

Módulo de Elasticidade Efetivo

No caso de líquidos, as mudanças na densidade em função da pressão e da temperatura são pequenas e a forma normal da equação de estado

$$f(\rho, P, T) = 0 \quad (1.2)$$

pode ser reescrita como:

$$\rho = \rho(P, T) \quad (1.3)$$

Expandindo (1.3) em série de Taylor em torno de ρ_0 :

$$\rho = \rho_0 + \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_{T_0} (P - P_0) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{P_0} (T - T_0) \quad (1.4)$$

Módulo de Elasticidade Efetivo

ou

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \frac{1}{\beta} (P - P_0) - \alpha (T - T_0) \right] \quad (1.5)$$

onde $\beta \triangleq$ módulo de elasticidade volumétrica
(BULK MODULUS)

$\alpha \triangleq$ coeficiente de expansão térmica

vejamos:

$$\frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_{T_0} = - \frac{1}{\frac{M}{V_0}} \frac{M}{V_0^2} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_{T_0} = - \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{1}{\beta} \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_{P_0} = - \frac{V_0}{M} \frac{M}{V_0^2} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_{P_0} = - \frac{1}{V_0} \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_{P_0} = -\alpha \quad (1.7)$$

Módulo de Elasticidade Efetivo

β representa a variação de pressão dividida pela variação relativa de volume a uma temperatura constante. β é uma quantidade essencialmente positiva ($\beta = 220.000 \text{ lb/in}^2$) para os derivados de petróleo, de enorme importância no desempenho dinâmico do sistema hidráulico, pois caracteriza a "rigidez" do fluido.

α é chamado coeficiente cúbico de expansão e, para fluidos derivados do petróleo tem valor em torno de $0,5 \times 10^{-3} (\text{°F})^{-1}$.

1.2. COMPRESSIBILIDADE

É usual definir compressibilidade por:

$$C = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (1.8)$$

Módulo de Elasticidade Efetivo

que corresponde, portanto, à diferença ou redução fracional em volume do fluido por unidade de pressão aplicada.

Basta comparar (1.8) com (1.6) para concluir que:

$$\frac{1}{\beta} = C \quad \text{ou} \quad \beta \cdot C = 1 \quad (1.9)$$

Módulo de Elasticidade Efetivo

1.5. MÓDULO DE ELASTICIDADE EFETIVO

Nos sistemas hidráulicos é comum se encontrar ressonâncias devidas à interação entre o efeito de mola do líquido e a massa das partes mecânicas que ^{sobre} o sistema agem. Essas ressonâncias podem ser motivo de um mau comportamento dinâmico.

O efeito de mola do líquido está diretamente relacionado com o módulo de elasticidade volumétrica (β). β pode ser muito afetado pela presença de ar dissolvido (ou outro gás) ou pelo acoplamento mecânico com tubulação e outros vasos do sistema.



Módulo de Elasticidade Efetivo

O volume total inicial é $V_t = V_L + V_G$. À medida que o pistão se move, há um incremento ΔP de pressão sobre o líquido e sobre o vaso de modo que no final há um decréscimo do volume inicial de:

$$\Delta V_t = -\Delta V_G - \Delta V_L + \Delta V_C \quad (1.15)$$

Definindo o módulo de elasticidade efetivo por

$$\frac{1}{\beta_e} = \frac{\Delta V_t}{V_t \Delta P} \quad (1.16)$$

é possível obter a relação

$$\frac{1}{\beta_e} = \frac{1}{\beta_L} + \frac{1}{\beta_C} + \frac{V_G}{V_t} \left(\frac{1}{\beta_G} - \frac{1}{\beta_L} \right) \quad (1.17)$$

onde L é o índice referente ao líquido, G ao gás e C referente ao vaso.

Claramente, verifica-se que o módulo de elasticidade efetivo, β_e , será menor que β_L e β_C , ou seja, a linha vai sempre influir na dinâmica do processo.

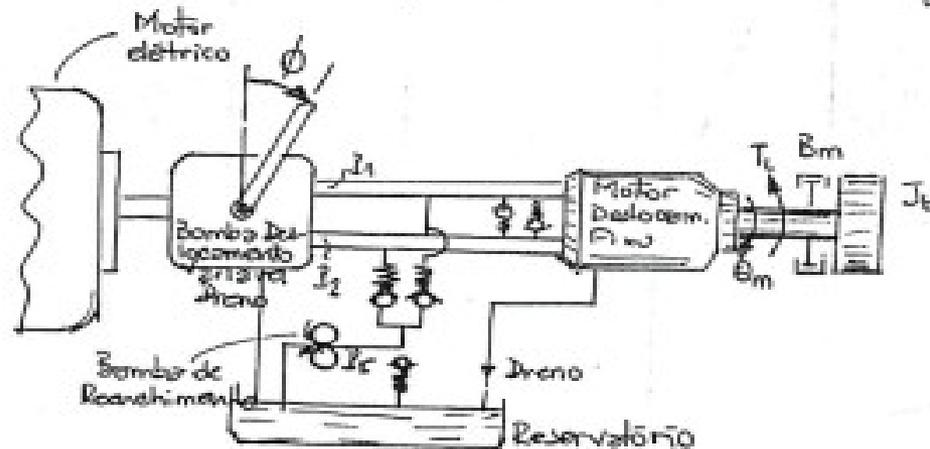
Módulo de Elasticidade Efetivo

A forma (1.17) sugere também a influência que uma quantidade de gás dissolvida no sistema terá sobre este último. Mesmo uma pequena quantidade de ar reduz drasticamente o módulo de elasticidade. Merrit demonstra que 1% de ar dissolvido em óleo derivado de petróleo numa tubulação de aço a 500 psi, onde o tubo tem diâmetro 6 vezes maior que a espessura de parede, reduz o módulo de elasticidade ideal (22×10^5 psi) a cerca de 25% do seu valor (módulo efetivo é $E_e = 52.600$ psi).

A INFLUÊNCIA DO MÓDULO DE ELASTICIDADE

3.4. MOTOR CONTROLADO POR BOMBA

Utilizado quando se necessita de grandes potências para controle. O esquema básico é o seguinte:



- Eficiência desse tipo de circuito pode chegar a 90%
- Resposta, no entanto, é bem mais lenta que nas circuitos controlados por válvula.
- O esquema da figura é conhecido também como TRANSMISSÃO HIDROSTÁTICA ou TRANSMISSÃO HIDRÁULICA.

A INFLUÊNCIA DO MÓDULO DE ELASTICIDADE

- O deslocamento volumétrico da bomba é dado por:

$$\Delta V_p = k_p \phi \quad (3.27)$$

onde ϕ é o deslocamento angular do cursor da bomba
 k_p é o gradiente de deslocamento da bomba.

- A vazão na bomba pode ser descrita por:

$$Q_b = k_p \phi \Delta V_p N_p - C_{ip} (P_1 - P_r) - C_{ep} P_1 \quad (3.28)$$

onde $k_p \phi \Delta V_p$ é a vazão ideal (N_p é o número de rotações da bomba por unidade de tempo), $C_{ip}(P_1 - P_r)$ é a perda entre as duas linhas e $C_{ep} P_1$ é a perda entre a linha P_1 e o dreno.

A INFLUÊNCIA DO MÓDULO DE ELASTICIDADE

• A vazão na linha é a diferença entre as vazões na bomba e no motor:

$$\rightarrow Q_b - Q_m = \frac{V_0}{\beta_e} \frac{dP_1}{dt} \quad (2.29)$$

devido $\frac{V_0}{\beta_e} \frac{dP_1}{dt}$ representa a variação instantânea de vazão devido não rigidez da linha.

• Finalmente, a vazão no motor é dada por:

$$Q_m = \Delta_m \dot{\Theta}_m + C_{im} (P_1 - P_r) + C_{em} P_1 \quad (3.30)$$

• Substituindo Q_b e Q_m na equação da linha

$$k_p \phi N_p - \Delta_m \dot{\Theta}_m - C_{ip} (P_1 - P_r) - C_{ep} P_1 - C_{im} (P_1 - P_r) - C_{em} P_1 = \frac{V_0}{\beta_e} \frac{dP_1}{dt} \quad (3.31)$$

• Tomando os torques na saída do motor:

$$T_g = (P_1 - P_r) \Delta_m = J_t \frac{d^2 \Theta_m}{dt^2} + \Delta_m \frac{d\Theta_m}{dt} + \frac{\Theta_m}{I_{\Theta m}} (P_1 + P_r) C_f \Delta_m + T_L \quad (3.3)$$

onde o termo não linear $\frac{\Theta_m}{I_{\Theta m}} (P_1 + P_r) C_f \Delta_m$ representa o torque de atrito seco interno ao motor.

• Este torque de atrito seco é normalmente descartado para a análise linear, sendo que, em geral, o coeficiente de atrito interno C_f é pequeno ($\sim 0,1$). No entanto, a sua presença deve ser considerada numa análise global do sistema, após a análise linear, pois pode representar a estabilidade ou não do mesmo.

A INFLUÊNCIA DO MÓDULO DE ELASTICIDADE

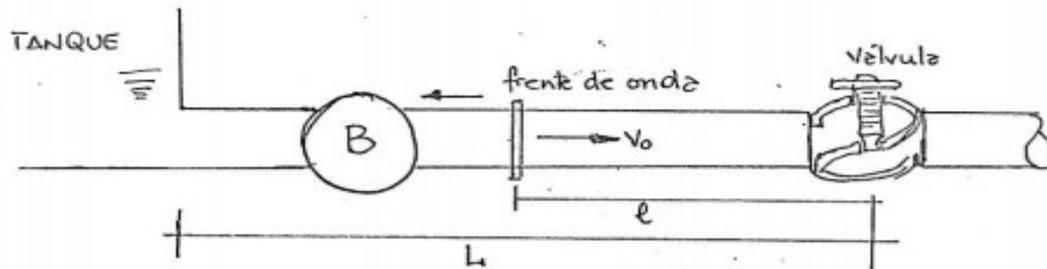
Colocando na forma padrão de frequências e amortecimentos, tem-se:

$$\theta_m = \frac{\frac{k_p V_p}{D_m} \phi - \frac{C_b}{D_m^2} \left(1 + \frac{V_0 s}{\beta c C_t}\right) T_L}{s \left[\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\delta}{\omega_n} s + 1 \right]} \quad (3.36)$$

onde $\omega_n = \sqrt{\frac{\beta c D_m^2}{V_0 J_t}}$ é o frequência natural hidráulica
 não amortecida e
 $\delta = \frac{C_t}{2D_m} \sqrt{\frac{\beta c J_t}{V_0}} + \frac{R_m}{2D_m} \sqrt{\frac{V_0}{\beta c J_t}}$ é o coeficiente de am-
 orteimento.

TRANSIENTES EM DUTOS

1.11. TRANSIENTES DE PRESSÃO EM DUTOS



Quando um fluido se movendo num tubo é rapidamente freado devido à válvula, pode ocorrer um transiente muito grande de pressão na linha.

Chama-se GOLPE DE ARIETE e é usualmente acompanhado por um enorme ruído.

A frente de onda, voltando depois de fechar a válvula, tem a velocidade do som

$$c = (\beta_e / \rho)^{1/2} \quad (1.50)$$

c - velocidade do som no fluido

β_e - módulo de elasticidade efetivo (fluido+tubo)

ρ - densidade

TRANSIENTES EM DUTOS

- Quando a onda de pressão chega do lado da fonte (tanque), refletida pela válvula, após l/c segundos, então a energia cinética do fluido se transformou em energia potencial e a pressão do fluido comprimido, P_{1c} , é máxima. Nesse instante, forma-se uma onda de decompressão que viaja de volta para a válvula.
- Essa onda percorre a tubulação ida e volta e vai se dissipando por atrito.

- Energia cinética

$$E_C = \frac{1}{2} M_f v_0^2 = \frac{1}{2} \rho L A v_0^2 \quad (1.51)$$

- Energia potencial

$$E_P = \frac{1}{2} \frac{L A}{\rho c} P_{1c}^2 \quad (1.52)$$

TRANSIENTES EM DUTOS

P_{Ic} é o incremento de pressão devido ao fechamento instantâneo da válvula.

• fazendo $E_2 = E_1$ resulta

$$\boxed{P_{Ic} = \rho c v_0} \quad (1.55)$$

• Essa expressão é válida se o fechamento é considerado instantâneo se o tempo de fechamento da válvula é menor que o requerido para uma viagem de ida e volta da onda de pressão, i.e.:

$$T \leq T_c = \frac{2L}{c} \quad (1.54)$$

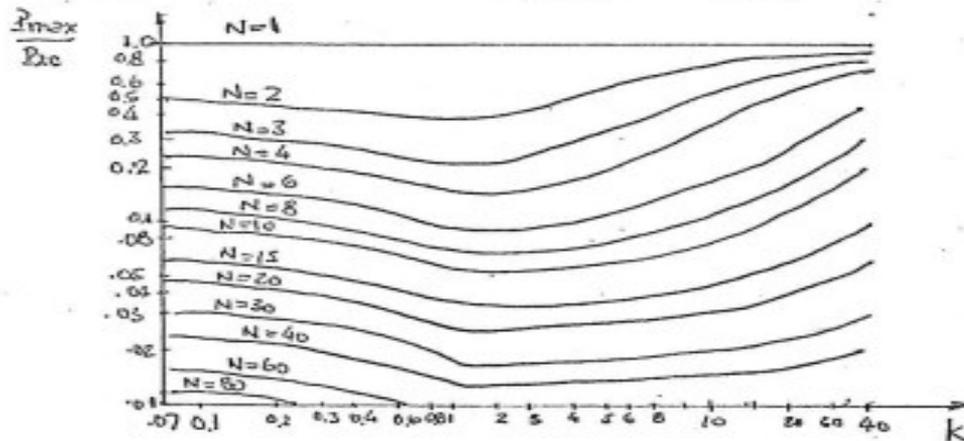
onde T_c designa tempo de fechamento crítico.

TRANSIENTES EM DUTOS

Em geral, para tubulações curtas, esta desigualdade não se verifica e o crescimento de pressão vai depender de outros fatores. P_{max} é então obtido de um diagrama chamado Gráfico de Quick.

Nesse diagrama de Quick adquire-se fechamento uniforme da válvula e calcula-se uma pressão máxima

$$P_{max} \leq P_{ic}$$



Para usar o diagrama de Quick, é preciso calcular:

$$k = \frac{P_{ic}}{2P_0} = \text{constante de tubulação}$$

P_0 = pressão estática na tubulação

T = tempo necessário para fechamento uniforme de válvula