Projeto de Controle Moderno (Avançado)

- Variáveis de Estado
- Matrizes de Transição
- Controlabilidade e Observabilidade
- Projeto por Alocação de Pólos
- Projeto Linear-Quadrático (LQ)
- Observadores de Estado

- VARIÁVEIS DE ESTADO

Uma maneira de preservar o modelo de um sistema dinâmico expresso no tempo, portanto, sem recorrer às Transformadas de Laplace, é utilizar variáveis de estado.

Conceitua-se Estado de um sistema como o menor conjunto de variáveis tais que o conhecimento dessas variáveis num instante t_0 junto com o conhecimento das entradas para $t>t_0$ é suficiente para determinar o comportamento do sistema para $t>t_0$.

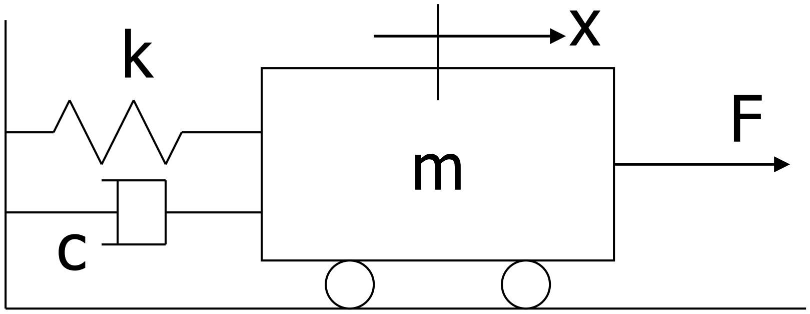
Na abordagem por Espaço de Estados, todas as equações diferenciais do modelo são reduzidas a equações de primeira ordem. As variáveis dinâmicas que aparecem no correspondente sistema de equações de 1ª ordem são chamadas Variáveis de Estado.

VARIÁVEIS DE ESTADO

O número de equações de 1ª ordem do novo sistema define a ordem do sistema e serão necessárias tantas condições iniciais quantas são as variáveis de estado ou a ordem do sistema para caracterizá-lo completamente.

Exemplos:

1. Sistema Massa-Mola-Amortecedor



VARIÁVEIS DE ESTADO

- Lei de Newton:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

- Para obter a representação em variáveis de estado, define-se:

$$x = x_1$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$m\dot{x}_2 + cx_2 + kx_1 = F$$

ou, em representação vetorial:

 VARIÁVEIS DE ESTADO

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F$$

Se se admitir que F é uma força de controle para posicionar a massa, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k}{m} & \frac{-c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

AUTOMAÇÃO E CONTOLE **VARIÁVEIS DE ESTADO**

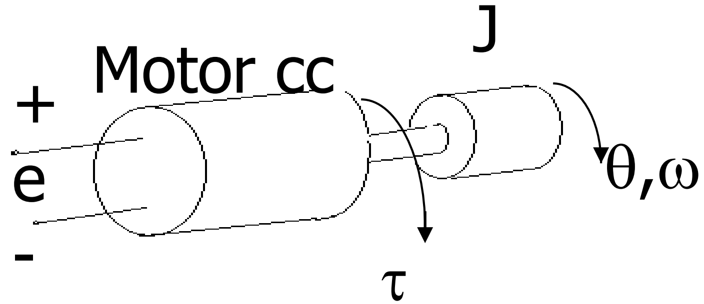
- Com isso, recai-se na forma padrão da representação:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- onde $\dot{x}$ é o vetor de derivadas das variáveis de estado, ⍰ é o vetor (nx1) de variáveis de estado; u é o vetor (mx1) de variáveis de entrada ou de controle; A é a matriz dinâmica (nxn) e Bé a matriz de entradas ou de controle (nxm).
- No caso do nosso sistema massa-mola-amortecedor, temos n=2 e m=1. Ali, são também necessárias 2 condições iniciais para que o problema seja totalmente definido.

 VARIÁVEIS DE ESTADO

- 2. Servomecanismo de Posição
  - Aplicação muito comum: posicionamento de antenas, cargas, etc



  - O motor de corrente contínua é um conversor de energia elétrica em energia mecânica que, em condições ideais, gera um torque proporcional à corrente no motor e um torque contraeletromotriz proporcional à velocidade de rotação do eixo de saída. Então:

 VARIÁVEIS DE ESTADO

$$\tau = k_1 i$$

$$V = k_2 \omega$$

- A potência elétrica de entrada no motor é o produto da corrente pela força contraeletromotriz:

$$P_{el} = Vi = \frac{k_2 \omega \tau}{k_1}$$

- A potência mecânica de saída é dada pelo produto do torque pela velocidade angular:

$$P_{mec} = \tau\omega$$

 VARIÁVEIS DE ESTADO

- Então: $$P_{el} = {}^{k_2}\!/_{k_1} P_{mec}$$

- e a conversão de energia é 100% eficiente se $k_2=k_1$. Como esse não é o caso e $k_2>k_1$, essa relação será usada como parâmetro de escolha do motor. Usando a Lei de Ohm:

$$e - V = Ri$$

- onde R é a resistência de armadura do motor, e impondo que a variação do momento angular é a soma dos torques externos (TMA) atuando sobre a carga e que, portanto:

$$J\frac{d\omega}{dt} = \tau$$

VARIÁVEIS DE ESTADO

- Com J representando o momento de inércia da carga em torno do eixo de rotação, obtem-se:

$$J\frac{d\omega}{dt} = k_1 i - \frac{k_1(e - V)}{R}$$

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{k_1 k_2}{JR}\omega = \frac{k_1}{JR}e$$

- A equação acima é uma equação de 1ª ordem na velocidade angular. Como estamos interessados em posicionamento, basta lembrar que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

 VARIÁVEIS DE ESTADO

- E completamos o sistema de equações de 1ª ordem:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -k_1 k_2 / JR \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \omega \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_1 / JR \end{bmatrix} e$$

- ou seja, recaimos na mesma forma:

$$x' = Ax + Bu$$

- O modelo do servo acima não é o mais usual na literatura: inclui-se, normalmente, um termo de atrito viscoso ($c\omega$) para representar a dissipação.

AUTOMAÇÃO E CONTOLE **VARIÁVEIS DE ESTADO**

- Definidas A e B, tem-se a representação da dinâmica do sistema, mas não se tem uma descrição sobre as saídas do mesmo, nos moldes do que indica a <u>Função de Transferência</u>, representação dos <u>modelos entrada-saída</u>. As saídas, ou, no caso dos sistemas de controle, as medidas ou informações que comporão a realimentação, são agrupadas em um <u>vetor de saídas</u>, y(t), que contem todas as <u>observações</u> realizadas no instante t. Supondo que sejam <u>r</u> medidas (números):

$$y(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ .. \\ .. \\ y_r(t) \end{Bmatrix}$$

 VARIÁVEIS DE ESTADO

Deve-se construir um <u>modelo de observações</u>, relacionando as saídas (ou os sensores) às variáveis de estado. Esse modelo é tão importante quanto o modelo dinâmico. No caso linear:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

com C,(rxn), conhecida como <u>matriz de saída</u> (ou de observações).

Em geral, D=0, refletindo que,na maior parte dos casos de interesse, as variáveis de entrada não afetam diretamente as de saída. O modelo de observações pode então ser resumido como:

$$y(t) = Cx(t)$$

VARIÁVEIS DE ESTADO

Em resumo, a representação de um sistema dinâmico em Espaço de Estados pode ser resumida em:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

As matrizes A, B e C contem todas as características essenciais do comportamento do sistema dinâmico linear em estudo. Uma consequência importante dessa afirmação é que dessas matrizes pode-se gerar uma forma integrada no tempo, Para isso, usa-se o conceito de Matriz de Transição de Estados.

- Matriz de Transição ou Matriz Fundamental

Considere o sistema dinâmico:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

com x (nx1) e u (mx1).

Essa expressão nada mais é que um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares, cuja solução geral será sempre a soma de uma solução particular com a solução homogênea. Comecemos com a homogênea:

$$\dot{x} = Ax; x(t_0) = x_0$$

A solução é escrita primeiramente como uma série infinita com coeficientes não determinados:

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x_0 = (I + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots + C_n t^n + \ldots) x_0$$

onde $\Phi(t,t_0)$ é a solucão e x_0 é a condição inicial. Para achar os coeficientes, substituimos a expressão na equação de x(t):

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} x_0 = (C_1 + 2C_2 t + 3C_3 t^2 + \ldots + nC_n t^{n-1} + \ldots) x_0$$

$$= A\Phi(t, t_0) x_0 = (A + AC_1 t + AC_2 t^2 + \ldots + AC_n t^n + \ldots) x_0$$

Igualando os coeficientes das duas expressões:

$$C_1 = A; C_2 = \frac{1}{2} A C_1 = \frac{1}{2} A^2$$

$$C_3 = \frac{1}{3} A C_2 = \frac{1}{2.3} A^3; \ldots; C_n = \frac{1}{n!} A^n; \ldots$$

$$\Rightarrow \Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} = I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \ldots + \frac{1}{n!} A^n t^n + \ldots$$

$\Phi(t,t_0)$ é chamada Matriz de Transição de Estados.

Para achar a solução particular, usa-se como tentativa:

$$x_p(t) = \Phi(t)\,p(t)$$

com p(t) desconhecida e tal que p(0)=0. Daí:

$$\dot{x}_p = \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)p + \Phi\left(\frac{dp}{dt}\right) = A\Phi p + \Phi\left(\frac{dp}{dt}\right)$$

$$\dot{x}_p = Ax_p + Bu$$

$$\Rightarrow \Phi\frac{dp}{dt} = Bu \Rightarrow \frac{dp}{dt} = \Phi^{-1}Bu$$

$$\Rightarrow p(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau$$

Finalmente:

$$x_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t,t_0)Bu(t)dt$$

$$x_p(t) = \int_0^t \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau$$

e a expressão final será:

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_0^t \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau$$

VARIÁVEIS DE ESTADO

- Finalmente, se o interesse é sobre o vetor y de saídas, pode-se, então, escrever:

$$y(t) = C\Phi(t,t_0)x_0 + C\int_0^t \Phi(t,\tau)Bu(\tau)d\tau$$

- Embora possa ser calculada pelas séries mostradas no desenvolvimento, a forma mais fácil de obter a Matriz de Transição de Estados envolve a transformação por Laplace. Partindo de:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

E aplicando a TL ao modelo dinâmico:

 VARIÁVEIS DE ESTADO

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s) + x(0)$$

- Resolvendo para X(s):

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

- Comparando esta resposta com a forma da Matriz de Transição:

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

- Exemplo) Vamos considerar um sistema massa-mola, cuja equação de movimento é:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

 VARIÁVEIS DE ESTADO

Nesse caso, a matriz dinâmica A será:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Usando a expressão que acabamos de desenvolver:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\omega^2 & s \end{bmatrix}$$

Da Tabela de Transformadas de Laplace:

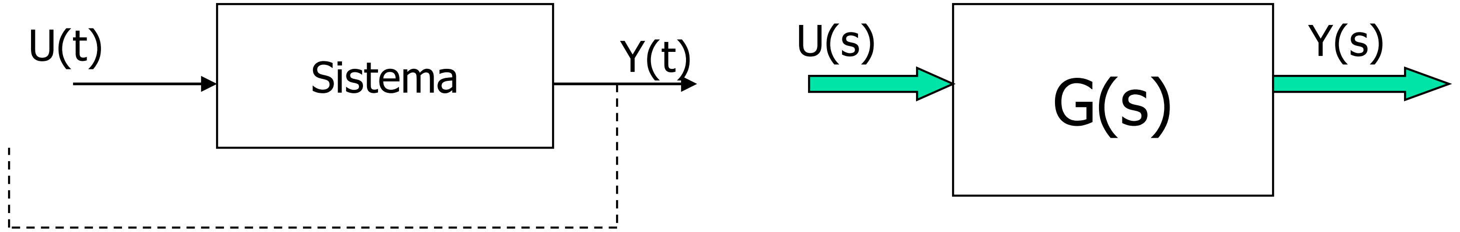
$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \\ -\omega \operatorname{sen} \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$

Tentar resolver mesmo este exemplo simples por séries é muito mais trabalhoso.

 VARIÁVEIS DE ESTADO

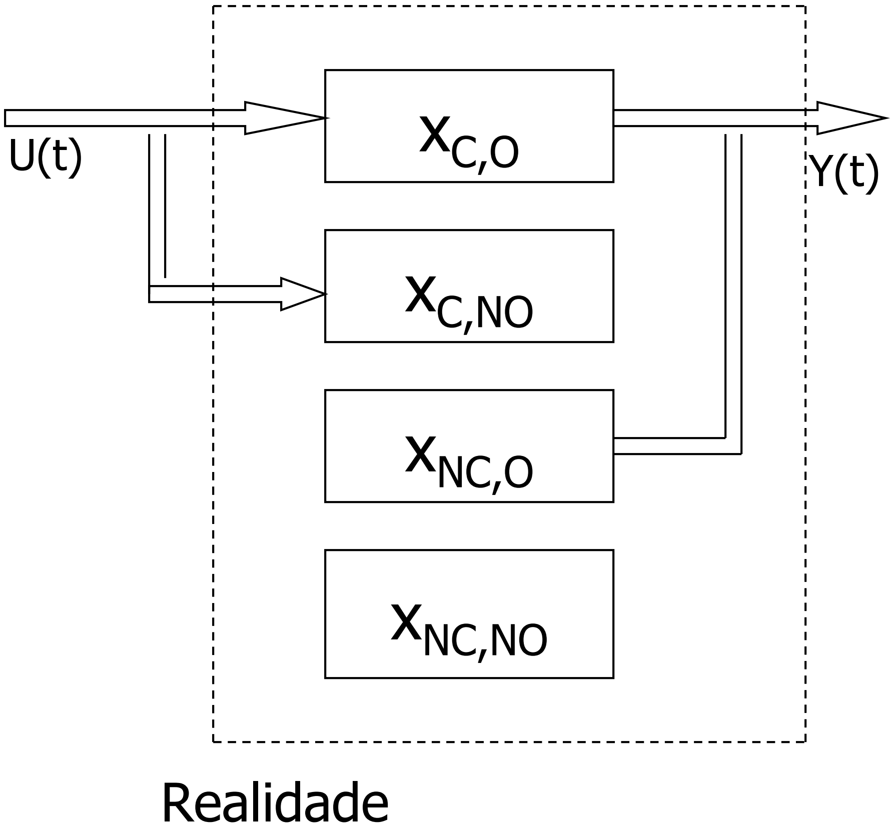
- **CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE**

O objetivo final de um projeto de controle é saber qual deve ser a ação de controle (como dosar?) u(t) dado que as saídas do sistema são dadas por y(t).



No projeto em frequência, procura-se uma representação entrada-saída, independente (em termos...) do que ocorre no sistema. O problema é que a matriz de Funções de Transferência G(s) é uma representação apenas parcial de tudo que acontece. Nosso entendimento do sistema nunca é completo.

 VARIÁVEIS DE ESTADO



Onde:

$x_{c,o}$-variáveis controláveis e observáveis;

$x_{C,NO}$-variáveis controláveis mas não observáveis;

$x_{NC,O}$-variáveis observáveis mas não controláveis;

$x_{NC,NO}$-variáveis não controláveis e não observáveis.

O projeto de controle só pode ser feito para variáveis C e O.

VARIÁVEIS DE ESTADO

O que significa um sistema controlável?

1. Significa que todas as variáveis de controle afetam todas as variáveis de estado.
2. Significa que se consegue transferir um sistema de uma condição inicial qualquer, $x(0)$, para qualquer outra posição final, por exemplo, a origem $x(t_f)=0$.

O que significa um sistema observável?

1. Significa que todas as variáveis de estado comparecem nas saídas, direta ou indiretamente;
2. Significa que conhecidas a história das entradas, $u(t)$, $t_0<t<t_1$, e as saídas $y(t)$, no mesmo intervalo, é possível estimar o estado do sistema em t_0, $x(t_0)$.

AUTOMAÇÃO E CONTOLE **VARIÁVEIS DE ESTADO**

Existem testes simples que permitem verificar se um sistema linear é controlável e observável. As consequências desses testes, privilégio dos sistemas em variáveis de estado, é que:

- Se o sistema for não controlável, o sistema de atuação ***tem que*** ser modificado (matriz B), sem o que não se projeta o controlador
- Se o sistema for não observável, o sistema de instrumentação ***tem que*** ser modificado (matriz C), sem o que o controlador não funcionará

<u>TESTE DE CONTROLABILIDADE</u>

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

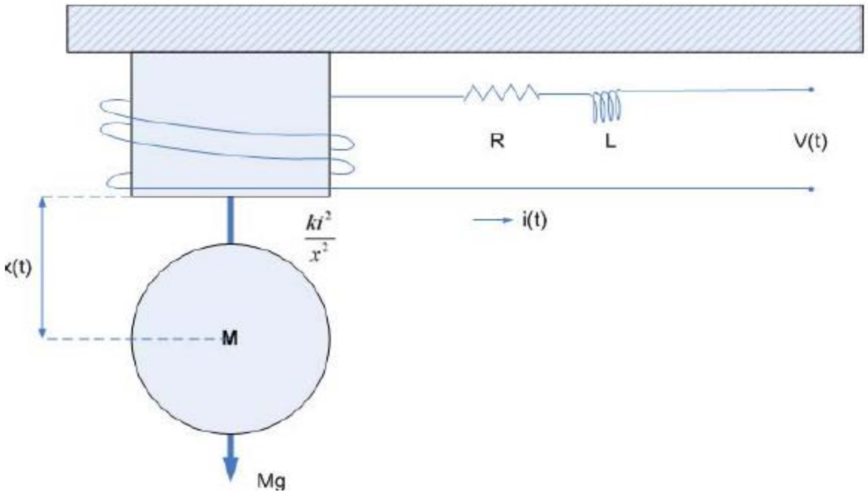
Será controlável sse a matriz €=[B AB A^2B A^3B.......A $^{n-1}$B] for de posto (rank) n, onde n é a ordem do sistema. A matriz €, (nxnm), será de posto n se dela se puder extrair uma matriz (nxn) de determinante não nulo.

TESTE DE OBSERVABILIDADE

$$\dot{x} = Ax + Bu; y = Cx$$

Será observável sse a matriz Ơ=[C^T A^TC^T $(A^T)^2C^T$.....$(A^T)^{n-1}C^T$] também for de posto n. A matriz Ơ é de dimensão (nxnr), onde r é o nº de sensores ou de saídas.

Exemplo: Suspensão magnética de uma esfera



AUTOMAÇÃO E CONTOLE **VARIÁVEIS DE ESTADO**

- Um experimento muito utilizado no desenvolvimento de mancais magnéticos trata da suspensão de uma esfera metálica. O sistema é não-linear e instável em malha aberta.
- Para projetar um controlador, admite-se o sistema em equilíbrio, descrito pelas variáveis x1, posição da esfera; x2, velocidade e x3, corrente no magneto.
- Linearizando em torno de x1eq = 0,5 m; x2eq = 0; x3eq = (Mgx1eq)0,5, e considerando apenas pequenos deslocamentos da esfera, as equações de movimento são:

$$\begin{Bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \\ \delta \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{2kx_{3eq}^2}{x^3{}_{1eq}} & 0 & 2\dfrac{kx_{3eq}}{x_{1eq}^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{-R}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} \delta V$$

AUTOMAÇÃO E CONTOLE **VARIÁVEIS DE ESTADO**

Vamos considerar L=0,01 H; R = 1Ω; M= 1 kg; k = 1,0 e g = 10 m/s2, para estudar controlabilidade e observabilidade.

A ordem do sistema é n=3 e só existe uma entrada, a tensão V no magneto. Então, a matriz de controlabilidade será:

$$€=[B\ AB\ A^2B]$$

Fazendo os cálculos:

$$€ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -900 \\ 0 & -900 & 8{,}94.10^4 \\ 10 & -10^4 & 10^6 \end{bmatrix}$$

Por inspeção, vê-se que o posto de € é 3 e, portanto, o sistema é controlável.

Para estudar observabilidade, consideramos que existam duas possibilidades para realimentar o sistema: a primeira, mais cara, é medir a posição da esfera; a segunda, mais barata, é medir a corrente do magneto.

 VARIÁVEIS DE ESTADO

Então, no primeiro caso:

$$y = \{\delta x_1\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{Bmatrix}$$

e C=[1 0 0]. Calculando a matriz de observabilidade Ơ=[C^T A^TC^T $(A^T)^2C^T$]:

$$Ơ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8{,}92 \end{bmatrix}$$

Como o determinante de Ơ é não nulo, este sistema é observável. Por outro lado, se medirmos apenas a corrente no magneto:

AUTOMAÇÃO E CONTOLE **VARIÁVEIS DE ESTADO**

$$y = \{\delta x_3\} = [0 \quad 0 \quad 1]\begin{Bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{Bmatrix}$$

E a matriz de observabilidade ficará:

$$Ơ = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -100 & 10^4 \end{Bmatrix}$$

Mostra-se, então, que o posto da matriz Ơ é apenas 1 e, portanto, o sistema não é observável. Então, é impossível projetar um controlador para a posição da esfera medindo apenas a corrente.

- **Método da Alocação de Pólos**
- Um dos métodos mais simples e conhecidos de projeto de controle no domínio do tempo é a Alocação de Pólos.
- Demonstra-se que se um sistema na forma padrão é controlável e observável, existe sempre uma matriz de ganhos de controle K tal que a lei de realimentação:

  $$u(t) = -Kx(t)$$

  aloca os pólos do sistema em malha fechada em posições escolhidas pelo projetista.
- Para entender a técnica de projeto, recorremos ao exemplo da suspensão magnética da esfera. Lembremos que:

 VARIÁVEIS DE ESTADO

$$\begin{Bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \\ \delta \dot{x}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{2kx_{3eq}^2}{x^3{}_{1eq}} & 0 & 2\dfrac{kx_{3eq}}{x_{1eq}^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{-R}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \delta x_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} \delta V$$

leva a que a matriz A tenha valores:

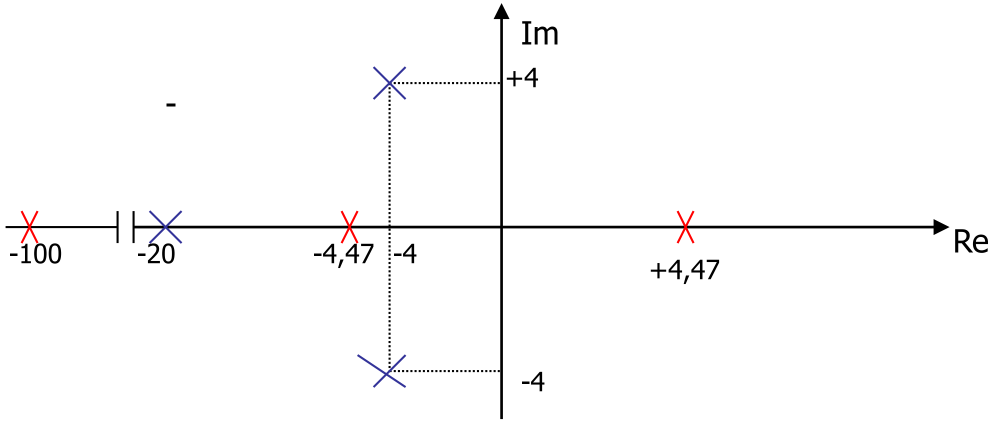
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -20 & 0 & 8{,}94 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}$$

e, portanto, seus autovalores, que são os mesmos da Função da Transferência :

$$\frac{\delta x_1(s)}{V(s)} = \frac{894}{(s+100)(s^2-20)}$$

 VARIÁVEIS DE ESTADO

São: s_1=-100; s_2=-4,47 e s_3=+4,47. O sistema é, então, instável em malha aberta por ter um polo no semiplano direito do plano imaginário.



Suponha que, após análises, os polos em malha fechada devam se localizar em μ_1=-20; μ_2=-4+4i; μ_3=-4-4i. Com isso, o sistema será certamente estável.

- Para calcular a matriz K pode-se usar o comando *place* do Matlab ou o *ppol* do Scilab ou ainda, para um sistema de 3ª ordem, calcular à mão:

$$K = \begin{bmatrix} -1{,}3423 & -0{,}2371 & -0{,}72 \end{bmatrix}$$

- Portanto, a escolha de uma lei de realimentação ou estratégia

$$\delta u(x,t) = -K\delta x(t) = -1{,}3423\delta x_1 - 0{,}2371\delta x_2 + 0{,}72\delta x_3$$

leva o sistema em malha fechada a uma forma

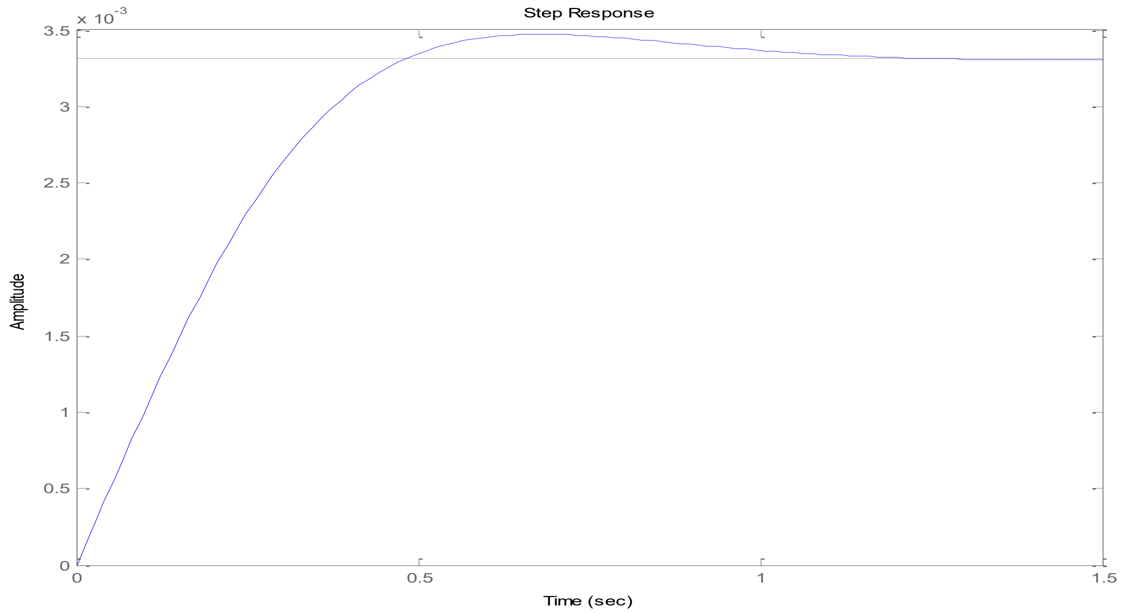
$$\delta \dot{x} = (A - BK)\delta x$$

que tem os polos exatamente nas posições previamente escolhidas. Restam ainda dois problemas: *i)* como escolher os polos? e *ii)* como implementar essa estratégia se apenas δx_1 é medida?

AUTOMAÇÃO E CONTOLE **VARIÁVEIS DE ESTADO**

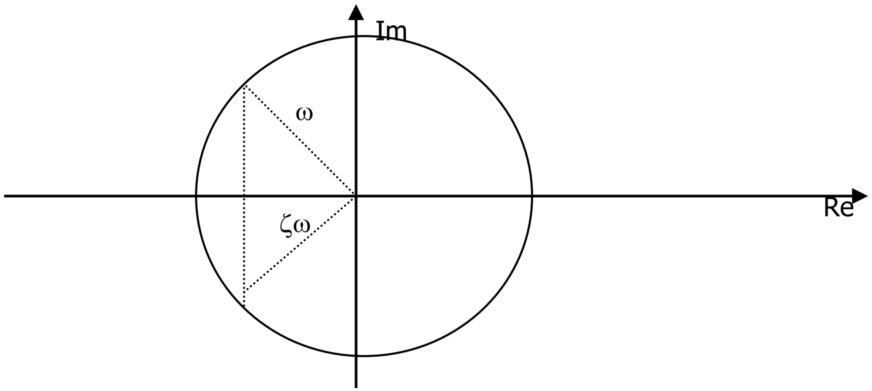
Resposta a um degrau na posição (Matlab)

Esfera suspensa



 VARIÁVEIS DE ESTADO

- A resposta à 1ª questão vem da análise das posições escolhidas. Na forma proposta, o sistema terá resposta semelhante a um oscilador amortecido pois os pólos dominantes na resposta correspondem a um par de pólos complexos conjugados, aqueles que estão mais próximos ao eixo imaginário. De outra forma, ao escolhermos os pólos -4±4i, determinamos frequência e fator de amortecimento da resposta:



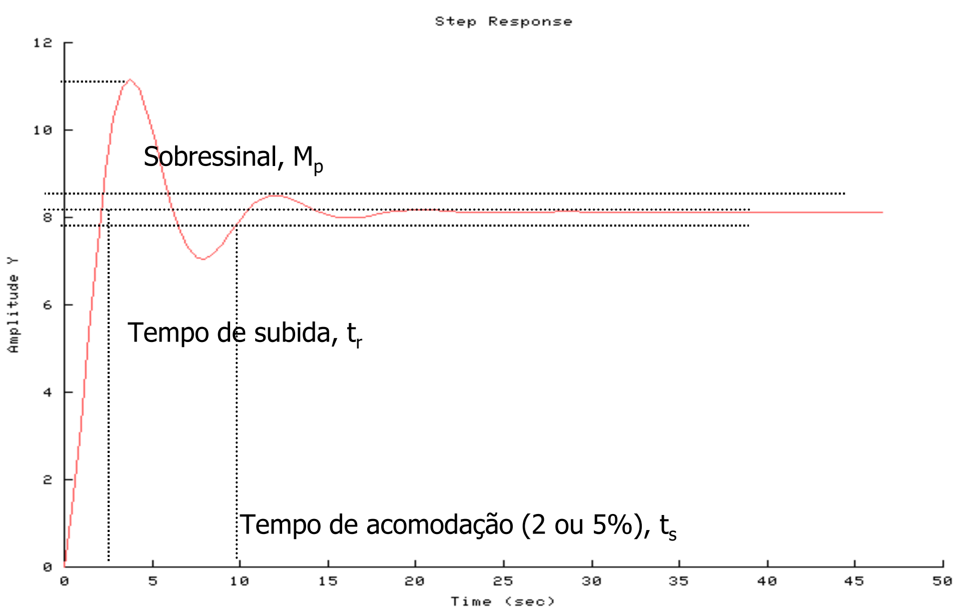
- Em malha fechada:

$$\omega = 4\sqrt{2} = 5{,}64 rd / s; \zeta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = 0{,}707$$

 VARIÁVEIS DE ESTADO

O sistema resultante tem, então, resposta rápida e alto fator de amortecimento, características, em geral, altamente desejáveis.

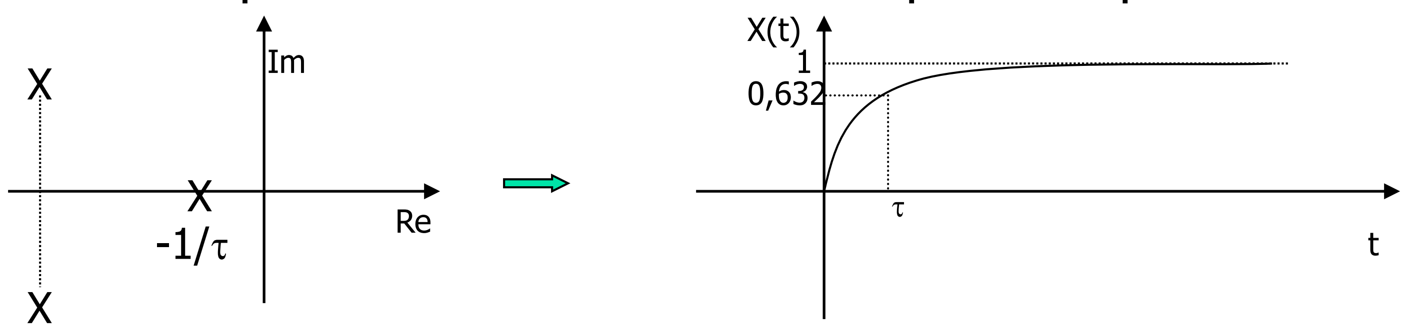
Isto normalmente é traduzido por 2 dos 3 parâmetros associados à resposta de um sistema de 2ª ordem a um degrau:



AUTOMAÇÃO E CONTOLE **VARIÁVEIS DE ESTADO**

1. Sobressinal(M_p) - depende apenas do fator de amortecimento ζ;
2. Tempo de Acomodação 2 ou 5%(t_s) - depende de ζ e de ω;
3. Tempo de Subida (t_r) - depende de ζ e de ω.

Se, ao contrário, o requisito é fazer com que a resposta do sistema se assemelhe a um de 1ª ordem, o polo dominante será real e basta especificar a constante de tempo τ compatível:



 VARIÁVEIS DE ESTADO

- **Método Linear-Quadrático (LQ)**

  Projetar um controlador LQ corresponde a resolver a questão:

  Achar a lei de controle que minimiza uma Função Objetivo ou Índice de Desempenho

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)\,dt$$

  para o sistema linear

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

  As matrizes Q e R, que são escolhidas pelo projetista, são chamadas Matrizes de Ponderação, do Estado e do Controle, respectivamente, e é isso que realmente fazem:

  - Q "grande", R "pequena"- ênfase na precisão;

  - Q"pequena", R "grande"- ênfase no gasto de controle.

VARIÁVEIS DE ESTADO

Problemas com vínculos lineares (L) e funções objetivo quadráticas (Q) representam tudo que um "otimizador" quer: sempre têm solução e não dependem de outros critérios.

A solução do problema LQ proposto é dado por uma lei linear de realimentação:

$$u(t) = -Kx(t)$$

onde a matriz de ganhos K é gerada por:

$$K = R^{-1}B^{T}P$$

Por sua vez, P é uma matriz nxn, simétrica, solução de uma Equação Algébrica de Riccati:

$$A^{T}P + PA - PBR^{-1}B^{T}P + Q = 0$$

Para mostrar um projeto LQ, retomamos o exemplo da suspensão magnética da esfera.

Escolhendo, para início do projeto:

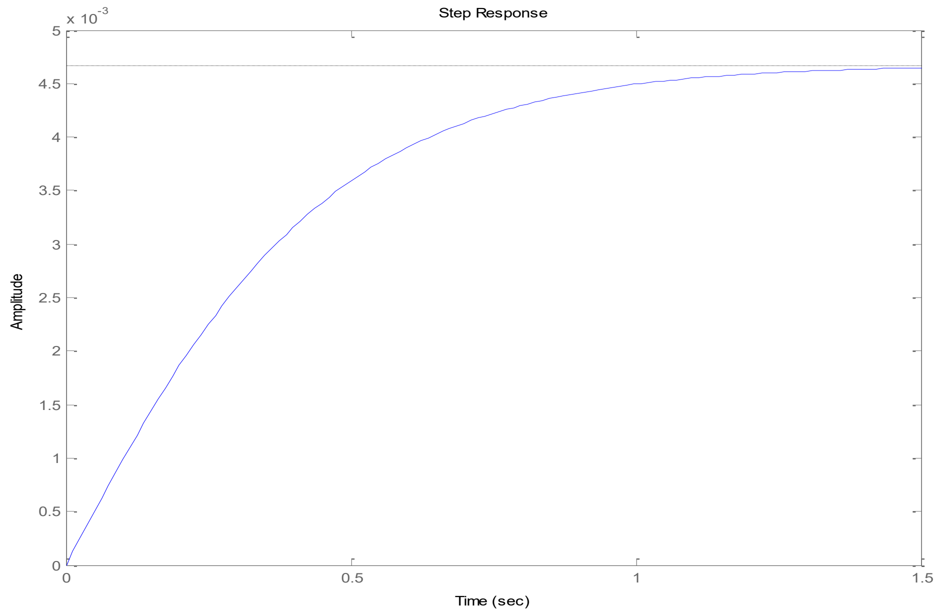
$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; R = [0.01]$$

A utilização do comando lqr do Matlab ou ricc do Scilab nos levam a uma matriz de ganhos:

$$K = [-4.699 \quad -1.055 \quad 0,0949]$$

AUTOMAÇÃO E CONTOLE **VARIÁVEIS DE ESTADO**

- A resposta a um degrau na posição para esse novo sistema (Matlab) está na figura seguinte:



VARIÁVEIS DE ESTADO

Como essa resposta é muito lenta, refazemos os mesmos passos para:

$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; r = 0.1$$

Isso corresponde a afirmar que a posição do polo correspondente à variável x_3, em -100, não tem importância sobre a resposta do sistema.

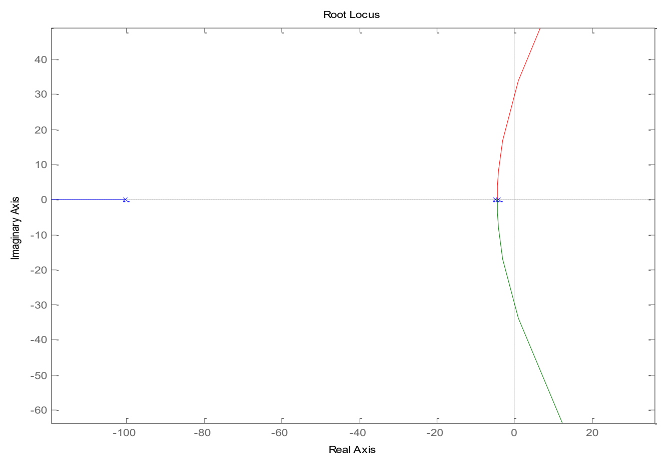
Os ganhos correspondentes serão:

$$K_{lq} = \begin{bmatrix} -35{,}5 & -10{,}6 & 0{,}703 \end{bmatrix}$$

E os correspondentes pólos são ainda todos reais e a resposta, lenta. Procuramos, então, a FT de V para x_1, até achar um ganho que force uma pequena oscilação do sistema.

AUTOMAÇÃO E CONTOLE **VARIÁVEIS DE ESTADO**

O Lugar das Raízes é o que segue:



O projeto LQ pode não satisfazer nas primeiras tentativas, mas gerará sempre um sistema estável em malha fechada, que pode ser refinado.

OBSERVADORES DE ESTADO

Nos projetos por alocação de pólos ou linear-quadrático, a lei ótima de realimentação é:

$$u(x,t) = -K\,x(t)$$

onde K é a matriz de ganhos. Essa lei exige realimentação completa dos estados e nem todos eles estarão disponíveis, já que:

- o número de instrumentos é quase sempre menor que o número de estados ($r<n$) para que o projeto seja viável;

- nem todos os estados são acessíveis, isto é, podem ser medidos.

No exemplo da suspensão magnética da esfera, o sistema é não observável medindo-se a corrente, mas é observável medindo-se a posição da esfera. Isso significa que as variáveis velocidade e corrente devem ser estimadas a partir das observações disponíveis e do modelo.

 VARIÁVEIS DE ESTADO

Observadores de Estado