para um ponto de teste próximo do polo ou do zero. A soma das contribuições angulares de todos os outros polos e zeros deve permanecer o mesmo se o ponto de teste é movido na vizinhança do polo ou zero. dá a retirar a quarta regra:

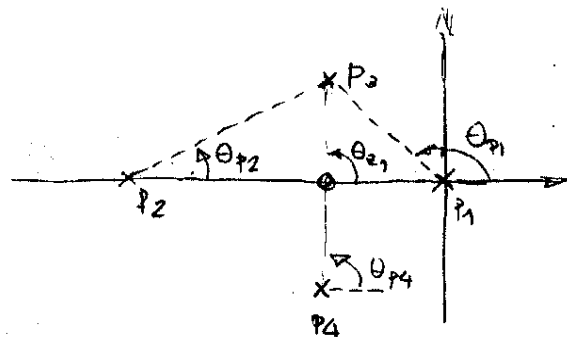
Regra IV. O ângulo de partida de um ramo do RL a partir de um polo complexo p_j é:

$$A.P_j = 180^\circ - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \angle \theta_{pi} + \sum_{k=1}^m \angle \theta_{z_k}$$

Analogamente o ângulo de chegada a um zero complexo z_j é:

$$A.C_j = 180^\circ + \sum_{i=1}^n \angle \theta_{pi} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \angle \theta_{z_k}$$

No exemplo



Interessa $A.P_3$. De figura $\theta_{z1} = 90^\circ$, $\theta_{z2} = 90^\circ$, $\theta_{p1} = 135^\circ$

$$\theta_{p2} = \arctan \frac{1}{3} = 18,3^\circ$$

$$\Delta P_3 = 180^\circ - 135^\circ - 18,3^\circ - 90^\circ + 90^\circ = 27^\circ$$

o ângulo de partida é o contrário do indicado na figura

O problema seguinte é determinar até quanto pode ser variado o ganho k , isto é, o ponto onde o root-locus cruza (ou pode cruzar) o eixo imaginário (limite de estabilidade). Isto pode ser feito com o uso do Critério de Routh

Voltagem no exemplo: $G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$

Eq. Característica $1+G(s)H(s) = s(s+4)(s^2+2s+2) + k(s+1) = 0$

$$s^4 + 6s^3 + 10s^2 + (8+k)s + k = 0$$

Routh:	s^4	1	10	k
	s^3	6	8+k	0
\Rightarrow	s^2	$\frac{60-(8+k)}{6}$	$\frac{6k}{6}$	
	s^1	$\frac{(8+k)\left(\frac{60-(8+k)}{6}\right) - 6k}{10 - \frac{(8+k)}{6}}$	0	
	s^0	k	0	

Dei se conclue que : a) $k > 0$ (do critério)

b) $60 - (8+k) > 0$ (em s^2) $\Rightarrow k < 52$

c) $(8+k)\left[10 - \frac{(8+k)}{6}\right] - 6k > 0$ (em s^1) $\Rightarrow k^2 - 8k - 412 \leq 0$

$$k < 24,69 \text{ (então } a \neq 0)$$

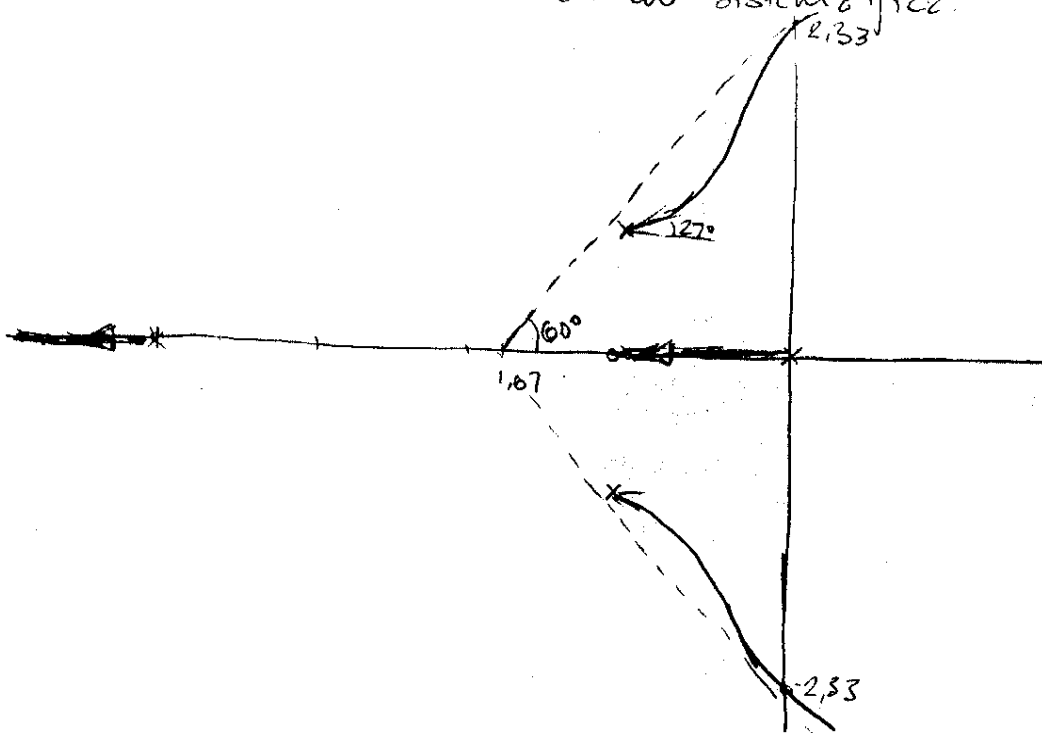
Obtido este valor de k, volta-se à equação auxiliar do C. Routh. para determinar os pontos onde o locus cruza o eixo imaginário. Para isto basta fazer com que a equação em s^2 torne os coeficientes nulos, isto é

$$\left[\frac{60 - (8+k)}{6} \right] s^2 + \frac{6k}{6} = 0$$

$$\left[10 - \frac{(8+24,69)}{6} \right] s^2 + 24,69 = 0$$

$$s_{1,2} = \pm 2,33j$$

Finalmente o Root locus do sistema fica:



Regra V : localize, através do Critério de Routh ou outro método, os pontos onde o Root-locus cruza o eixo imaginário.

Finalmente, no caso de haver um segmento entre 2 polos ou 2 zeros ou ainda entre 1 zero e $\pm\infty$, deve haver um ponto no ramo de desdobramento em direção à parte imaginária



- Então, o ângulo de partida ou chegada, pela simetria

e pelo ângulo de 180° entre os segmentos é tal que o ângulo de partida ou chegada é 90° para cada ramo. O ponto de partida ou chegada é dado por

$$\frac{d}{ds} G(s)H(s) = 0 \quad (\text{pto selo sobre o eixo real})$$

Note que nem todos os pontos onde $\frac{d}{ds} G(s)H(s) = 0$ são pontos de partida ou chegada. Dessa relação pode-se obter a seguinte relação para os pontos σ de partida ou chegada sobre o eixo real

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{(\sigma + p_i)} = \sum_{j=1}^m \frac{1}{(\sigma + z_j)}$$

onde os p_i são os polos e os z_j são os zeros de $G(s)H(s)$

Regra VI: Ramos do Root locus entre 2 polos ou 2 zeros reais (ou entre 1 zero e $\pm\infty$) devem apresentar pontos de partida dados pela relação acima com ângulos de partida (ou chegada) de 90° em relação ao eixo real.

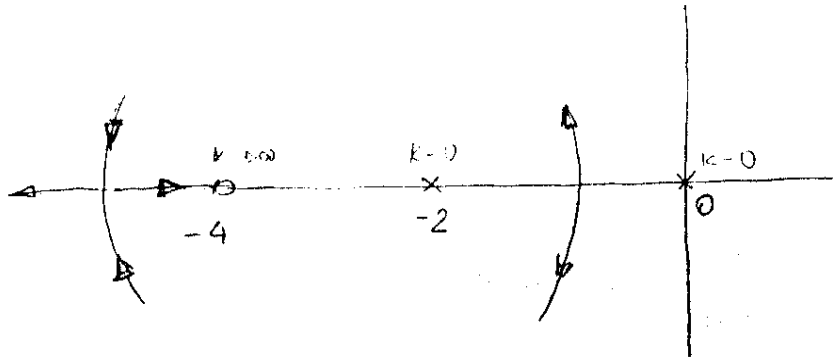
Exemplo:
$$GH = \frac{k(s+4)}{s(s+2)}$$

$$\frac{d}{ds} GH = k \left[\frac{s(s+2) - (s+4)2(s+1)}{s^2(s+2)^2} \right] = k \left[\frac{s^2+2s - 2s^2-10s-8}{s^2(s+2)^2} \right]$$

num = [1 1]
den = [1 2 -6 0]

k = 0.1550

$$\begin{array}{r} s^2+4s+16 \\ s^2-s \\ \hline s^4+4s^3+16s^2 \\ -s^2 \quad -4s^2-16s \\ \hline \end{array}$$



$$\frac{dG(s)}{ds} = 0 \Rightarrow s^2 + 8s + 8 = 0 \quad s = \frac{-8 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$s_1 = -1,172 \text{ (paralelo)} \quad \sigma = -1,172$$

$$s_2 = -6,828 \text{ (chegado)} \quad \sigma = -6,828$$

Exemplo: Uma forma simplificada da F.T. N.A. de um avião com autopiloto, para o modo longitudinal, é dada por

$$G(s)H(s) = \frac{k(s+a)}{s(s-b)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}, \quad a \text{ e } b > 0$$

Note que este sistema tem um polo de malha aberta no semi-plano direito e assim, o sistema deve ser condicionalmente estável. Desenhar o Root locus para $a = b = 1$, $\zeta = 0,5$ e $\omega_n = 4$ e determine a faixa de ganhos k para que o sistema seja estável.

2302

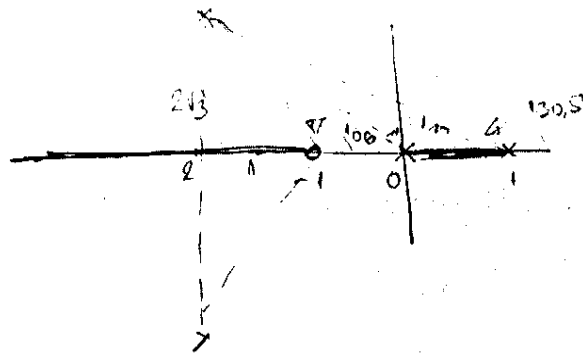
$$G(s)H(s) = \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s^2 + 4s + 16)}$$

Para desenhar o R.L.:

- ① Polos de malha aberta: $s = 0, s = 1, s = -2 \pm 2\sqrt{3}$

$$\begin{array}{r} s^2 + 4s^2 + 16s \\ -s^2 - 4s - 16 \\ \hline s^3 + 3s^2 + 12s - 16 \end{array}$$

zero de malha aberta $z = -1$



② Assintotas : $\theta_k = \frac{180^\circ(2k+1)}{4-1}$, $k = 1, 2, 3$

$\theta_1 = 60^\circ, \theta_2 = 180^\circ, \theta_3 = 300^\circ$

$$\sigma_c = - \frac{(0-1+2+2\sqrt{3}j) - 2 - 2\sqrt{3}j}{4-1} = - \frac{2}{3}$$

③ Pontos de partida e chegada

Eq. característica : $1 + \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} = 0$

$s^4 + 3s^3 + 12s^2 - 16s$

$$K = - \frac{s(s-1)(s^2+4s+16)}{s+1} \Rightarrow \frac{dK}{ds} = - \frac{(4s^3 + 9s^2 + 24s - 16)(s+1) - 1(4s^3 + 12s^2)}{(s+1)^2}$$

$$\frac{dK}{ds} = - \frac{3s^4 + 10s^3 + 21s^2 + 24s - 16}{(s+1)^2} = 0$$

$$3s^4 + 10s^3 + 21s^2 + 24s - 16 = 0 \begin{cases} s_1 = 0,46 \\ s_2 = -2,22 \\ s_3 = -0,79 + 2,16j \\ s_4 = -0,79 - 2,16j \end{cases}$$

s_3 e s_4 não satisfazem a condição de ângulo \rightarrow não são pontos nem de chegada nem de partida (ver regra IV).

4) Critérios de Routh

Eq. característica: $1 + G(s)H(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{k(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} = 0$

$$s(s-1)(s^2+4s+16) + k(s+1) = 0$$

$$s^4 + 3s^3 + 12s^2 + (k-16)s + k = 0$$

s^4	1	12	k	
s^3	3	$(k-16)$		$b_1 = \frac{3 \cdot 12 - 1 \cdot (k-16)}{3}$
$\Rightarrow s^2$	$\frac{52-k}{3}$	k		$b_2 = \frac{3 \cdot k - 1 \cdot 0}{3}$
s^1	$\frac{-k^2+59k-832}{3(52-k)}$	0		$c_1 = \frac{(\frac{52-k}{3}) \cdot k - 3 \cdot k}{\frac{52-k}{3}}$
s^0	k			$c_2 = 0$

$$\frac{-k^2+59k-832}{3(52-k)} = 0 \quad k^2 - 59k + 832 = 0 \quad k = \frac{59 \pm \sqrt{3481 - 3328}}{2}$$

$$k = \frac{59 \pm \sqrt{153}}{2}$$

$k_1 = 35,7$ e $k_2 = 23,3$ são os valores para os quais o R.L cruza o eixo imaginário. Os pontos no eixo de cruzamento são obtidos da equação auxiliar em s^2 :

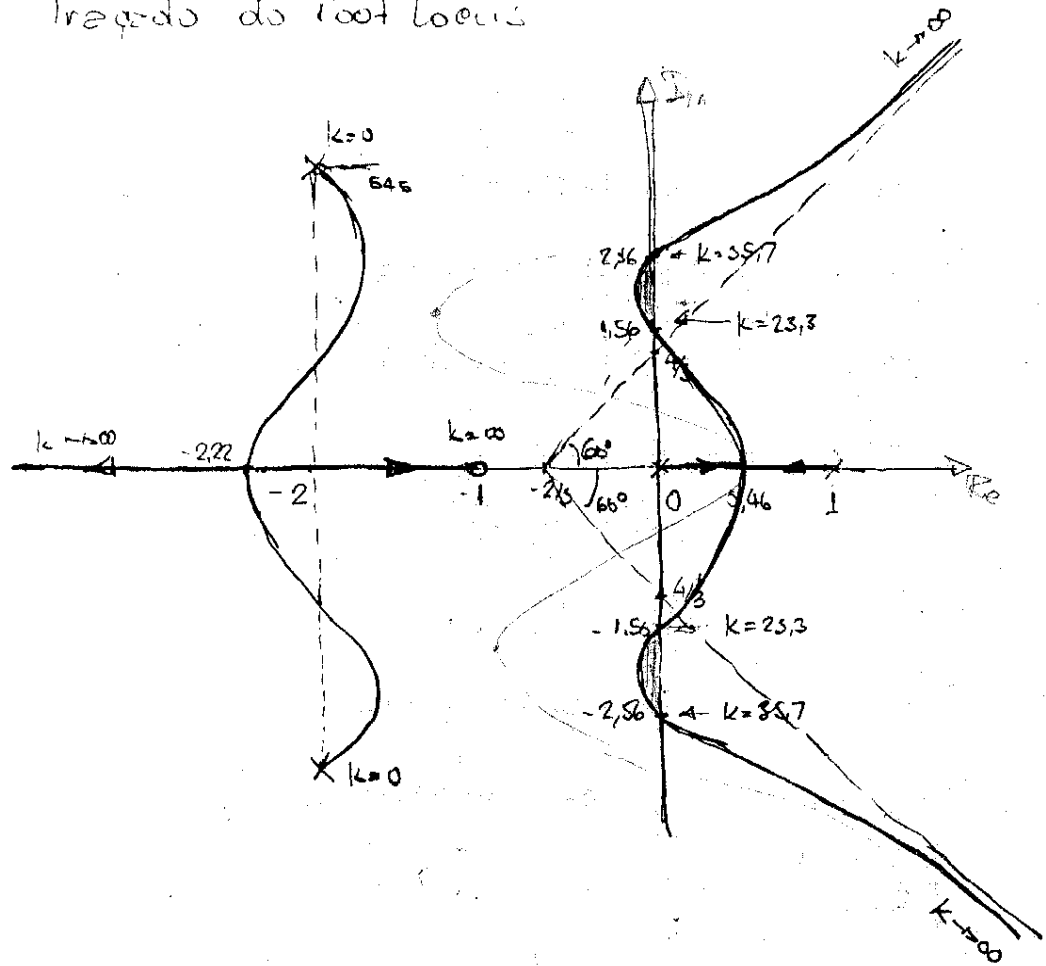
$$\frac{52-k}{3} s^2 + k = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} k = 35,7 \Rightarrow s = \pm 2,56j \\ k = 23,3 \Rightarrow s = \pm 1,56j \end{cases}$$

5) Ângulos de partida dos polos complexos

$$\theta = 180^\circ - \angle \theta_{pj} + \angle \theta_{zi}$$

$$= 180^\circ - 120^\circ - 130,5^\circ - 90^\circ + 106^\circ \Rightarrow \theta = -54,6^\circ$$

⑥ Traçado do Root Locus



O sistema só será estável para $23,3 < k < 35,7$

13.2. O ROOT LOCUS COM VARIAÇÃO DE PARÂMETRO

Quando o interesse da análise recai sobre um parâmetro da função de transferência de malha aberta, o desenvolvimento deve incluir passos iniciais diferentes. Se:

$$GA = k \frac{N(s)}{D(s)} \Rightarrow \Delta(s) + kN(s) = 0 \text{ é equação característica e o RL pode ser construído variando } k$$

do o ganho k .

Suponhamos agora que, fixado um ganho, estamos interessados em saber o comportamento do sistema quando se varia um parâmetro T_p do sistema. Nesse caso, rearranja-se a equação característica do sistema:

$$D(s) + T_p N_1(s) = 0 \Rightarrow G_1 H_1 = T_p \frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

É importante notar que essa F. Transferência tem zeros e polos diferentes da F. Transferência original (G_H)

Exemplo:
$$G_H = \frac{k}{s(1+T_2 s)(s^2+s+2)}$$

Para ser montado o R.L. para variação do parâmetro T_2 ,

Equação característica: $1 + \frac{k}{s(1+T_2 s)(s^2+s+2)} = 0$

$$[s(s^2+s+2)+k] + [T_2 s^2(s^2+s+2)] = 0$$

Rearranjando: $1 + \frac{T_2 s^2(s^2+s+2)}{s(s^2+s+2)+k} = 0$

e
$$G_1 H_1 = \frac{T_2 s^2(s^2+s+2)}{s(s^2+s+2)+k}$$

Logo se segue fazer o R.L. para variação do parâmetro T_0 da mesma forma feita anteriormente.

13.3. SISTEMAS COM ATRASO PURO

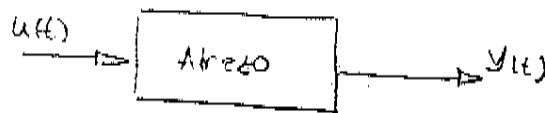
Em projetos de controle é extremamente importante considerar o sincronismo entre os diversos componentes da malha, sob o risco de não se conseguir implementar corretamente o controlador devendo usar, como critério de comparação, os atrasos para se ter disponíveis as medidas e os atrasos para se conseguir fazer a atuação em relação à dinâmica da planta na decisão de incluir ou não efeitos de atraso na representação do processo.

Via de regra, quando as constantes de tempo da planta são da mesma ordem dos tempos de atraso de medida ou de atuação, deve-se incluir modelos de atraso na representação da planta. Exemplos:

- sensores de oxigênio no controle de motores de combustão interna
- sensores nos processos fermentativos
- ciclo de atuadores em processos químicos, etc.

(1) propriedade que aparece quando se incluem mudancas de atraso e que não valem mais as regras estabelecidas anteriormente para desenho do Root locus e novas abordagens devem ser criadas.

Consideremos um sistema de atraso puro:



$$y(t) = u(t-T) \quad , \quad T = \text{tempo de atraso}$$

T. Laplace : $Y(s) = U(s) e^{-Ts}$

$d(t-T) = dt$, T constante ; $e^{-s(t-T)} = e^{-st} e^{Ts}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t-T)] &= \int_0^{\infty} u(t-T) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} u(t-T) e^{-st} e^{Ts} e^{-Ts} dt \\ &= \left[\int_0^{\infty} u(t-T) e^{-s(t-T)} d(t-T) \right] e^{-Ts} = U(s) e^{-Ts} \end{aligned}$$

Então a Função de transferência para um atraso puro é : $G(s) = e^{-Ts}$

Esta é uma função transcendental que não pode ser colocada na forma racional polinomial $N(s)/D(s)$
 Para entender isto:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$G(s) = e^{-Ts} = \frac{1}{1 + Ts + \frac{(Ts)^2}{2!} + \frac{(Ts)^3}{3!} + \dots}$$

Conclusão: um atraso puro introduz os polos na F.T. do sistema.

Se T for pequeno comparado com as outras constantes de tempo do sistema, então, é usual fazer uma aproximação:

$$e^{-Ts} \approx \frac{1}{1+Ts} \quad \text{ou} \quad e^{-Ts} \approx 1-Ts$$

Exemplo: Montar o RL para $GH = \frac{ke^{-Ts}}{s+1}$,

T não pequeno.

Eq. Característica: $1 + \frac{ke^{-Ts}}{s+1} = 0$, corresponde por exemplo, ao controle de temperatura de um forno

Nesse caso, a condição de ângulo se torna

$$\angle \frac{ke^{-Ts}}{s+1} = \angle e^{-Ts} - \angle s+1 = \pm 180^\circ(2k+1) \quad k=0,1,2,\dots$$

$$s = \sigma + j\omega \Rightarrow e^{-Ts} = e^{-\sigma T} e^{-j\omega T}$$

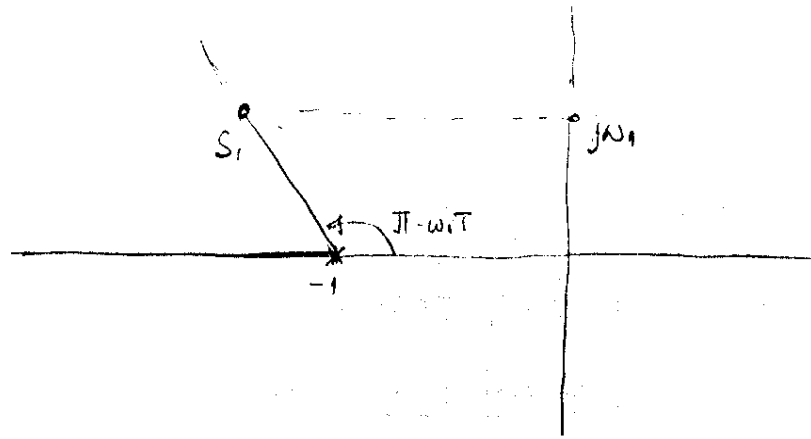
$$\angle e^{-Ts} = \angle e^{-j\omega T} = \angle \cos \omega T - j \sin \omega T = -\omega T \text{ (rad)}$$

Condição de ângulo em ($^\circ$)

$$-57,3\omega T - \angle s+1 = \pm 180^\circ(2k+1)$$

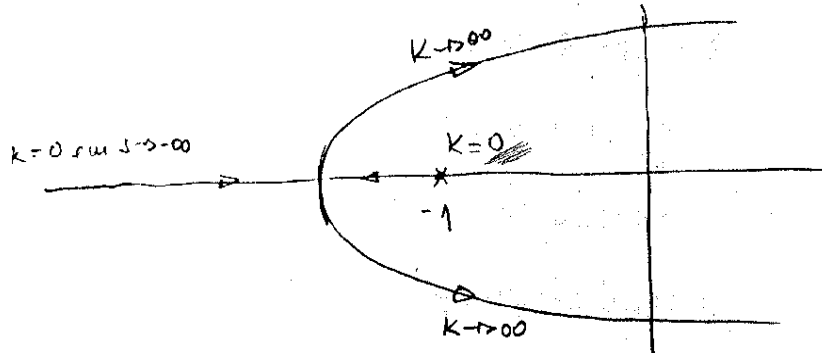
$$\angle s+1 = \pm 180^\circ - 57,3\omega T$$

Como a contribuição angular de e^{-Ts} é zero para $\omega=0$, o erro real de -1 a $-\infty$ faz parte do RL



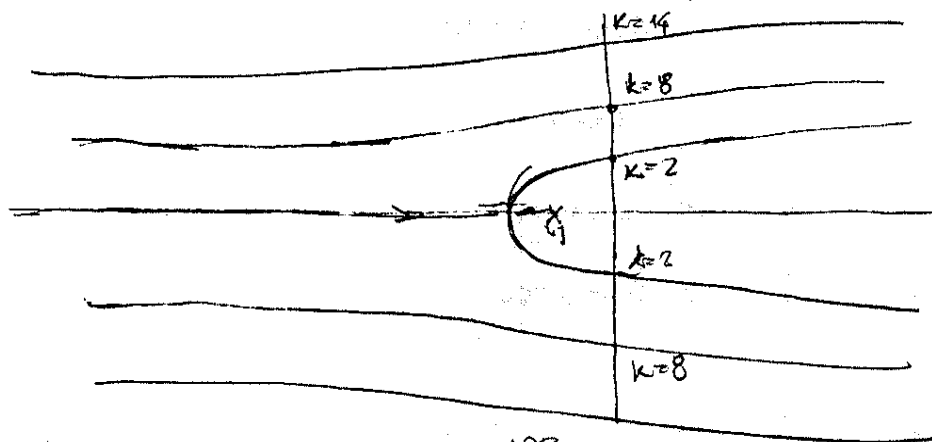
Tomando um valor $\omega = \omega_1$, traça-se uma reta passando por $s = -1$ com ângulo $\pi - \omega_1 T$. A interseção desta reta com a reta $j\omega_1$ define um ponto do CR

Então variando ω formamos



Condição de módulo $|s+1| = k e^{-T\sigma}$

Embora existam infinitos ramos no R.L o mais importante é o que fica entre $j\pi$ e $-j\pi$. O valor de k crítico nesse ramo é $k=2$. O RL fica:



14 MÉTODOS DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA (BODE E NYQUIST)

Resposta em frequência de um sistema deve ser entendida como a resposta em regime permanente a uma entrada senoidal.

Métodos de resposta em frequência são largamente utilizados para projeto e análise de sistemas de controle. Nesse caso, varia-se a frequência do sinal de entrada na faixa de interesse para o projeto e estuda-se a resposta obtida. As vantagens do uso desses métodos são

- não é necessária a obtenção das raízes da equação característica,
- podem ser utilizados para levantar características do sistema por testes simples com equipamentos baratos e precisos;
- podem ser aplicados a sistemas com atraso ou com incertezas na planta \Rightarrow identificar o sistema.
- metodologia pode ser estendida para casos não lineares, etc.

Saídas em regime para entradas senoidais: Considere uma função $F(s)$, que pode representar $G(s)U(s)$, ou a FT. de um componente, e um sinal de entrada senoidal

$$r(t) = B \cos(\omega t + \beta)$$

A parte forçada da resposta é também senoidal com a mesma frequência ω da entrada. A amplitude e o ângulo de fase da resposta são, logicamente, diferentes da entrada e pode-se escrever:

$$y(t) = y_{\text{homogeneo}}(t) + y_{\text{forçada}}(t) = y_{\text{homog}}(t) + C \cos(\omega t + \delta')$$

$$r(t) = B e^{j(\omega t + \beta)} \Rightarrow \text{Re}[r(t)] = B \cos(\omega t + \beta)$$

$$y(t) = C e^{j(\omega t + \delta')} \Rightarrow \text{Re}[y(t)] = C \cos(\omega t + \delta')$$

Então:

$$\frac{y(t)}{r(t)} = \frac{C e^{j(\omega t + \delta')}}{B e^{j(\omega t + \beta)}} = \frac{C}{B} e^{j(\delta' - \beta)} = F(s=j\omega)$$

$$y_{\text{forçada}}(t) = C \cos(\omega t + \delta') = A(\omega) B \cos[\omega t + \beta + \Phi(\omega)]$$

onde, o módulo de $F(s)$, avaliado em $s=j\omega$, é:

$$A(\omega) = |F(s=j\omega)| = \frac{C}{B}$$

e o ângulo em $s=j\omega$ é dado por:

$$\Phi(\omega) = \angle F(s=j\omega) = \delta' - \beta$$

Exemplo: $F(s) = \frac{6}{s+4}$

e o sinal de entrada é $x(t) = 3 \cos(7t + 20^\circ)$

$$s = j\omega \Rightarrow F(s = j\omega) = \frac{6}{7j + 4} = 0,74 e^{-j60^\circ}$$

Então $C = (0,74)(3) = 2,22$
 $\delta = 20^\circ + (-60^\circ) = -40^\circ \Rightarrow y_{\text{forç}}(t) = 2,22 \cos(7t - 40^\circ)$

Quando uma f.t. é forçada por uma entrada senoidal, a amplitude normalizada é:

$$A(\omega) = \frac{\text{amplitude saída senoidal}}{\text{amplitude entrada senoidal}} = |F(s = j\omega)|$$

$A(\omega) = |F(j\omega)|$ é função da freq. de excitação, ω .

A diferença de fase entre entrada e saída é:

$\Phi(\omega) = \text{ângulo de fase entrada} - \text{ângulo de fase saída}$

$$\Phi(\omega) = \angle F(s = j\omega) = \angle F(j\omega)$$

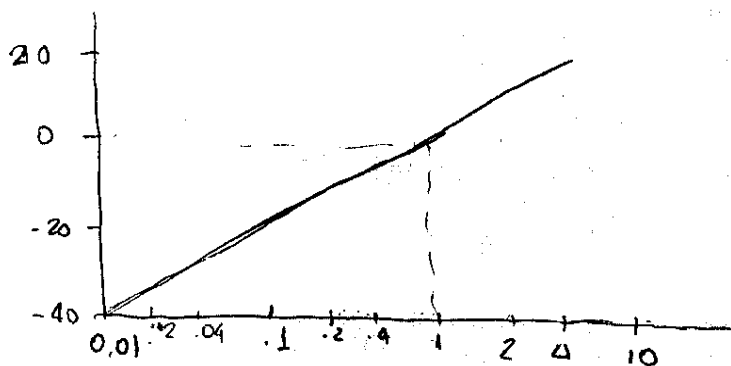
As curvas de amplitude, $A(\omega)$, e ângulo de fase, $\Phi(\omega)$, expressas em logaritmos das frequências formam o Diagrama de Bode. A representação usual do módulo logarítmico de $G(j\omega)$ é $20 \log_{10} |G(\omega)|$. A unidade usada na representação do módulo é o decibel (db).

A vantagem do uso de gráficos logarítmicos é que multiplicação de módulos se transforma em simples adição. Os gráficos são montados a partir dos fatores básicos que parecem numz FT: ganho k , fatores integrais e derivativos $s = j\omega^{\pm 1}$, fatores de 1ª ordem $(1+sT) = (1+j\omega T)^{\pm 1}$ e fatores de 2ª ordem $\left[1 + 2\zeta\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm 1} = \left[1 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{\pm 1}$

Para um ganho k :

- módulo é uma reta horizontal em $20 \log k$ db
- ângulo de fase é zero

O efeito de variar k na FT é levantar ou baixar a curva do módulo da FT pela correspondente quantidade constante sem alterar o ângulo de fase.



Note que $20 \log(k \cdot 10^n) = 20 \log k + 20n$

Com isso, aumentar k por um fator 10 corresponde a subir o valor em db por um fator 20.

Fatores integrais e derivativos $s = j\omega^{-1}$

$$20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega \text{ db}$$

$$\phi \left(\frac{1}{j\omega} \right) = -90^\circ \text{ (constante)}$$

Nos Diagramas de Bode, a relação de frequências é expressa em oitavas ou décadas.

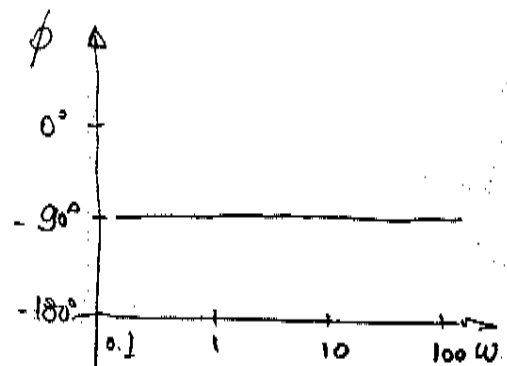
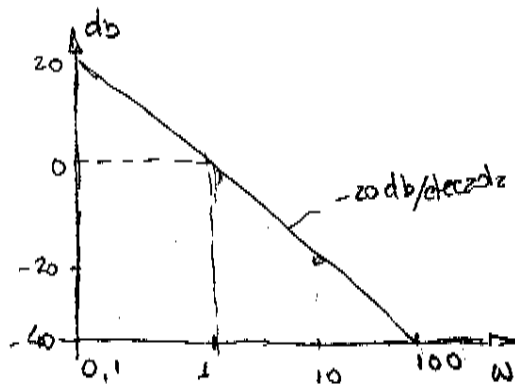
Uma OITAVA é a faixa de frequências entre ω_1 e $2\omega_1$.

Uma DÉCADA é a faixa de frequências entre ω_1 e $10\omega_1$.

Se a magnitude logarítmica $-20 \log \omega$ db for plotada contra ω em escala logarítmica tem-se uma linha reta. Para colocar o ponto (0 db, $\omega=1$):

$$(-20 \log 10\omega) \text{ db} = (-20 \log \omega - 20) \text{ db}$$

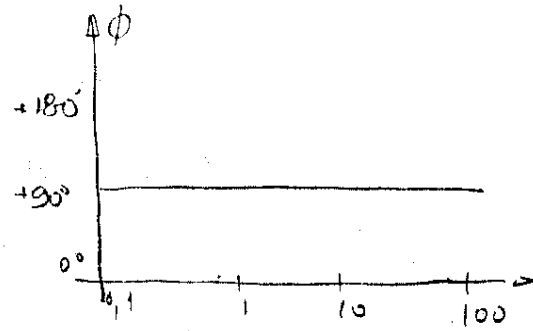
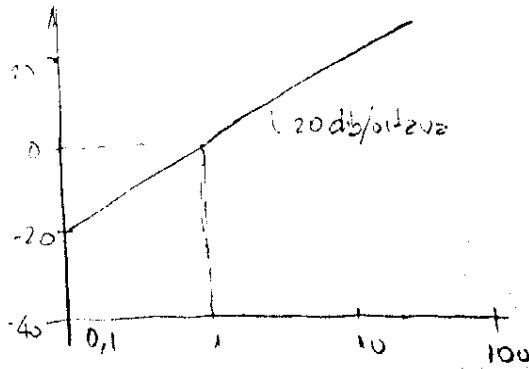
indica uma inclinação de -20 db/década (ou -6 db/oitava)



De modo análogo $20 \log |j\omega| = 20 \log \omega$ db

$$\phi(j\omega) = +90^\circ \text{ (constante)}$$

e as figuras ficam:



Para fatores $\left(\frac{1}{j\omega}\right)^n$ e $(j\omega)^n$ as inclinações das retas ficam $-20n$ db/decada e $+20n$ db/decada e os ângulos de fase são $-90^\circ \times n$ e $+90^\circ \times n$, respectivamente. As curvas de amplitude passam sempre por $(0 \text{ db}, \omega=1)$

fatores de 1ª ordem $(1+Ts)^{-1} = (1+j\omega T)^{-1}$

$$20 \log \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} \text{ db}$$

Para baixas frequências ($\omega \ll \frac{1}{T}$), pode-se aproximar:

$$-20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} = -20 \log 1 = 0 \text{ db}$$

Para altas frequências ($\omega \gg \frac{1}{T}$):

$$-20 \log \sqrt{1+\omega^2 T^2} = -20 \log \omega T \text{ db}$$

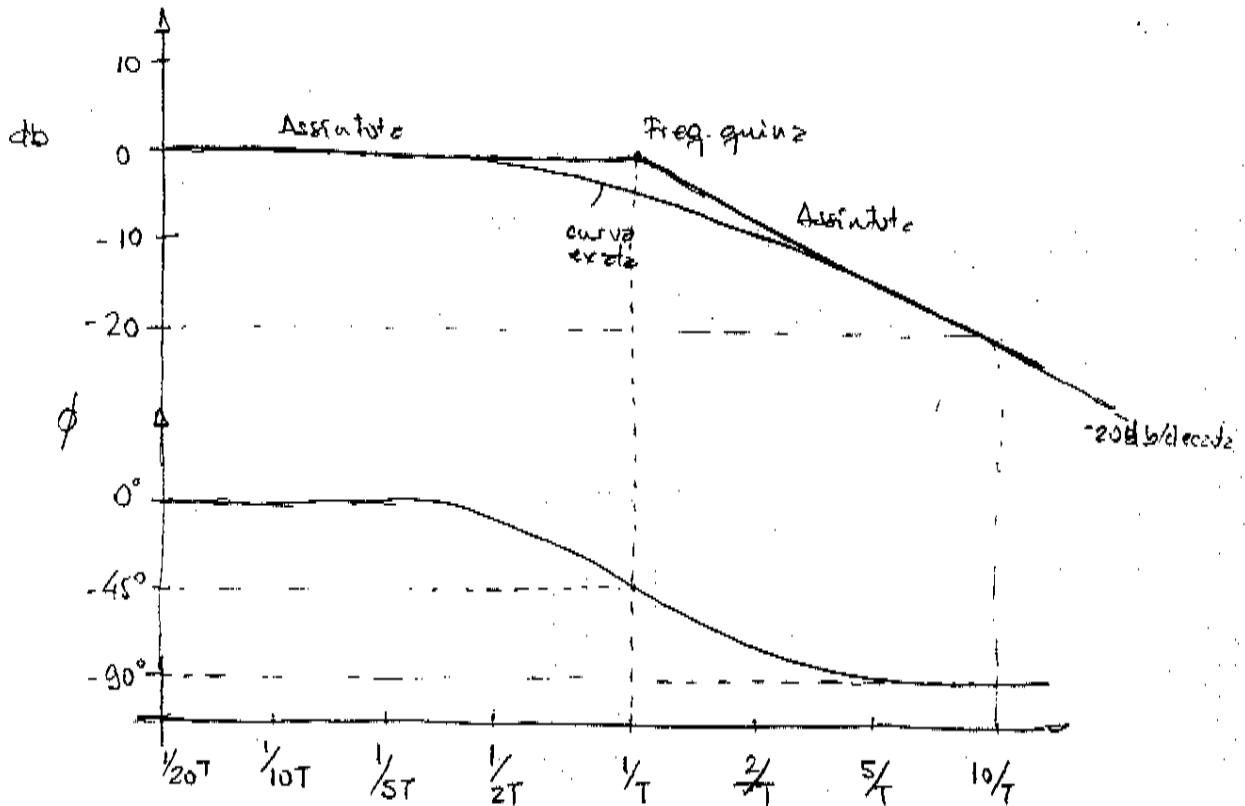
Isto mostra que a representação de uma resposta em frequência do fator $(1+j\omega T)^{-1}$ pode ser aproximada por 2 assíntotas retas. A frequência onde as assíntotas se encontram é chamada frequência de quina e ocorre para $\omega = 1/T$.

O ângulo de fase exato é : $\phi = -\arctg \omega T$

Para $\omega = 0 \Rightarrow \phi = 0^\circ$

Para $\omega = 1/T \Rightarrow \phi = -\arctg 1 = -45^\circ$

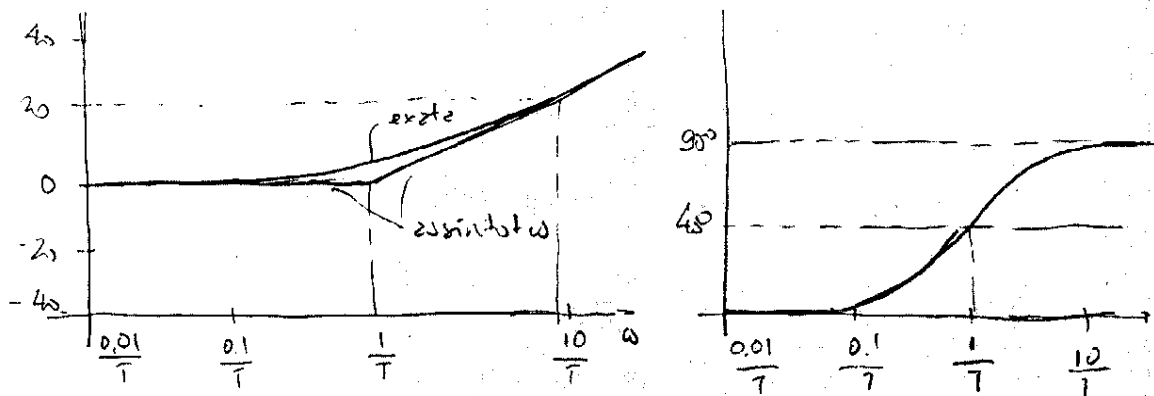
Para $\omega \rightarrow \infty$, o ângulo de fase $\rightarrow -90^\circ$



O erro na curva de amplitudes causado pelo uso das assintotas é máximo na frequência de corte e é aproximadamente igual a -3 dB ($-20 \log \sqrt{1+1} + 20 \log 1 = -10 \log 2 = -3.03\text{ dB}$). Os erros em frequências uma oitava acima ($\omega = 2/T$) e uma oitava abaixo ($\omega = 1/2T$) são aproximadamente iguais a -1 dB . O cálculo exato desses erros leva a -0.97 dB .

Uma F.T. $\left(\frac{1}{1+j\omega T}\right)$ tem características de um filtro passa baixa a saída segue fielmente uma entrada senoidal em baixas frequências, mas, à medida que a frequência de entrada aumenta, a saída não consegue seguir a entrada. Em altas frequências, o fase do sinal de entrada é distorcida na saída (90°)

Para uma FT $(1+Ts) = (1+j\omega T)$ as curvas apresentam mudança de sinal



Para termos a forma $(1+j\omega T)^{\pm n}$, uma construção semelhante pode ser feita. A frequência de quise continua em $\omega = \frac{1}{T}$ e a única mudança ocorre na assíntota de alta frequência que terá uma inclinação de $\pm 20n$ dB/déc

$$\text{Fatores de 2ª ordem } \left[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2 \right]^{\pm 1}$$

Se $\zeta \geq 1$, um fator de 2ª ordem é o produto de 2 fatores de 1ª ordem com polos ou zeros reais

Se $0 < \zeta < 1$, tem-se o produto de 2 fatores com raízes complexas conjugadas. Como:

$$20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

Para baixas frequências, $\omega \ll \omega_n$ $-20 \log 1 = 0 \text{ db}$

e, portanto, a assíntota de baixa frequência é uma reta horizontal em 0. Para altas frequências, $\omega \gg \omega_n$:

$$-20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \text{ db}$$

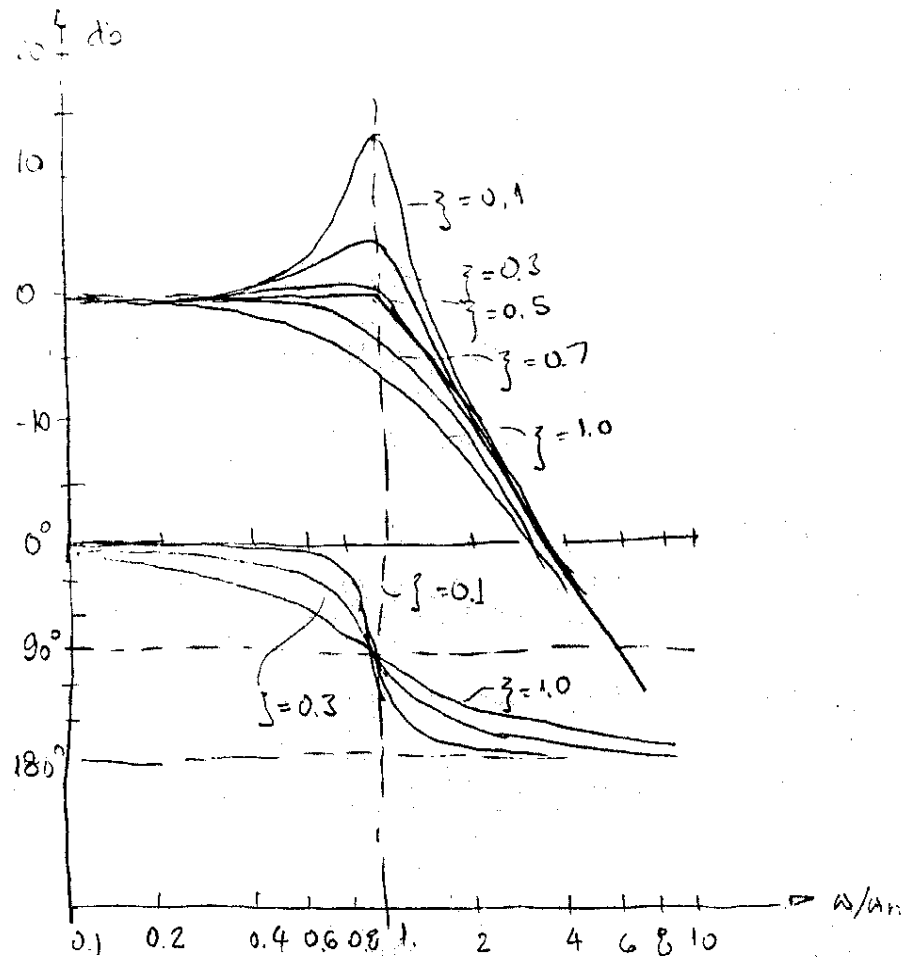
e a assíntota é uma reta de inclinação -40 db/década já que

$$-40 \log \frac{10\omega}{\omega_n} = -40 - 40 \log \frac{\omega}{\omega_n}$$

As assíntotas de baixa e alta frequências se interceptam em $\omega = \omega_n$ já que:

$$-40 \log \frac{\omega}{\omega_n} = -40 \log 1 = 0 \text{ db}$$

As assíntotas são independentes de ζ . Perto de $\omega = \omega_n$ ocorre um pico, cuja magnitude depende de ζ . Na aproximação por assíntotas, portanto, existe um erro cujo módulo depende de ζ . Esse erro é tanto maior quanto menor for ζ .



O ângulo de fase de um termo quadrático $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$ é dado por

$$\phi = -\text{tg}^{-1} \left[\frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right]$$

e portanto depende de ω_n e de ζ . Para $\omega = 0$, $\phi = 0^\circ$, Na freq. crítica $\omega = \omega_n$, $\phi = -90^\circ$, isto que

$$\phi = -\text{tg}^{-1} \left[\frac{2\zeta}{0} \right] = -\text{tg}^{-1} \infty = -90^\circ$$

Para $\omega \rightarrow \infty$, $\phi \rightarrow -180^\circ$

Os mesmos resultados podem ser aplicados para o fator $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{+1}$. Basta inverter os sinais de módulo e

do ângulo

Uma última observação sobre as características de uma função de transferência deve ser feita em relação às frequências ressonantes e os valores de pico nesse caso. Frequências ressonantes são os pontos onde $|G(j\omega)|$ tem picos. No caso de um sist. 2ª ordem:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

o valor de pico ocorre quando o denominador é mínimo.

$$g(\omega) = \left[\frac{\omega^2 \cdot \omega_n^2 (1 - 2\zeta^2)}{\omega_n^2} \right]^2 + 4\zeta^2 (1 - \zeta^2) \Rightarrow \frac{dg(\omega)}{d\omega} = 0$$

Freqs. res.: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ $0 \leq \zeta \leq 0,707$

$\omega_r \rightarrow \omega_n$ para $\zeta \rightarrow 0$

$\omega_r < \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ $0 \leq \zeta < 0,707$

$\zeta > 0,707$ não há pico

O módulo do pico ressonante fica:

$$M_r = |G(j\omega)|_{\max} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Para $\zeta > 0,707 \Rightarrow M_r = 1$

$\zeta \rightarrow 0 \Rightarrow M_r \rightarrow \infty$, o que era de se

esperar, se um sistema não amortecido é excitado na sua frequência natural, o módulo de $G(j\omega) \rightarrow \infty$.

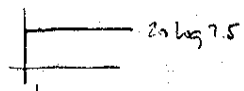
14.1. CONSTRUÇÃO DOS DIAGRAMAS DE BODE

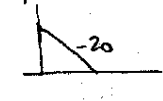
- a. Escreva a F.T. racional $G(j\omega) H(j\omega)$ em termos dos fatores básicos.
- b. Identifique as freqs. quiza de cada fator
- c. Desenhe as curvas assintotas, com suas particulares inclinações, entre as freqs. quiza

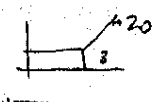
Ex.:
$$G(j\omega) = \frac{10(j\omega + 3)}{(j\omega)(j\omega + 2)[(j\omega)^2 + j\omega + 2]}$$

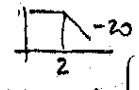
Para evitar confusão deve-se colocar $G(j\omega)$ na forma normalizada de modo que 0 db seja assintota de baixa frequência para fatores de 1º e 2º ordens.

$$G(j\omega) = \frac{10 \cdot 3 \left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}{(j\omega)^2 \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right)^2 \left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1\right]} = \frac{7,5 \left(\frac{j\omega}{3} + 1\right)}{(j\omega) \left(\frac{j\omega}{2} + 1\right) \left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1\right]}$$

Fatores: 7,5 (ganho const.) 

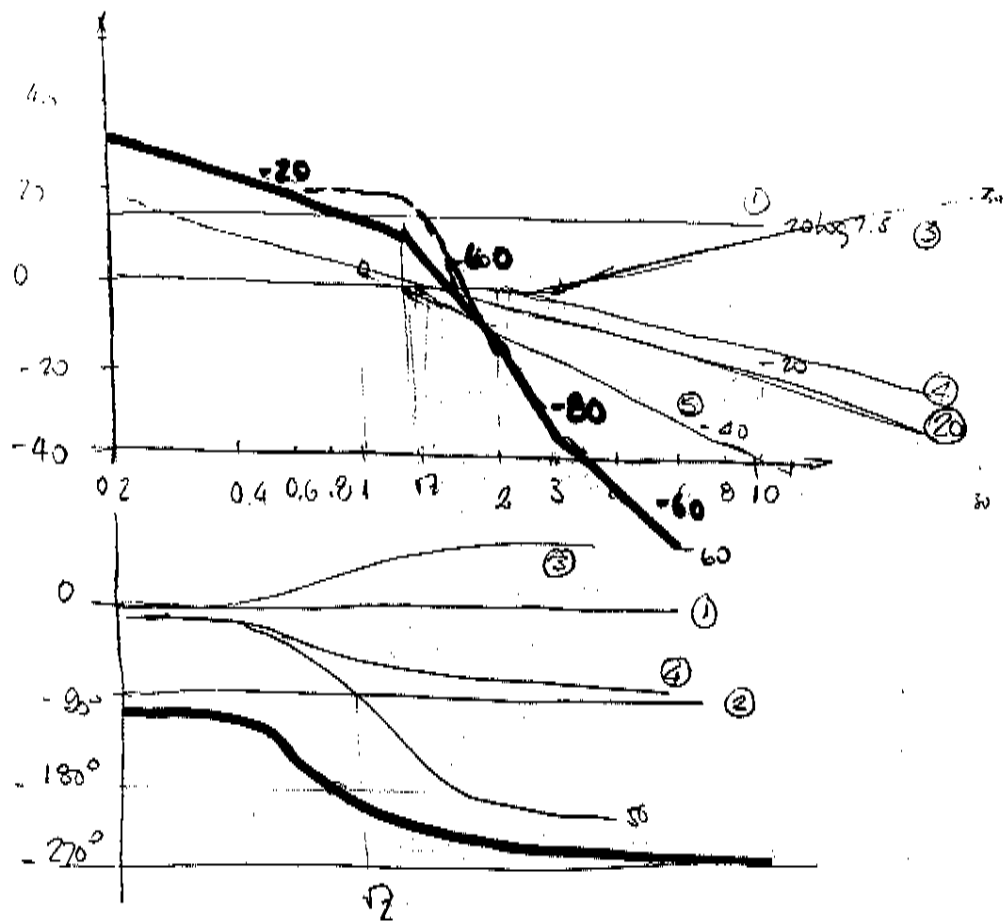
$(j\omega)^{-1}$ (fator integral) 

$(1 + j\omega/3)$ (fator 1º ordem) 

$(1 + j\omega/2)$ (" ") 

$\left[\frac{(j\omega)^2}{2} + \frac{j\omega}{2} + 1\right]$ (fator de 2º ordem) $\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 = \left(\frac{j\omega}{2}\right)^2 \\ \Rightarrow \omega_n^2 = 2 \end{array} \right.$

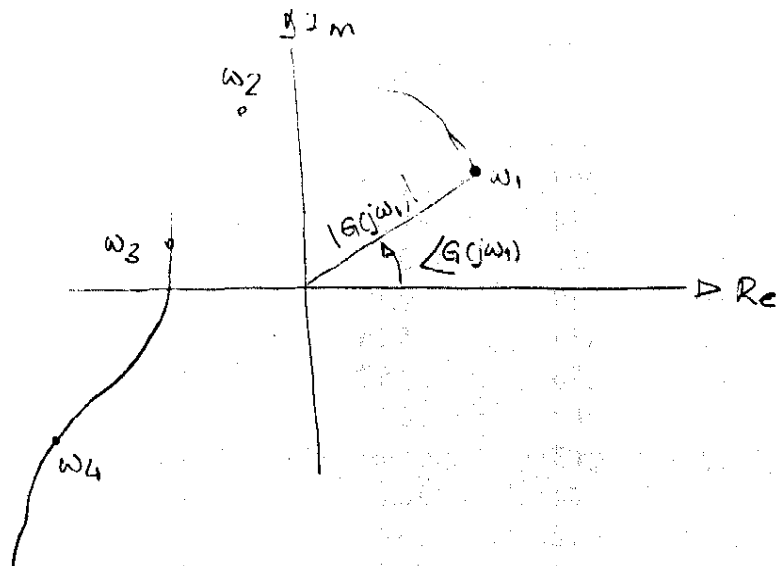
Freqs. quiza: $\omega = 3, \omega = 2, \omega = \sqrt{2} (\zeta = 0,3536)$ $\left\{ \begin{array}{l} 2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) = \frac{j\omega}{2} \\ \frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_n}{4} \end{array} \right.$



14.2. GRÁFICOS POLARES: CRITÉRIO DE NYQUIST

Uma outra representação para a resposta em frequência de um sistema pode ser feita com a utilização de gráficos polares da função de transferência.

O gráfico polar de $G(j\omega)$ é uma representação do módulo $|G(j\omega)|$ contra o ângulo de fase $\angle G(j\omega)$ com ω variando de 0 a ∞ , a que se dá o nome de Gráfico de Nyquist. O ângulo de fase positivo é medido no sentido anti-horário a partir do eixo real positivo.



$$\text{Se } G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega) \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)| \\ \angle G(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) \end{cases}$$

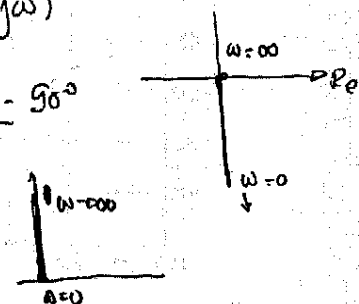
A vantagem do uso do gráfico polar é que permite colocar todas as características de resposta em frequência, para todas as frequências, num único gráfico. A desvantagem é que não permite perceber claramente a contribuição de cada fator individualmente.

Da mesma forma que nos Diagramas de Bode, pode-se montar o gráfico individual para cada fator.

2. Fatores integrais e derivativos $(j\omega)^{\pm 1}$

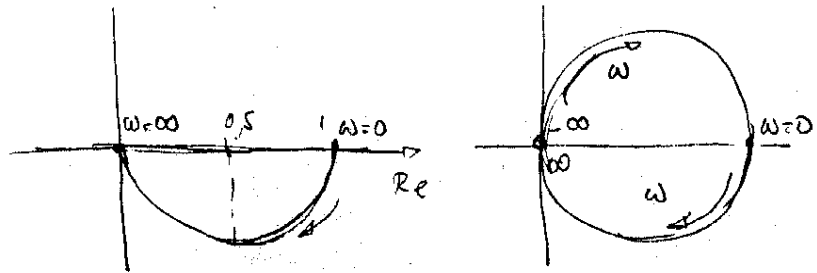
$$\frac{1}{j\omega} : G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

$$j\omega : G(j\omega) = j\omega = \omega \angle 90^\circ$$



b. Fator de 1ª ordem $(1 + j\omega T)^{-1}$

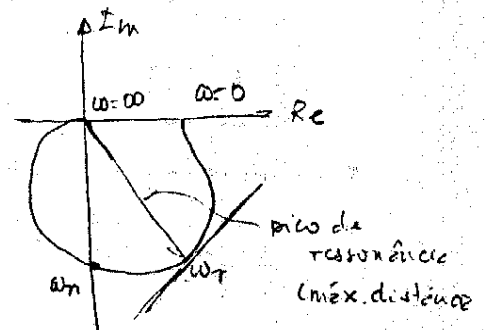
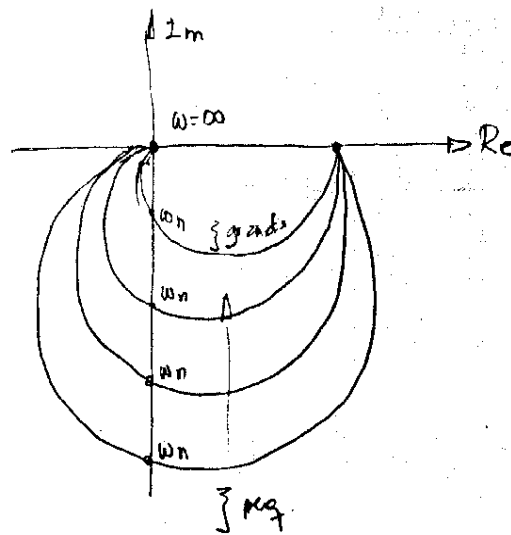
$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \angle -\tan^{-1} \omega T$$



e. Fator de 2º ordem $[1 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2]^{-1}$

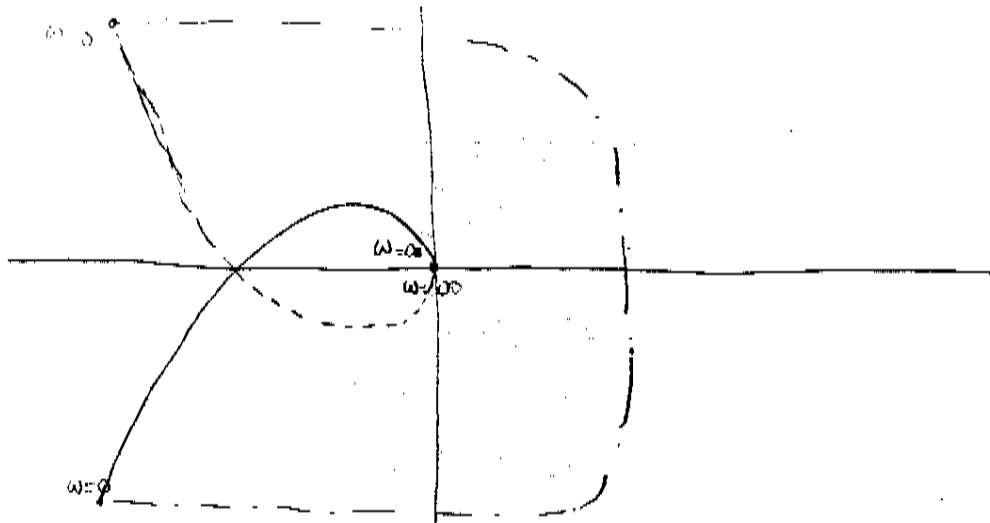
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta(j\frac{\omega}{\omega_n}) + (j\frac{\omega}{\omega_n})^2} \quad (\zeta > 0)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \angle 0^\circ ; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$$



Todos esses casos mostram como se pode passar do plano s (ou $j\omega$) para o plano $G(j\omega)$. No diagrama polar pode-se ainda incluir frequências negativas, estendendo o domínio para $-\infty < \omega < \infty$. O diagrama polar para freqs. negativas é simétrico em relação ao eixo real do

diagrama de $G(j\omega)$ para frequências positivas.

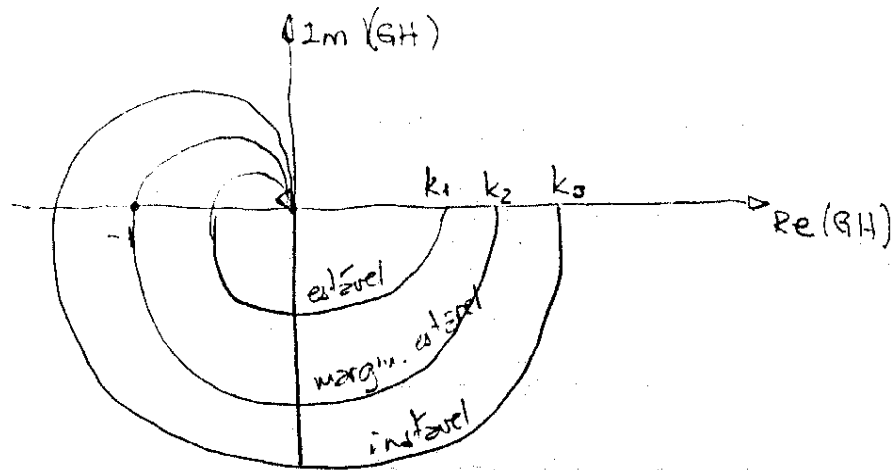


Critério de Nyquist

Se a FTMA $G(s)H(s)$ tem k polos no semiplano direito, então o sistema de malha fechada será estável se o gráfico polar da FTMA envolver o ponto $(-1, j0)$ k vezes no sentido horário.

Consequência direta: se o sistema em malha aberta é estável e, em consequência, não tem polos no semiplano direito, $k=0$, o sistema em malha fechada é estável se $G(j\omega)H(j\omega)$ não envolve o ponto $(-1, j0)$.

$$\text{Ex.: } G(s)H(s) = \frac{k}{(s^3 + s^2 + s + 1)}$$



$k = k_1$ - sistema estável

$k = k_2$ - marginalmente estável (passa por $(-1, 0j)$)

$k = k_3$ - sistema instável

Exemplo: $G(s)H(s) = \frac{k}{s(s+1)(2s+1)}$

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{k}{j\omega(j\omega+1)(2j\omega+1)}$$

$$\text{Re}(GH) = -\frac{3k}{9\omega^2 + (2\omega^2 - 1)^2}$$

$$\text{Im}(GH) = \frac{k(2\omega^2 - 1)}{9\omega^3 + \omega(2\omega^2 - 1)^2}$$

$$|GH(j\omega_p)| < 1 \Rightarrow \text{estável}$$

ω_p - frequência correspondente ao ponto de intersecção do gráfico com o eixo real negativo

Nesse ponto, $\text{Im}(GH) = 0$

$$\text{Im}(G(j\omega_p)H(j\omega_p)) = \frac{k(2\omega_p^2 - 1)}{9\omega_p^3 + \omega_p(2\omega_p^2 - 1)^2}$$

$$\Rightarrow 2\omega_p^2 - 1 = 0 \Rightarrow \omega_p = 1/\sqrt{2} \text{ rad/s}$$

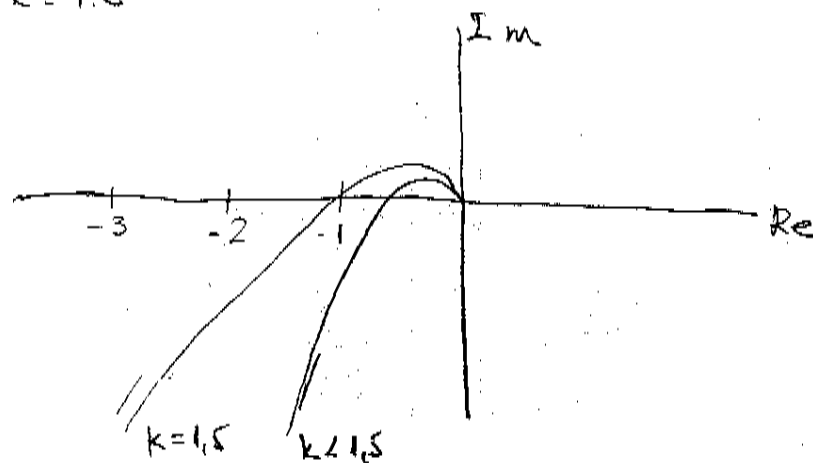
Agora, a parte real deve ser menor que 1 para $\omega = \omega_p$

$$|\text{Re}(G(j\omega_p)H(j\omega_p))| < 1$$

$$\frac{3k}{9\omega_p^2 + (2\omega_p^2 - 1)^2} = \frac{3k}{9\omega_p^2} = \frac{3k}{9/2} < 1$$

$$6k < 9 \Rightarrow 0 < k < 1,5 \text{ (valor)}.$$

Para $k = 1,5$



14.3. ROBUSTEZ E MARGENS DE ESTABILIDADE

Quando projetamos, ou no jargão de controle, sintetizamos, uma lei de controle para algum processo, estamos mexendo apenas com o modelo matemático do sistema. Se o modelo matemático é bom, o controlador é

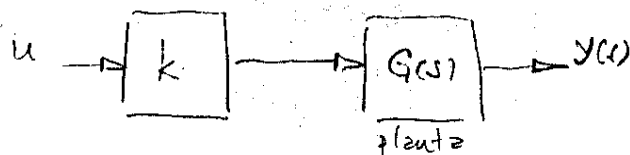
sem. Como não há modelo matemático que consiga prever o comportamento exato do sistema, sempre vai ocorrer diferença entre o comportamento real e o comportamento previsto durante o projeto. Deve-se ainda levar em conta que existem envelhecimento natural do sistema e do controlador e outros fatores que causam degradação.

Uma das vantagens da implementação é que ela confere um certo grau de Robustez ou IMUNIDADE a incertezas e a variações do processo.

SENSITIVIDADE (S) de um processo a variações em um dos parâmetros é maneira de quantificar essa robustez. Supondo que a função transferência é dada por $H(s, \alpha)$ onde α é algum parâmetro sujeito a variações, define-se $S(\alpha)$ como:

$$S(\alpha) = \frac{1}{H(s)} \frac{\partial H(s, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{H(s)} \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{H(s, \alpha + \Delta \alpha) - H(s, \alpha)}{\Delta \alpha}$$

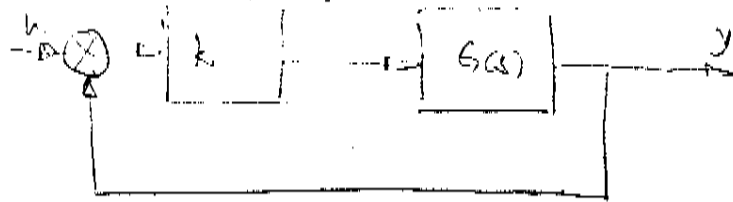
Consideremos agora o sistema em malha aberta:



$$\text{PT: } H(s) = kG(s) \rightarrow S_0(k) = \frac{1}{A_0} \frac{\partial A_0}{\partial k} = \frac{1}{kG(s)}$$

$$S_0(k) = \frac{1}{k}$$

Se a malha for fechada



$$H_c(s) = \frac{kG(s)}{1+kG(s)} \Rightarrow S_c = \frac{1}{\frac{kG(s)}{1+kG(s)}} = \frac{1+kG(s)}{kG(s)}$$

$$S_c = \frac{1}{k[1+kG(s)]}$$

$$\text{Então } \frac{S_c}{S_o} = \frac{1/k[1+kG(s)]}{1/k} \Rightarrow \frac{S_c}{S_o} = \frac{1}{1+kG(s)}$$

Portanto, a realimentação tem o efeito de reduzir a sensibilidade a variações de ganho por um fator recíproco à função característica do sistema. Do ponto de vista de velocidade de resposta e imunidade à variação dos parâmetros, a função $1+kG(s)$ deveria ser grande em todas as frequências. Por motivos práticos, isto não é objetivo de projeto. O principal motivo é que a F.T. de toda planta real é "passa-baixas", tendendo a zero quando $\omega \rightarrow \infty$. Nesse caso, a F.T. $\rightarrow 0$ e a função retorna $\rightarrow 1$. O problema prático de interesse é justamente fazer a F.T. $\rightarrow \infty$ e a função de retorno $\rightarrow 1$ de maneira

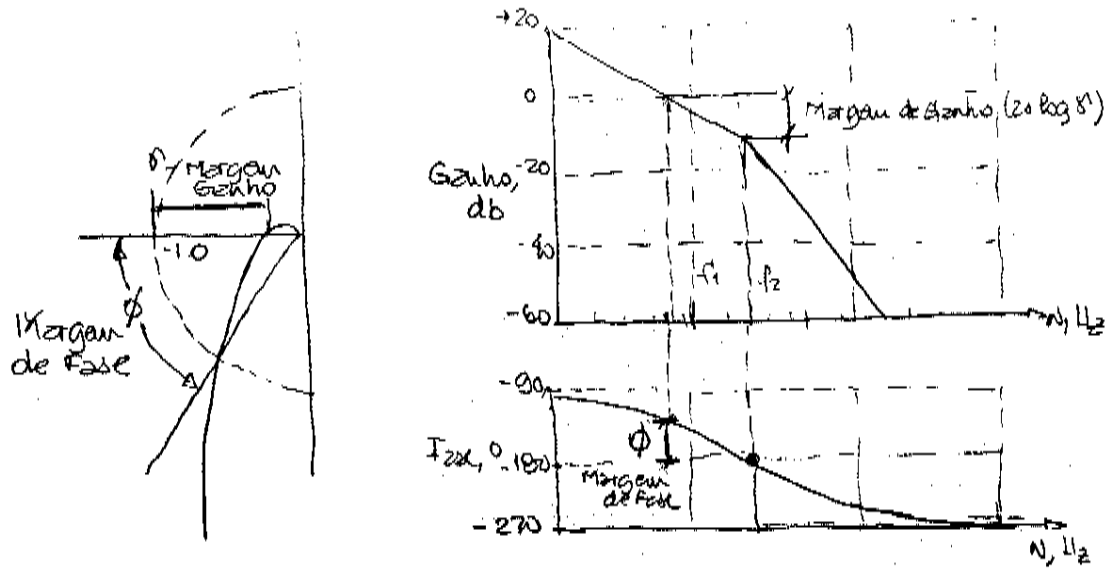
comportado, sem instabilizar o sistema. A consequência disso se reflete no ângulo de fase. O aumento da amplitude da malha de ganho é acompanhado de uma de fase em angular. Mais ainda, deve-se evitar que a função de retorno chegue perto de zero. Isto faz o sistema instável. Num projeto prático é necessário prever margens de estabilidade e reservas

Margens de ganho e de fase são as margens de estabilidade mais comuns

MARGEM DE GANHO é a quantidade que a malha de ganho pode ser mudada na frequência em que o defasagem é 180° , sem reduzir a função de retorno a zero

MARGEM DE FASE é a quantidade de atraso de fase que pode ser adicionado à FTMA, na frequência em que a amplitude é unitária, sem fazer a função de retorno chegar a zero.

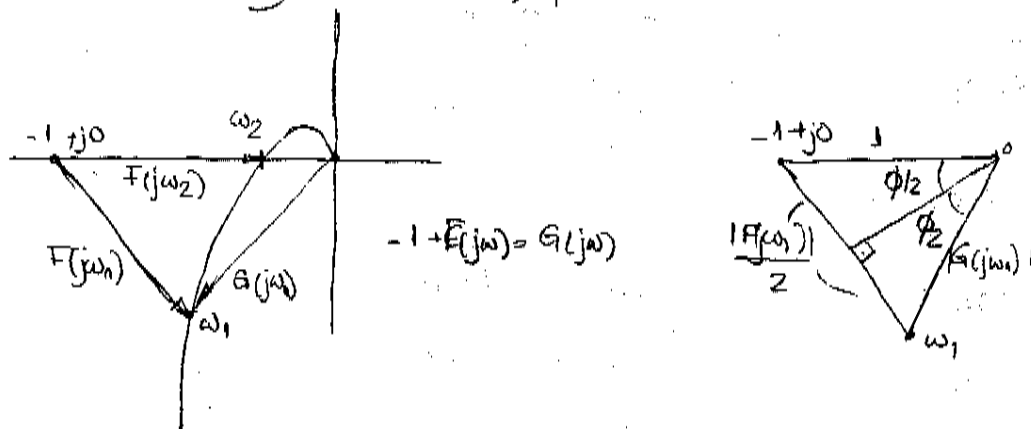
Margens de ganho e fase são medidas de estabilidade relativa do sistema e podem ser obtidas dos gráficos de Bode ou Nyquist



Quando se conhecem margens de ganho e fase, o ganho k da malha é admitido unitário. Nesse caso, margens de ganho e fase podem ser expressas em termos do módulo da função característica:

$$F(j\omega) = 1 + G(j\omega) \quad (\text{lembre-se } k=1)$$

do diagrama de Nyquist:



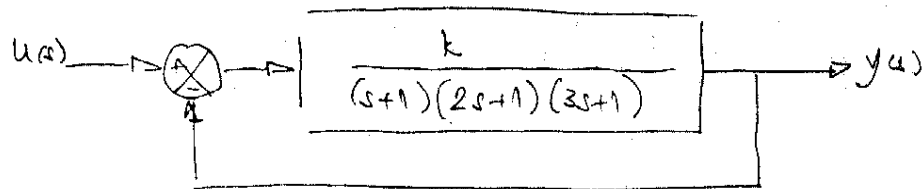
Então :

$$\delta = |F(j\omega_2)| = |1 + G(j\omega_2)| \quad \theta_G(\omega_2) = 180^\circ$$

$$\phi = 2 \arcsin \left| \frac{F(j\omega_1)}{2} \right| \quad |G(j\omega_1)| = 1$$

Exemplo:

Determine o ganho k de malha aberta para que o sistema da Figura seja estável com margem de ganho $\delta \geq \frac{1}{1.2}$ e margem de fase $\phi \geq 45^\circ$



FTMA: $k \cdot G(s) = \frac{k}{6s^3 + 11s^2 + 6s + 1}$ (ou $G_H = kG(s)$)

$s = j\omega \Rightarrow kG(j\omega) = \frac{k}{(1 - 11\omega^2) + 6j\omega(1 - \omega^2)}$

$kG(j\omega) = \frac{k[(1 - 11\omega^2) - 6j\omega(1 - \omega^2)]}{[(1 - 11\omega^2)^2 + 36\omega^2(1 - \omega^2)^2]}$

Freq. ω_p onde o ângulo de fase é $-180^\circ \Rightarrow \text{Im}[kG(j\omega)] = 0$

$-\frac{6kj\omega_p(1 - \omega_p^2)}{[\dots]} = 0 \Rightarrow \omega_p = 1 \text{ rad/s}$

Para $\omega_p = 1 \text{ rad/s} \Rightarrow \text{Re}[kG(j\omega)] = \text{Re}[G_H] = \frac{k(1 - 11)}{(1 - 11)^2 + 36(0)} = -\frac{k}{10}$

Como $\text{Re}[G_H] \leq 1$ para estabilidade

Como $\delta = |1 + kG(j\omega_p)| \geq \frac{1}{1.2} \Rightarrow k \leq \frac{10}{1.2} \Rightarrow k \leq 8,333$

Como se quer $\delta \geq \frac{1}{1.2}$ então $\frac{k}{10} + \delta = 1 \Rightarrow \delta = 1 - \frac{k}{10} \Rightarrow 1 - \frac{k}{10} \geq \frac{1}{1.2} \Rightarrow \frac{k}{10} \leq \frac{0.2}{1.2} \Rightarrow k \leq 1.667$

Frequências ω_g onde o módulo é 1 $\angle G_H = -180^\circ + 45^\circ$

$$\angle G_H(j\omega_g) = -135^\circ \quad \text{para satisfazer } 45^\circ \text{ de MF}$$

O valor de ω_g pode ser obtido em

$$\angle G_H(j\omega_g) = \angle 1 + kG(j\omega_g) = -\arg \left(\frac{\text{Im } G_H}{\text{Re } G_H} \right)$$

$$\angle G_H(j\omega_g) = -\arg \left(\frac{6\omega_g(1-\omega_g^2)}{1-11\omega_g^2} \right) = -135^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{6\omega_g(1-\omega_g^2)}{1-11\omega_g^2} = 1$$

$$e \quad 6\omega_g^3 + 11\omega_g^2 - 6\omega_g - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_g = 0,547 \text{ rad/s (as outras raízes são complexas)}$$

Nesta frequência $|G_H(j\omega)| = |1 + kG(j\omega)| = 1$

$$\frac{k}{\left\{ [1-11\omega_g^2]^2 + 36\omega_g^2(1-\omega_g^2)^2 \right\}^{1/2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 3,27}$$

Portanto $\boxed{k = 3,27}$ é o melhor valor que satisfaz a MG e a MF estabelecidas.

Um último comentário: em aplicações típicas de sistemas de controle, valores mínimos aceitáveis são:

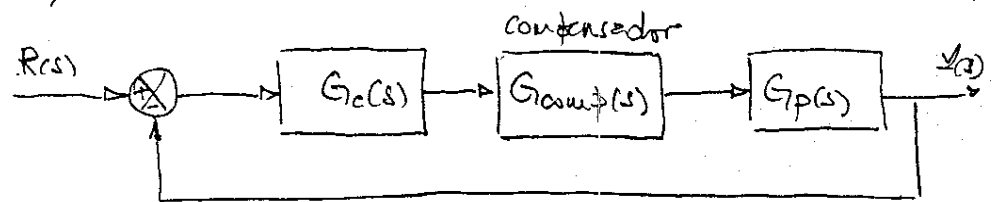
- 60% a 80% de MG (1,6 a 3,5db)
- 30° a 45° de MF

14.4. COMPENSADORES

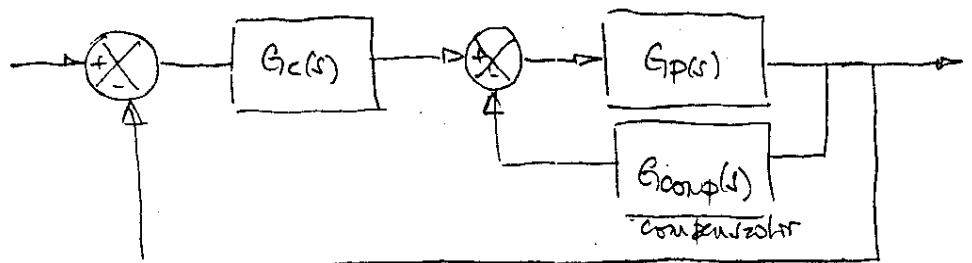
Em várias aplicações é difícil, senão impossível, atender requisitos de projeto relativos a resposta transitória e erro em regime permanente pelo ajuste de parâmetros de controladores tipo PID. Nesse caso, deve-se incluir no projeto dispositivos que modifiquem as características de malha aberta e melhorem o desempenho do sistema. A técnica é chamada COMPENSAÇÃO e os dispositivos associados são ditos COMPENSADORES. Os parâmetros de um compensador não são ajustáveis.

Existem várias maneiras de se inserir um compensador numa malha típica. Maneiras usuais são as seguintes

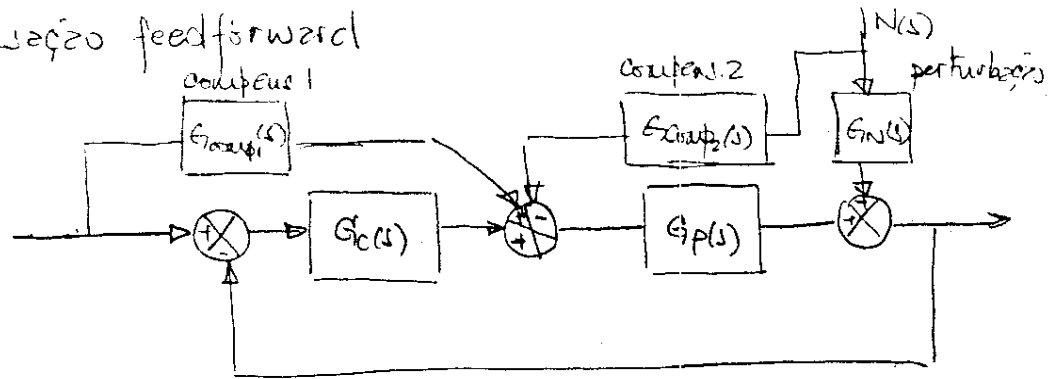
① Compensação em série.



② Compensação por realimentação



③ compensação feedforward



Compensação feedforward é usada para melhorar a velocidade de resposta do sistema a perturbações quando essas perturbações podem ser medidas.

TIPOS COMUNS DE COMPENSADORES

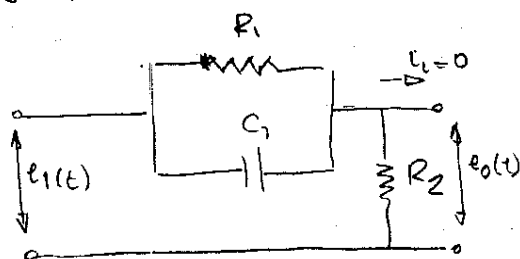
Nome	F.T	Efeito no Erro	Efeitos Estabil.
Série Integral	$G_{comp} = \frac{k}{s}$	Melhora muito	Piora muito
Série PI	$G_{comp} = \frac{k(s+a)}{s}$	Melhora muito	Reduz
Atraso em série	$G_{comp} = \frac{k(s+a)}{(s+b)}$ $b < a$	Melhora	Reduz
Avanço em série	$G_{comp} = \frac{k(s+a)}{s+b}$ $b > a$?	Melhora
Avanço-atraso em série	$G_{comp} = k \left(\frac{s+a}{s+b} \right) \left(\frac{s+c}{s+d} \right)$ $b < a \quad d > c$	Melhora	Melhora
Rezhimentação velocidade	$G_{comp} = 1 + As$?	Melhora
PID	$G_{comp} = \frac{k(s^2 + as + b)}{s}$	Melhora muito	Melhora

Compensadores podem ser construídos com arranjos mecânicos, elétricos, fluidicos (hidráulicos ou pneumáticos).

Vamos examinar alguns tipos: 1) um compensador de avanço tem Função de Transferência:

$$G_{comp}(s) = \alpha \frac{s + 1}{\alpha s + 1} \quad \alpha < 1$$

pode ser realizado por



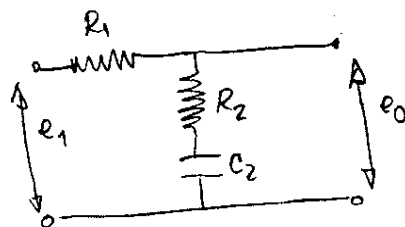
$$G_{comp}(s) = \frac{E_0(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{R_1 C_1 s + 1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C_1 s + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (< 1) \\ \beta = R_1 C_1 \end{array} \right.$$

2) um compensador de atraso:

$$G_{comp}(s) = \frac{s + 1}{\beta s + 1} \quad \beta > 1$$

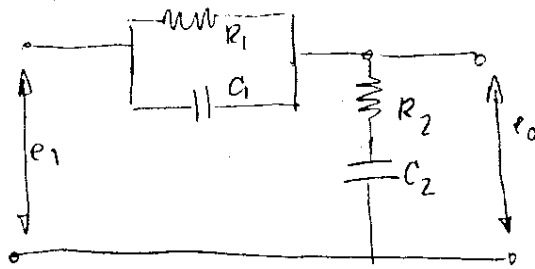
realização



$$G_{comp}(s) = \frac{E_0(s)}{E_1(s)} = \frac{R_2 C_2 s + 1}{\frac{R_1 + R_2}{R_2} R_2 C_2 s + 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{R_1 + R_2}{R_2} \\ \beta = R_2 C_2 \end{array} \right.$$

3) Compensador avanço-atraso (lead-lag) é feito com a combinação dos dois anteriores.



$$G_{comp} = \frac{(p_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}{[(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1) + R_1 C_2]}$$

$$G_{comp} = \left(\frac{\tau_1 s + 1}{\tau_2 s + 1} \right) \left(\frac{\delta \tau_2 s + 1}{\delta \tau_1 s + 1} \right)$$

$$\tau_1 = R_1 C_1; \quad \tau_2 = R_2 C_2; \quad \delta = 1 + \frac{R_1 C_2}{\tau_1 - \tau_2}$$

$$\tau_1 > \tau_2$$

Exemplo: Considere uma planta controlada com F.T.dada

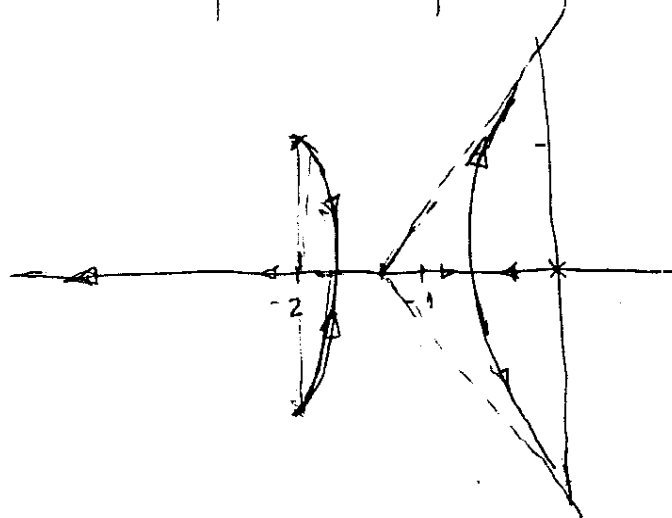
$$G_p(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)} = \frac{1}{s(s+2+j)(s+2-j)}$$

Nesse caso, temos: - assíntotas com ângulos 180° e $\pm 60^\circ$

- centroides das assíntotas $s = -\frac{4}{3}$

- para $k=3$, polos em $-2,47$; $-0,767 \pm j0,733$

O Root-locus para essa planta fica:



O coeficiente de erro a uma rampa desse sistema é:

$$k_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s k G_p(s) = \frac{k}{5} = 0.6$$

e, para uma rampa unitária, o erro em regime é

$$e_{\infty} = \frac{1}{k_1} = 1.67$$

Se esse erro em regime é muito grande, k deve ser aumentado, isto leva os polos a se aproximarem do eixo imaginário direito, reduzindo a estabilidade relativa. E ao contrário, quisermos aumentar a estabilidade, k deve ser diminuído e o erro em regime para uma rampa aumenta.

Vamos analisar o sistema com um compensador de atraso. Para o sistema não compensado, o coeficiente de erro é:

$$k_i = k \lim_{s \rightarrow 0} s^i G_p(s)$$

Com o compensador de atraso: $k_i = \lim_{s \rightarrow 0} s^i G_{comp}(s) G_p(s)$

$$\text{Fizemos } G_{comp}(s) = \frac{\alpha s + 1}{\beta s + 1} = \frac{k(s + \alpha)}{(s + b)}$$

$$k_i = k \left(\frac{b}{\alpha} \right) \lim_{s \rightarrow 0} s^i G_p(s),$$

de tal forma que a razão dos coef. de erro do sistema não compensado para o compensado fica

$$\frac{k_{i \text{ comp}}}{k_{i \text{ não comp}}} = \frac{k_{\text{comp}}}{k_{\text{não comp}}} \left(\frac{\alpha}{b} \right)$$

Um critério de projeto usual é escolher α/b igual ao

valor pelo qual o coeficiente de erro deve ser aumentado, i.e.

$$b = \frac{a}{d} \quad d > 1 \quad \Rightarrow \quad k_{i \text{ comp}} = k_{i \text{ comp}} \cdot d$$

Em geral, $d \cong 10$

O valor de a é selecionado como $a = 0.1 \omega_n$, frequência natural das raízes dominantes do sistema não compensado, com k fixo. Para este exemplo, $k=3$ e as raízes dominantes são $-0.767 \pm j0.793$

Multiplicar o coeficiente de erro à rampa por 10 significa um pequeno movimento das raízes dominantes para a direita:

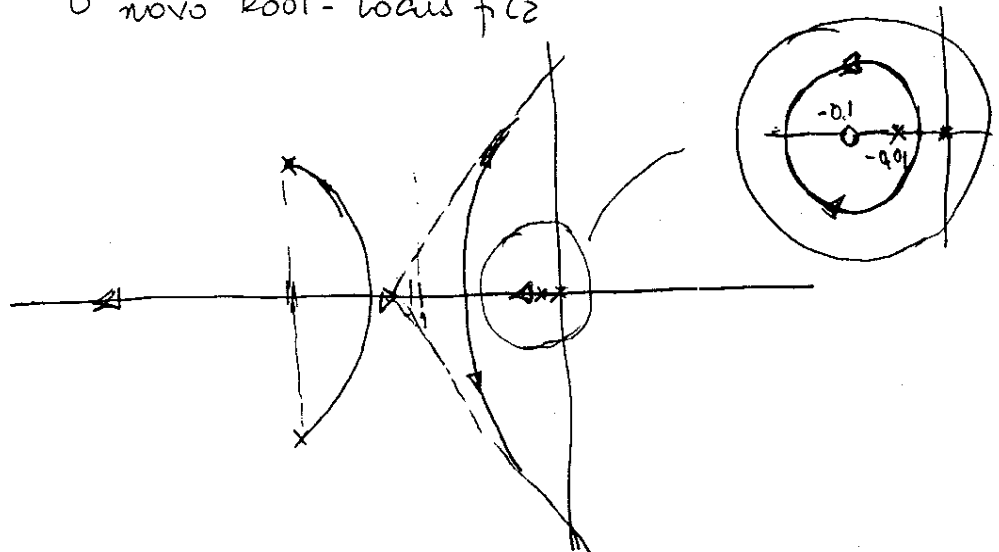
$$d = 10$$

$$k = 6$$

$$\omega_n = \sqrt{(0.767)^2 + (0.793)^2} = 1.10$$

$$a = 0.1 \times 1.10 \approx \quad \Rightarrow \quad G_c(s) = \frac{k(s+a)}{s+b} = \frac{6(s+0.1)}{s+0.1}$$

O novo Root-locus fica



Neste caso, a resposta transiente é dominada pelas polos de malha fechada $-0.729 \pm j0.705$ e o coeficiente de erro a uma rampa cresce para 6 ($e_{\infty} = 0.167$)

15. PROJETO ATRAVÉS DE VARIÁVEIS DE ESTADO

Dos capítulos iniciais do curso, vamos relembra que uma das maneiras convenientes de descrever um sistema dinâmico para o qual se pretende projetar um controlador é dado por :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

onde x é o vetor de variáveis de estado, $n \times 1$;
 u é o vetor de entradas de controle, $m \times 1$;
 y é o vetor de medidas (números), $r \times 1$;
 A, B e C são matrizes de parâmetros, a princípio conhecidas, de dimensões $n \times n, n \times m$ e $r \times n$.

A representação equivalente no domínio de frequências se faz através da relação :

$$y(s) = G(s) u(s)$$

onde $G(s)$ é uma matriz $r \times m$ de funções de transferência entre as entradas $u(s)$ e as saídas $y(s)$.

Insistimos, no início, que a representação em variáveis de estado é mais rica por preservar uma descrição da dinâmica do sistema que some, ou é embutida, na matriz $G(s)$. Relembremos, ainda, que

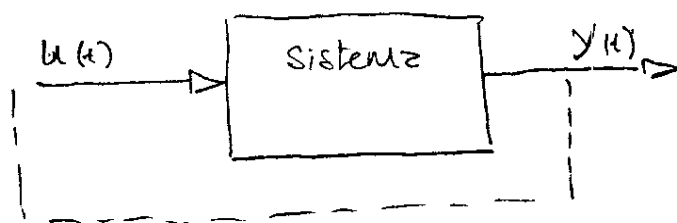
$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B$$

o que mostra uma equivalência entre as duas representações e o fato de que dados A, B e C existe uma única $G(s)$ correspondente, o que não é verdade no sentido inverso, isto é, dada $G(s)$, existem infinitas combinações de A, B e C que levam à mesma $G(s)$.

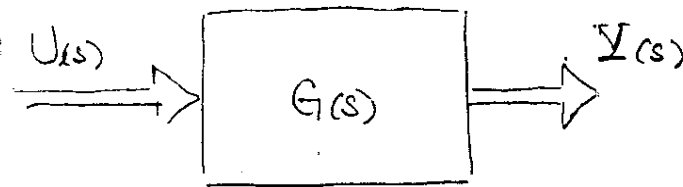
O fato de se ter à disposição toda a dinâmica e o modelo de observações para o sistema linear de variáveis de estado traz uma primeira consequência para o projetista que é de enorme interesse prático. Os conceitos de controlabilidade e observabilidade são críticos na fase de anteprojetado do sistema de controle e foram desenvolvidos por Kalman a partir de modelos de estado.

15.1. CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

O objetivo final de um projeto de controle é saber qual deve ser a ação de controle $u(t)$ dado que as observações do sistema são dadas por $y(t)$.

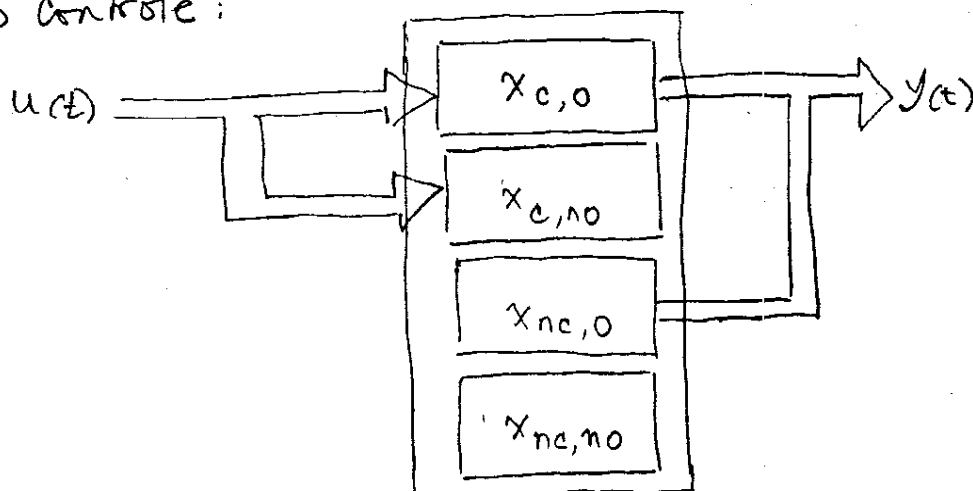


No projeto por técnicas no domínio da frequência, procura-se uma representação entrada-saída do sistema, independente (em termos) do que ocorre na planta:



$$Y(s) = G(s) U(s)$$

O problema é que a matriz de funções de transferência $G(s)$ é uma representação apenas parcial do sistema. Há uma série enorme de variáveis envolvidas no processo que são afetadas pelo controle $u(t)$ que não estão descritas no modelo e outra série, com elementos comuns mas não necessariamente coincidentes, que afetam as observações. Por último, existem outras variáveis que não afetam as saídas nem são afetadas pelo controle:



Da figura acima fica clara a importância do modelo que descreve o sistema e algumas conclusões podem ser antecipadas:

1. As ferramentas disponíveis para projeto, tanto no domínio do tempo como no de frequências, estão baseadas no vetor $x_{c,0}$ de variáveis controláveis e observáveis do sistema.

2. Se o sistema de controle afeta, além das variáveis $x_{c,0}$, também as variáveis $x_{c,n0}$, não há como prever o comportamento do sistema: as variáveis não observáveis podem instabilizar o sistema sem que o controlador se dê conta do que está acontecendo.

3. Se as variáveis realmente medidas pelos sensores são afetadas por variáveis $x_{nc,0}$, a reatimentação do erro para efeito do cálculo do controle estará incorreta e poderá gerar ações que instabilizem o sistema.

4. As variáveis $x_{nc,n0}$ não afetam o sistema controlado.

Portanto, o projeto do sistema de controle deve

levar em conta que todas as variáveis de interesse são controláveis e observáveis.

Existem testes simples para verificar se o sistema é controlável e observável. Se o sistema for não controlável, o controlador e os atuadores, traduzidos na matriz B , devem ser modificados. Se o sistema for não observável, o sistema de medida e os sensores, da matriz C , devem ser alterados etc se conseguir um projeto que atinja a controlabilidade e a observabilidade.

Voltamos ao nosso sistema original:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

Esse sistema é controlável em $t=t_0$ se for possível construir um vetor de controles $u(t)$ que transfira o sistema do estado inicial $x(t_0)$ para qualquer estado final $x(t_f)$ num intervalo finito de tempo $t_0 \leq t \leq t_f$. Se qualquer estado inicial $x(t_0)$ é controlável, então o sistema é dito **COMPLETAMENTE CONTROLÁVEL**.

Para se obter a condição de controlabilidade completa de (1) parte-se da resposta do sistema (1) de $t_0 = 0$:

$$x(t) = \underline{\Phi}(t, 0) x(0) + \int_0^t \underline{\Phi}(t, \tau) B u(\tau) d\tau \quad (2)$$

Se o sistema é controlável, pode-se transferir-lo para

$$x(t_f) = x(t_1) = 0. \text{ De (2)}$$

$$x(t_1) = \underline{\Phi}(t_1, 0) x(0) + \int_0^{t_1} \underline{\Phi}(t_1, \tau) B u(\tau) d\tau = 0$$

logo

$$\begin{aligned} x(0) &= - \underline{\Phi}^{-1}(t_1, 0) \left[\int_0^{t_1} \underline{\Phi}(t_1, \tau) B u(\tau) d\tau \right] \\ &= - \int_0^{t_1} \underline{\Phi}(0, t_1) \underline{\Phi}(t_1, \tau) B u(\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$x(0) = - \int_0^{t_1} \underline{\Phi}(0, \tau) B u(\tau) d\tau$$

Como $\underline{\Phi}(0, \tau) = e^{A(0-\tau)} = e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\tau) A^k$

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau$$

Fazendo $\int_0^{t_1} \alpha_k(\tau) u(\tau) d\tau = \beta_k$

$$x(0) = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \beta_k = - \left[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1} B \right] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Para satisfazer a relação acima, deve-se ter que a matriz de controlabilidade \mathcal{B} ($n \times nm$)

$$\mathcal{B} = \left[B \mid AB \mid A^2 B \mid \dots \mid A^{n-1} B \right]$$

seja de posto (rank) n , o que significa que é possível extrair de \mathcal{B} uma matriz $n \times n$ com determinante não

subs.

Exemplos:

$$\textcircled{1} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$n=2, m=1 \Rightarrow B \text{ é } 2 \times 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B \text{ tem posto } 1 \neq n$$

O sistema acima é não controlável

$$\textcircled{2} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$n=2, m=1 \Rightarrow B \text{ é } 2 \times 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B \text{ tem posto } 2 = n$$

O sistema acima é controlável.

exemplo.

Para definir observabilidade, incluímos o modelo

de observação:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (4)$$

Um sistema como acima é dito completamente observável se todo estado $x(t)$ pode ser obtido a partir

das observações $y(t)$ ao longo de um intervalo finito de tempo $t_0 \leq t \leq t_f$. Em outras palavras, o sistema é completamente observável se todos os estados afetam algum elemento do vetor de saídas.

Para se obter a condição de teste de observabilidade parte-se de:

$$\dot{x} = Ax$$

$$y = Cx$$

$$y(t) = Cx(t) = C \underline{\Phi}(t, t_0) x(t_0)$$

Fazendo $t_0 = 0$, sem perda de generalidade:

$$y(t) = C \phi(t, 0) x(0) = C \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k x(0)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k CA^k x(0)$$

Desdobrando:

$$y(t) = \alpha_0(t) C x(0) + \alpha_1(t) CA x(0) + \dots + \alpha_{n-1}(t) CA^{n-1} x(0)$$

Para que $y(t)$ seja unicamente determinado a partir da equação acima, deve-se ter que a matriz de observabilidade, de dimensão $m \times n$

$$\sigma = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{ou, equivalentemente } \sigma = \begin{bmatrix} C^T \\ A^T C^T \\ \vdots \\ (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix}$$

seja de posto n

Exemplo :
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

O sistema é controlável e observável?

No caso $n=2$, $m=1$ e $r=1$

$$B = [B \mid \Delta B] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hline 1 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

B tem posto 2 \Rightarrow sistema controlável

$$O = [C^T \mid A^T C^T] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline 0 & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O tem posto 2 \Rightarrow sistema observável

15.2. PROJETO DE CONTROLADORES

Existem diversas técnicas para projeto de controladores no domínio do tempo. As mais conhecidas serão vistas a seguir e são conhecidas como Alocação de Polos e Controlador Linear Quadrático.

15.2.1. MÉTODO DE ALOCAÇÃO DE POLOS

Consideramos a aplicação do método ao projeto de reguladores. Reguladores são sistemas realimen-

todos que forçam o estado, que se afasta da origem por perturbações externas, de volta à origem com velocidade satisfatória.

Uma maneira de construir controladores com essa característica é especificar (o projetista especifica) as localizações desejadas dos polos de malha fechada. Isto pode ser feito por realimentação de estado, definindo-se, a priori, uma estratégia de controle

$$u(t) = -k x(t)$$

e calculando-se em seguida a matriz de ganhos k que faz com que o sistema tenha a equação característica desejada, isto é, com os polos especificados. Note que, neste caso, a alocação engloba todos os polos de malha fechada, diferentemente da abordagem convencional que só mexe nos polos dominantes. Para que isto seja feito, o único requisito é que o sistema seja completamente controlável.

Para o sistema linear

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

a utilização de uma lei de controle $u = -kx$ leva:

$$\dot{x}(t) = (A - Bk) x(t)$$

cuja solução é dada por

$$x(t) = e^{(A-BK)t} x(0)$$

$x(0)$ é o estado inicial causado por perturbações externas.

As características de estabilidade e resposta em frequência são determinadas pelos autovalores de $A-BK$. Uma escolha conveniente de K leva a que o sistema seja assintoticamente estável, i.e., para todo $x_0 \neq 0$ é possível fazer $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

Admitindo que os autovalores de malha fechada desejados sejam $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ os passos para se determinar a matriz K são:

Passo 1. Garantir a controlabilidade do sistema.

Passo 2. Da equação característica de A :

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

determinar os valores de z_1, z_2, \dots, z_n

Passo 3. Achar a matriz de transformação T que leve o sistema a uma forma dita forma canônica controlável:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & \dots & b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

A matriz de transformação T é dada por:

$$T = B W$$

onde B é a matriz de controlabilidade $[B; AB; \dots; A^{n-1}B]$

e

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 4 Usando os autovalores que devem ser colocados escreva o polinômio característico:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n$$

Passo 5 A matriz k de ganhos de controle é calculada através de

$$k = \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n & \alpha_{n-1} - a_{n-1} & \dots & \alpha_2 - a_2 & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} T^{-1}$$

Exemplo:
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Eq. Característica $|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -20,6 & s \end{vmatrix} = s^2 - 20,6 = 0$

Raízes $s_{1,2} = \pm 4,539 \Rightarrow$ sistema instável.

Qual deve ser a matriz k para que os polos de malha fechada sejam $s = -1,8 \pm j,24$

1. Custo da matriz de controlabilidade

$$B = [B \mid \Delta B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -20,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8 tem posto 2 \Rightarrow sistema é controlável

2. Raízes da equação característica $s_{1,2} = \pm 4,539$,
coeficientes $a_1 = 2$, $a_2 = -20,6$

3. A matriz de transformação pode ser $T = I$
já que o sistema original está na forma canônica controlável

4. O polinômio característico desejado é:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = (s + 1,8 + 2,4j)(s + 1,8 - 2,4j) \\ = s^2 + 3,6s + 9 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_2$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 3,6 \quad ; \quad \alpha_2 = 9$$

5. Usando $k = [\alpha_2 - a_2 \mid \alpha_1 - a_1] T^{-1}$

$$k = [9 + 20,6 \mid 3,6 - 0] I^{-1}$$

$$k = [29,6 \mid 3,6]$$

É claro que quando são poucas variáveis, a solução pode ser obtida por substituição direta. Para esse exemplo: $k = [k_1 \quad k_2]$ e o polinômio característico desejado é

$$|sI - A + Bk| = \left[\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20,6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right]$$

$$|sI - A + Bk| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -20,6 + k_1 & s + k_2 \end{vmatrix}$$

$$= s^2 + k_2 s - 20,6 + k_1$$

Igualizando a $(s + \mu_1)(s + \mu_2) = s^2 + 3,6s + 9$ resultam

$$k_2 = 3,6 \quad \text{e} \quad k_1 - 20,6 = 9 \rightarrow k_1 = 29,6$$

como era de se esperar

15.2.2. CONTROLADORES LQ (LINEARES - QUADRÁTICOS)

O problema de se determinar o lei de controle que minimiza o Índice de Desempenho:

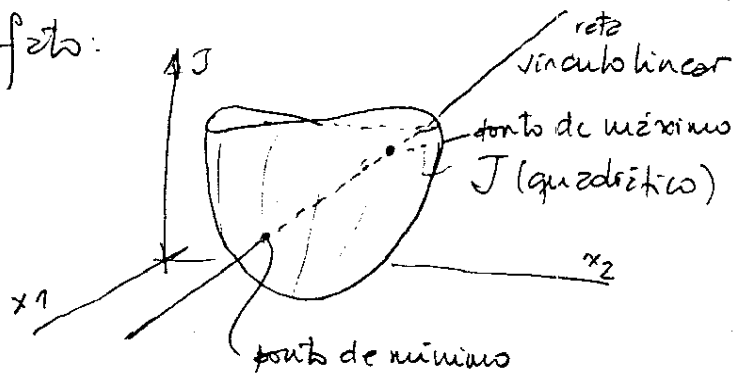
$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

associado a um sistema do tipo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

é chamado Projeto de um Controlador LQ.

Esse nome vem do fato de se minimizar um custo quadrático com o vínculo dinâmico (eqs. de movimentos lineares) linear, o que, em princípio, tem solução de fato:



A representação de figura mostra que caso estático de um custo quadrático com vínculo linear traz sempre um ponto de máximo e um ponto de mínimo. O mesmo ocorre no caso do custo e do vínculo variarem no tempo, desde que as matrizes de funções iniciais:

Q seja matriz semidefinida positiva

R seja uma matriz semidefinida positiva (e sempre inversível)

Note que as matrizes Q e R, definidas pelo projetista, ponderam o quanto se pode tolerar de erros nas variáveis de estado e quanto se pretende gastar de energia para controlar o sistema. Embora não se vá demonstrar aqui, a lei de controle que minimiza J sujeito

As equações de movimento é novamente dada por

$$u(t) = -k x(t)$$

onde a matriz k de ganhos é calculada de forma totalmente diferente do caso de alocação de polos. Substituído em J :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T k^T R k x) dt$$

$$J = \int_0^{\infty} x^T (Q + k^T R k) x dt$$

Agora admite-se que existe uma matriz P definida positiva (sempre existe se $A - Bk$ for estável) tal que

$$x^T (Q + k^T R k) x = - \frac{d}{dt} (x^T P x)$$

$$x^T (Q + k^T R k) x = - \dot{x}^T P x - x^T P \dot{x} = - x^T [(A - Bk)^T P + P(A - Bk)] x$$

Para que essa relação seja verdadeira para qualquer x :

$$(A - Bk)^T P + P(A - Bk) = -(Q + k^T R k)$$

Como R é por definição definida positiva

$$R = T^T T \quad \text{onde } T \text{ é uma matriz não singular}$$

Substituindo

$$(A - Bk)^T P + P(A - Bk) = -(Q + k^T T^T T k)$$

$$A^T P + P A + [T k - (T^T)^{-1} B^T P]^T [T k - (T^T)^{-1} B^T P] - 2 B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

A minimização de J com relação a k faz que

$$x^T [T k - (T^T)^{-1} B^T P]^T [T k - (T^T)^{-1} B^T P] x \text{ mínimo}$$

Como esse termo é não negativo, deve ir para zero, i.e.:

$$Tk = (T^T)^{-1} B^T P$$

$$k = T^{-1} (T^T)^{-1} B^T P = (T^T T)^{-1} B^T P \Rightarrow k = R^{-1} B^T P \quad (I)$$

A matriz P deve satisfazer a relação restante:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (II)$$

e o controle ótimo se calcula por

$$u(t) = -k x(t) \quad (III)$$

A equação II é conhecida como equação algébrica de Riccati para a matriz P . P é sempre simétrica e a solução dessa equação matricial envolve $n(n+1)/2$ eqs. não lineares pois há sempre um termo de 2ª ordem (P^2_{ij}) presente. Por outro lado a importância e a aplicabilidade desse método em diversos problemas de Engenharia fizeram com que qualquer pacote de computação em Dinâmica de Sistemas e Controle (MATLAB por exemplo) traga solução numérica para esse problema

Exemplo: Dê-se o nome de planta de inércia aos sistemas cuja única resistência ao movimento é dada pela sua massa (em translação) ou pelos seus momentos

das de energia. Nesse caso, as equações de movimento podem ser escritas

$$m \ddot{x} = f_{ext}(x, y, z) \quad \text{ou} \quad J_x \ddot{x} = \tau_{G,x}^{ext}(x, y, z)$$

Se essas forças externas são as variáveis de controle então $\ddot{x} = \frac{f_{ext}}{m} = u$ é um bom modelo (satélites, aceleração e desaceleração de um carro, etc).

Nesse exemplo, vai-se minimizar o Índice de Desempenho

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^2) dt$$

$$R = [1] \\ Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \mu > 0$$

associada ao sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{array} \right\}$$

A equação de Riccati no caso é: $A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1 - p_{12}^2 = 0 \quad (\text{ou } 1 - p_{21}^2 = 0)$$

Resultam:

$$p_{11} - p_{12} p_{22} = 0$$

$$\mu + 2 p_{12} - p_{22}^2 = 0$$

Resolvemos as 3 equações com a condição de P simétrica positiva definida : $p_{12} = 1$; $p_{22} = +\sqrt{\mu+2}$, $p_{11} = +\sqrt{\mu+2}$

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{\mu+2} & 1 \\ 1 & \sqrt{\mu+2} \end{bmatrix}$$

Com isso, construímos a matriz de ganhos, k :

$$k = R^{-1} B^T P = [1] \cdot [0 \ 1] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = [p_{12} \ p_{22}]$$

$$\boxed{k = [1 \quad -\sqrt{\mu+2}]}$$

A lei de controle ótimo é, nesse caso:

$$u = -kx = -x_1(t) - \sqrt{\mu+2} x_2(t)$$

15.3. OBSERVADORES DE ESTADO

Para uso tanto do método de Alocação de Polos como de um Controlador Linear Quadrático, a lei de controle exige o conhecimento de todas as variáveis de estado. Lembremos que:

$$u(t) = -kx(t)$$

Na prática, dispor de medidas de todas as variáveis de estado é muito difícil quando não impossível. Existe então a necessidade de se estimar as variáveis não medidas para que a ação de controle possa ser calculada. Para isso se usa um observador.

Existem dois tipos de observadores largamente utilizados em sistemas de controle:

1. Observadores identidade: estimam todo o vetor de estado, i.e., as n variáveis, independente do número de medidas, r , dos sensores.
2. Observadores de ordem mínima: estimam apenas a parte restante do sistema, isto é, se existem r medidas, o observador só vai gerar $n-r$ estimativas.

Observadores são então algoritmos embutidos no controlador capazes de gerar estimativas do estado do sistema. Foram desenvolvidos por Luenberger (1964, 1966) e são muitas vezes chamados Observadores de Luenberger.

Vamos ver apenas os observadores identidade.

Dado o sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ (1)

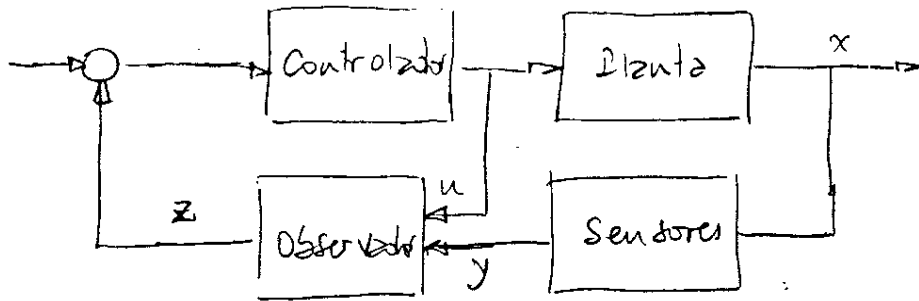
$$y = Cx \quad (2)$$

o estado x será aproximado por um vetor z dado por

$$\dot{z} = Az + Bu + K_0(y - Cz) \quad (3)$$

Note que as entradas para o observador são

y e u e a saída é z .



Substituindo (2) em (3)

$$\dot{z} = Az + Bu + k_0 C(x-z) \quad (4)$$

Subtraindo (1) de (4)

$$\dot{x} - \dot{z} = A(x-z) + \cancel{Bu} - \cancel{Bu} - k_0 C(x-z)$$

Definindo o erro como sendo

$$e = x - z$$

tem:

$$\dot{e} = Ae - k_0 Ce$$

$$\dot{e} = (A - k_0 C)e$$

Note que a matriz k_0 não foi ainda definida. Essa matriz é uma matriz de projeto. $A - k_0 C$ deve ser uma matriz de ajuste para que o erro de estimação, qualquer que seja o erro inicial $e(0)$, convirja para zero mais rápido que o sistema assumido pelo observador. $A - k_0 C$ é, em geral, projetada usando a mesma metodologia de Alocação de Polos

discutida em 15.2.1., desde que o sistema em estudo seja completamente observável.

Exemplo: Voltamos ao exemplo de Alocação de Polos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 20,6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1. Observabilidade do sistema

$$O = [C^T \mid A^T C^T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 20,6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistema observável

2. Eq. Característica para o observador

$$|sI - A + k_0 C| = 0 \quad k_0 = \begin{bmatrix} k_{01} \\ k_{02} \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 20,6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{01} \\ k_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} s & -20,6 + k_{01} \\ -1 & s + k_{02} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow s^2 + k_{02}s - 20,6 + k_{01} = 0$$

3. O observador deve ser mais rápido que o sistema. Como os polos do controlador foram colocados em $\mu_{1,2} = -1,8 \pm j2,4$, uma sugestão é fazer $\mu_{0,1,2} = -3,6 \pm j2,4$ (duas vezes mais rápido, pelo menos)

$$(s + 3,6 + j2,4)(s + 3,6 - j2,4) = s^2 + 7,2s + 18,72$$

Portanto $k_{02} = 7,2$

$$-20,6 + k_{01} = 18,72 \Rightarrow k_{01} = 39,32$$

e o observador identidade a ser implementado é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 20,6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 39,32 \\ 7,2 \end{bmatrix} (y - [0 \ 1] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix})$$

15.4. ALOCAÇÃO DE PÓLOS PARA ACOMPANHAMENTO DE REFERÊNCIA

Projeto de controladores em espaço de estado usando alocação de pólos como visto leva essencialmente a bons REGULADORES. Nesse caso, tem boas características de rejeição a perturbações. Entretanto, esse tipo de desenvolvimento não é apropriado para acompanhamento do sinal de referência, $r(t)$. Para incluir acompanhamento de referência no projeto é necessário modificar a estrutura usual do modelo :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

de modo a levar em conta a referência $r(t)$.

Uma escolha óbvia seria modificar a lei de controle para a forma:

$$u = -Kx + r$$

No entanto, essa lei quase certamente levará o erro não nulo em regime permanente quando há uma mudança de grau de referência. Para evitar que isso aconteça, deve-se calcular os valores dos estados e do controle em regime permanente que levarão o sistema a erro nulo na saída e forçar que eles cheguem a esses valores. Admitindo que os valores em regime permanente sejam x_{rp} e u_{rp} , a lei de controle será:

$$u = u_{rp} - K(x - x_{rp})$$

Dessa forma, quando $x = x_{rp}$, então $u = u_{rp}$. Em regime permanente:

$$\dot{0} = Ax_{rp} + Bu_{rp}$$

$$y_{rp} = Cx_{rp}$$

Essas equações tem que ser satisfeitas para $y_{rp} = r_{rp}$ qualquer que seja o valor de x_{rp} .

Para isso, faz-se

$$x_{rp} = N_x r_{rp}$$

$$\text{e } u_{rp} = N_u r_{rp}$$

Substituindo os valores nas equações acima, conclui-se que para atingir as respostas exigidas N_x e N_u devem satisfazer:

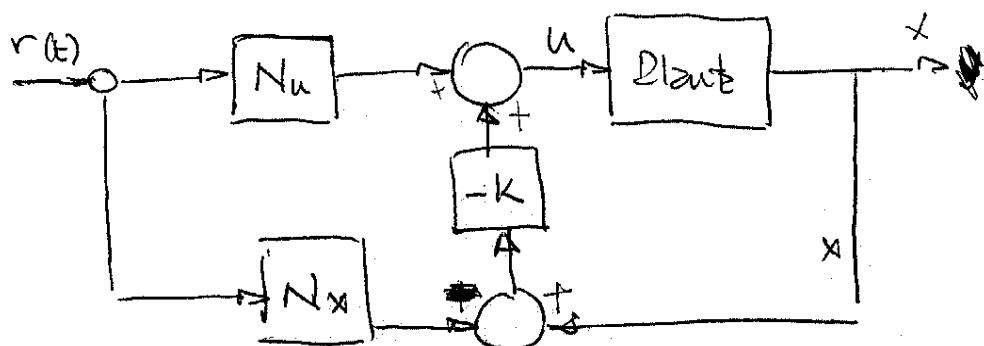
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Daí

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Com esses valores, a lei de controle pode ser reescrita na forma

$$u = -Kx + (N_u + KN_x)r$$



15.5. TRATAMENTO DE SISTEMAS COM VARIÁVEIS FORÇANTES (EXÓGENAS)

Para se poder usar técnicas de projeto de controladores em espaço de estado em problemas onde existem perturbações (ou referências) variantes no tempo, é necessário representar essas perturbações por variáveis de estado adicionais.

Admita o sistema na forma

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fx_d$$

onde x_d é vetor de perturbação

Para generalizar, admite ainda que o sistema deve seguir uma entrada (referência) x_r .

As duas novas entradas, x_d e x_r , podem ser modeladas por equações diferenciais do tipo

$$\dot{x}_d = A_d x_d$$

$$\dot{x}_r = A_r x_r$$

ou reais complexos, se for o caso.

Estas equações não estão sujeitas a controle, sendo, portanto, equações diferenciais não forçadas. O novo sistema resultante, juntando x , x_d e x_r , é necessariamente não controlável.

Como, em geral, nossa preocupação é com o comportamento do erro do sistema!

$$e = x - x_r$$

usando as equações acima podemos estabelecer:

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_r = Ax + Bu - A_r x_r = A(e + x_r) + Bu - A_r x_r + Fx_d$$

$$\dot{e} = Ae + (A - A_r)x_r + Bu + Fx_d$$

$$\dot{e} = Ae + Ex_0 + Bu$$

onde $x_p = \begin{bmatrix} x_r \\ \dots \\ x_d \end{bmatrix}$ e $E = [A - A_r \mid F]$

x_p representa o vetor de entradas exógenas no sistema.

Definindo agora um vetor de estado aumentado:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} e \\ \dots \\ x_p \end{bmatrix}$$

$\bar{x}(t)$ deverá satisfazer o modelo dinâmico:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{B} \dot{u}$$

onde: $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & \mid & E \\ \hline 0 & \mid & A_p \end{bmatrix}$; $\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$ e $A_p = \begin{bmatrix} \Delta_r & \mid & 0 \\ \hline 0 & \mid & \Delta_d \end{bmatrix}$

O modelo de observação também deverá ser alterado:

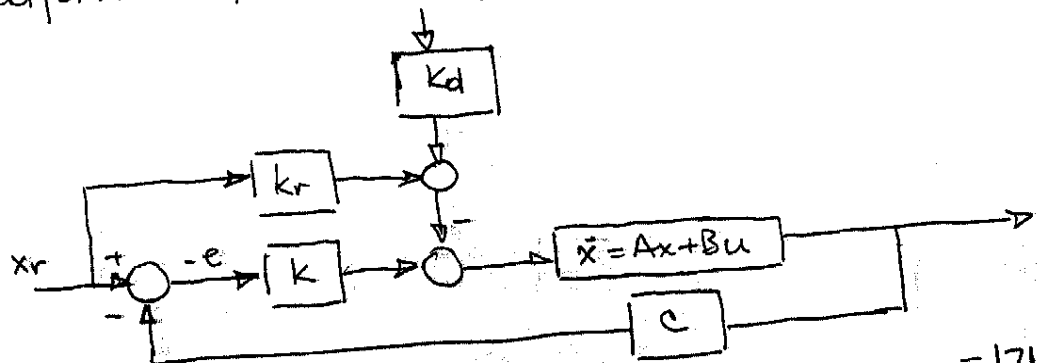
$$y = \bar{C} \bar{x} \quad ; \quad \bar{C} = [c \mid c_r \mid c_d]$$

com as implicações de sempre: C é a matriz de observação do estado original, c_r é a das referências e c_d das perturbações.

Para um projeto por colocação de polos, deve-se considerar uma lei de controle na forma:

$$u = -k_e - k_p x_p = -k_e - k_r x_r - k_d x_d$$

Nesse caso vai sempre existir uma realimentação antecipativa (feedforward), como representado abaixo



Com isso, a dinâmica do erro fica:

$$\dot{e} = A e + E x_p - B(k e + k_p x_p)$$

Seria ideal escolher ganhos em k e k_p para manter o erro em zero. Isto em geral não é possível. Objetivos mais razoáveis de desempenho são:

- a. O sistema em malha fechada deve ser assintoticamente estável

$$\Rightarrow A_c = A - BK \text{ tem todos os polos no semi-plano esquerdo}$$

- b. Uma combinação linear dos erros nas vars. estado (e não o vetor de erros inteiro) deve ser nulo em regime permanente

$$\Rightarrow \dot{e} = 0 \Rightarrow (A - BK)e = (BK_p - E)x_p$$

$$e = (A - BK)^{-1} (BK_p - E)x_p$$

Como queremos $y = C e = 0$, C é singular

$$e \quad C(A - BK)^{-1} (BK_p - E) = 0$$

Dependendo da dimensão de C a solução acima é sobre ou subdeterminada. Apenas quando a dimensão de y (saídas) é a mesma de u (entradas), ou seja, o sistema é quadrado, existe uma solução analítica:

$$k_p = [C(A - BK)^{-1} B]^{-1} C(A - BK)^{-1} E$$