
MODELAGEM EM VARIÁVEIS DE ESTADO E FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

- 2 Tanques em Cascata
- Reator CSTR

○ O QUE É MODELO?

Síntese de todo o conhecimento que se dispõe sobre o fenômeno ou sistema em estudo (MODELO FÍSICO)

Equações diferenciais (cinética);

Funções de Transferência;

Redes Neurais Treinadas;

Conjuntos de Regras

não são Modelos Físicos. São a representação matemática ou lógica do Modelo Físico. Essa distinção é vital em Automação e Controle.

- A ARTE DA MODELAGEM

Máxima Suprema no Projeto de Controle: “Todo controlador é tão bom quanto bom é o modelo que representa a dinâmica do sistema que se pretende controlar” (Friedland, 87; Eykhoff, 94, entre outros).

Em outras palavras:

Modelo Bom Possíveis bons controladores



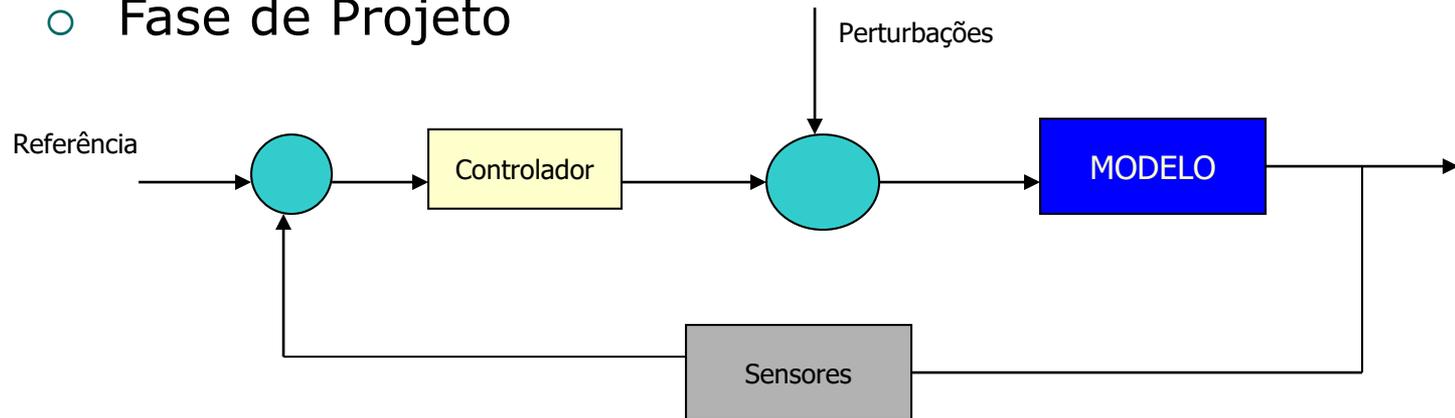
Modelo Ruim Controladores ruins



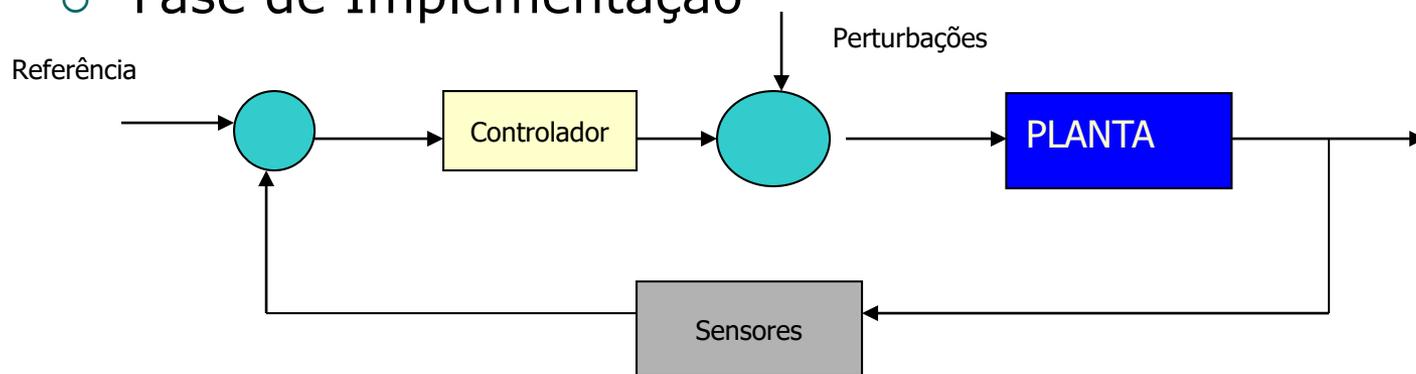
- Após projeto, o controlador implementado continua a enxergar o modelo da fase de projeto e não a planta. Se o modelo não for aderente à planta, não há o que fazer para conseguir convergência (estabilidade).
- Sofisticar a estratégia de controle é, em geral, inútil, a menos que haja um esquema de adaptação (aprender o modelo) acoplado.
- Onde está a arte de modelagem em projetos de Engenharia?

Automação e Controle IPT 2008

○ Fase de Projeto

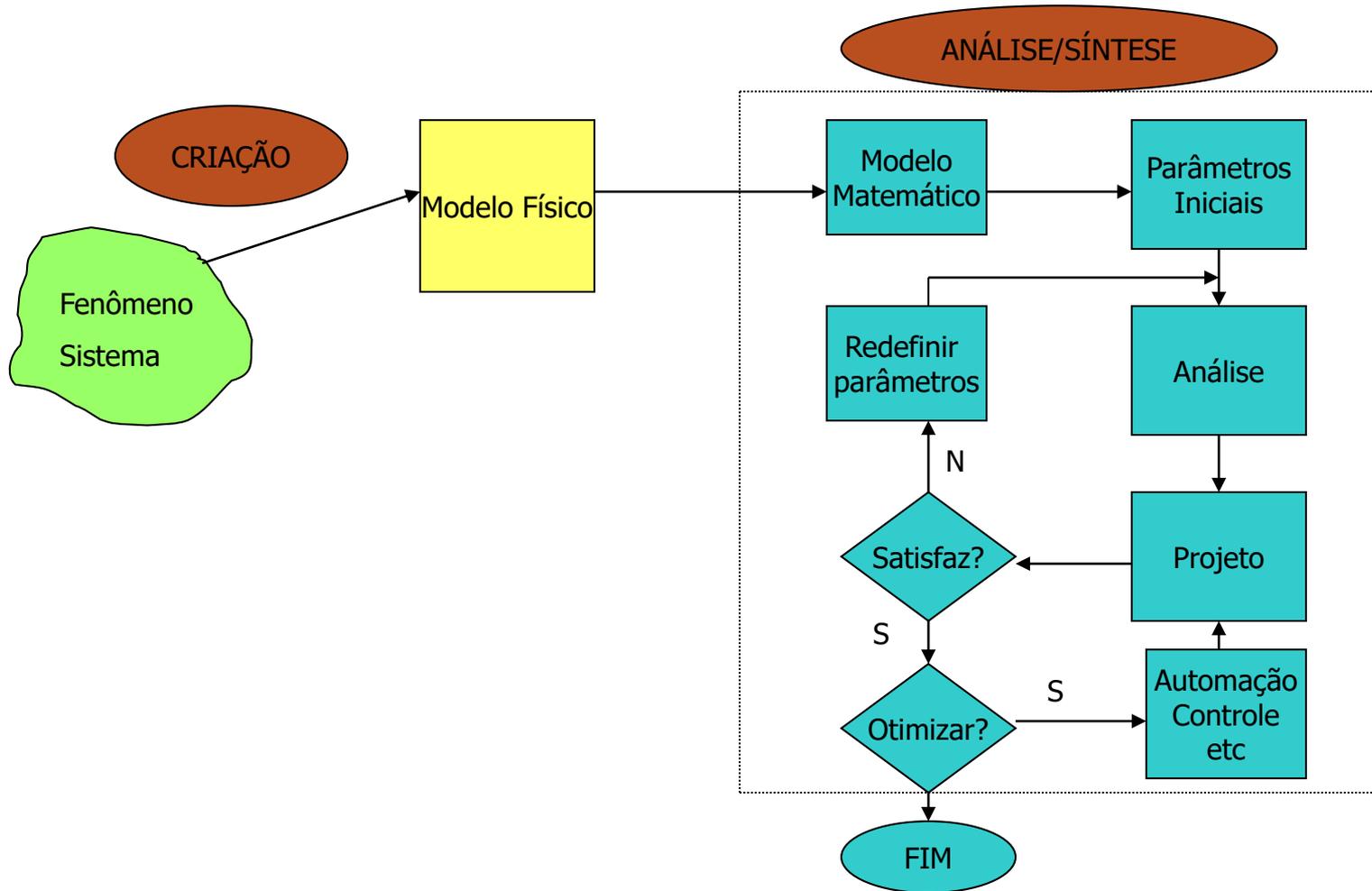


○ Fase de Implementação

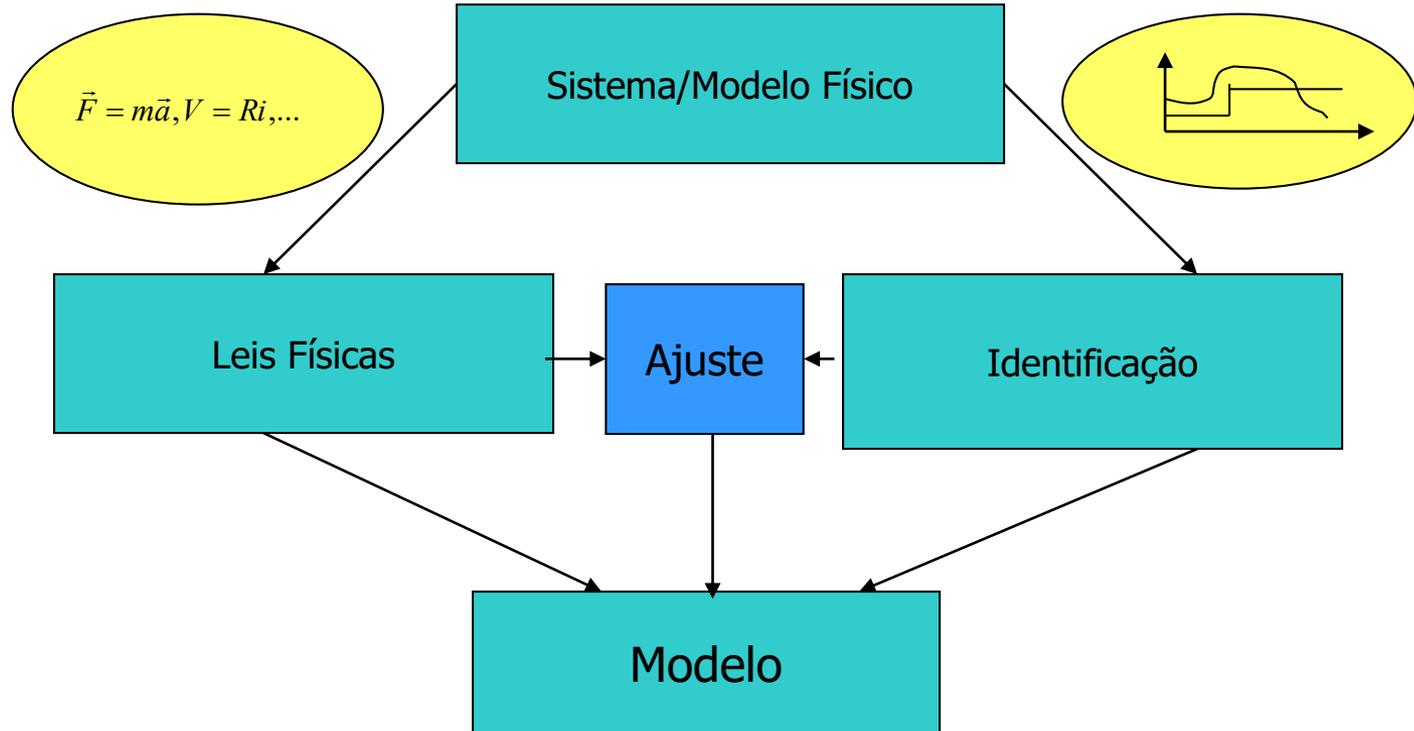


Automação e Controle IPT 2008

N



CONSTRUÇÃO DE MODELOS MATEMÁTICOS

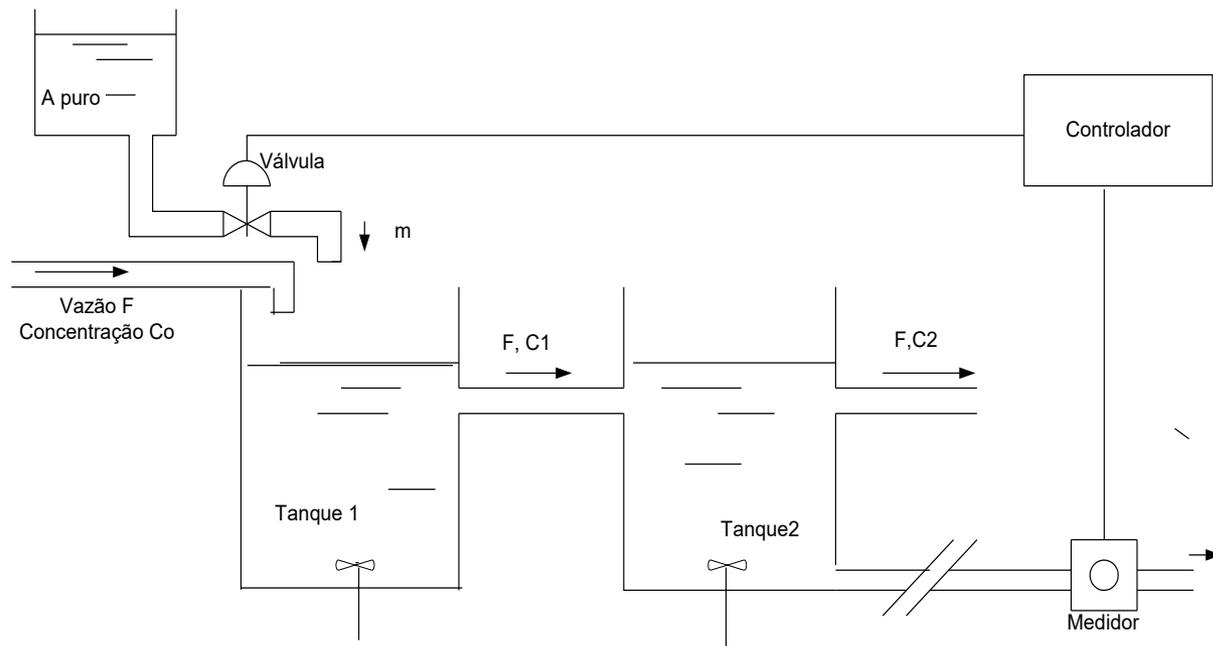


- Tipos de Modelos Matemáticos
 - Estáticos (Regime Permanente) X Dinâmicos
 - Contínuos (Tempo-Variáveis de Estado, Equações Diferenciais ou Freqüências-Transf. Laplace, Funções de Transferência) X Discretos (Tempo-Variáveis de Estado, Equações de Diferenças ou Freqüências-Transformada Z, Funções Amostradas)
 - Lineares X Não Lineares
 - Parâmetros Concentrados (EDO) X Parâmetros Distribuídos (EDDP)
 - Determinísticos X Probabilísticos
 - Eventos Discretos X Mudanças Orientadas

- Introdução à modelagem: Variáveis de Estado; Funções de Transferência

- Simulação de um Sistema de Controle de Concentração em 2 tanques em Cascata
- Uso de Simuladores tipo Matlab e Scilab

- Controle da concentração em 2 reatores em cascata



Descrição do Processo:

- Corrente líquida entra no Tanque 1 com vazão F (l/min), contendo o reagente A a uma concentração constante c_0 (moles A/l);
- Reagente A se decompõe segundo a reação irreversível A B;
- A reação é de 1ª ordem e ocorre a uma taxa $r=k.c$, onde: →
 - $r=n^0$ moles de A que se decompõe/(l)(tempo);
 - c =concentração de A, moles de A/l;
 - k =constante de velocidade, função da temperatura.
- A reação é conduzida em 2 tanques, com agitação e mantidos a temperaturas diferentes.
- Temperatura no tanque 2 > temperatura no 1 => $k_2 > k_1$

Objetivo do Sistema de Controle;

- Manter c_2 , concentração de A que deixa o Tanque 2, num valor pré-especificado, apesar de variações na concentração de entrada c_0 .
- Forma de atuação: adição de um fluxo de A puro, vindo de um tanque auxiliar, ao tanque 1 através de uma válvula de controle.

Obs.: i) o valor de \dot{m} não pode ser nulo, ié, deve haver adição constante de A ao processo; ii) o sistema é não co-locado, ié, atua-se na entrada do 1º tanque e mede-se na saída do 2º.

- **Modelagem do sistema**
- Função de Transferência para os Reatores:
Balanço de material em torno do tanque 1

$$V \frac{dc_1}{dt} = Fc_0 - \left(F + \frac{m}{\rho_A}\right)c_1 - k_1Vc_1 + m$$

m=vazão molar de A puro através da válvula;

ρ_A =densidade de A puro, gmol/l;

V=volume retido no tanque, l.

Admitindo que a vazão volumétrica na válvula seja muito menor que a vazão de entrada F:

Automação e Controle IPT 2008

$$V \frac{dc_1}{dt} + (F + k_1 V) = F c_0 + m$$

$$\tau_1 \frac{dc_1}{dt} + c_1 = \frac{F}{F + k_1 V} c_0 + \frac{1}{F + k_1 V} m; \tau_1 = \frac{V}{F + k_1 V} \quad (1)$$

Em regime permanente, $\frac{dc_1}{dt} = 0$

$$\bar{c}_1 = \frac{F}{F + k_1 V} \bar{c}_0 + \frac{1}{F + k_1 V} \bar{m} \quad (2)$$

Subtraindo (2) de (1) e definindo variáveis-erro como:

$$C_1 = c_1 - \bar{c}_1; C_0 = c_0 - \bar{c}_0; M = m - \bar{m}$$

$$\tau_1 \frac{dC_1}{dt} + C_1 = \frac{F}{F + k_1 V} C_0 + \frac{1}{F + k_1 V} M$$

Aplicando a Transformada de Laplace:

$$C_1(s) = \frac{F}{F + k_1 V} C_0(s) + \frac{1}{F + k_1 V} M(s)$$

Para o Tanque 2:

$$\tau_2 \frac{dC_2}{dt} + C_2 = \frac{F}{F + k_2 V} C_1; \tau_2 = \frac{V}{F + k_2 V}$$

$$C_2(s) = \frac{\frac{F}{F + k_1 V}}{\tau_2 s + 1} C_1(s)$$

Automação e Controle IPT 2008

- Valores numéricos para o processo considerado:
- $\rho_A = 12,81 \text{ g moles/l}$;
- $C_0 = 1,60 \text{ g mol A/l}$;
- $\bar{F} = 2800 \text{ l/min}$;
- $\bar{m} = 454 \text{ g moles/min}$;
- $K_1 = 1/6 \text{ min}^{-1}$;
- $K_2 = 2/3 \text{ min}^{-1}$;
- $V = 8400 \text{ l}$

Automação e Controle IPT 2008

Substituindo:

- $\tau_1 = 2 \text{ min};$
- $\tau_2 = 1 \text{ min};$
- $\bar{c}_1 = 0,94 \text{ g mol A/l};$
- $\bar{c}_2 = 0,39 \text{ g mol A/l};$
- $\frac{\bar{m}}{\rho_A} = 35 \text{ l/min}.$

○ **Válvula de Controle**

Do catálogo da válvula:

- Vazão linear de 0 a 56 l/min, para pressão variando de 1,2 a 2,0 atm;
- Constante de tempo pequena comparada às outras constantes de tempo do processo: despreza-se sua dinâmica.

Daí:

-Coeficiente vazão-pressão: $k_v = \frac{56 - 0}{2,0 - 1,2} = 68,3 \text{ l / min / atm}$

-Vazão de regime: $\frac{\dot{m}}{\rho_A} = 35 \text{ l / min}$

- Com isso, a pressão de regime será:

$$p = 1,2 + \frac{35}{56}(2,0 - 1,2) \Rightarrow p = 1,71 \text{ atm}$$

- Equação da válvula: \bar{m}

$$m = [35 + k_v(p - 1,71)]\rho_A$$

- Variáveis-erro:

$$M = m - \bar{m}; P = p - 1,71 \Rightarrow M = k_v \rho_A P$$

- Função de Transferência:

$$\frac{M(s)}{P(s)} = k_v \rho_A$$

- **Sensor/Registrador** (informação!)

Dispositivo de pena, linear e sem atraso. A pena percorre escala de 0 a 10,16 cm (0 a 4 in) para variações de 0,16 a 0,80 g mol de A/l.

Sensibilidade do instrumento: $k_m = \frac{10,16}{0,80 - 0,16} = 15,88 \text{ cm}/(\text{g mol.l})$

Valor de referência ($c_2 = 0,39$): $R = 10,16 \left(\frac{0,39 - 0,16}{0,80 - 0,16} \right) = 3,65 \text{ cm}$

Equação do sensor:

$$b = R + k_m (c_2 - 0,39)$$

Variável erro no sensor: $B=b-R=b-3,65$; $B=k_m C_2$

Função de Transferência:

$$\frac{B(s)}{C_2(s)} = k_m$$

No caso, temos um transdutor (troca de unidades entre entrada e saída)

Controlador

Por enquanto, admitimos apenas proporcional. Com isso, a relação pressão de saída do controlador e o erro fica:

$$p = \bar{p} + k_c(R - b) = \bar{p} + k_c \varepsilon$$

onde $\varepsilon = R - b$ é o erro e k_c é o ganho proporcional (atm/cm)

Em variáveis-erro: $P = k_c \varepsilon$ e a Função de Transferência fica:

$$\frac{P(s)}{\varepsilon(s)} = k_c$$

Atraso de Transporte

Uma parte do fluxo é retirada continuamente do Tanque 2, a uma taxa de 2,8 l/min, através da linha de amostragem que contém o sensor de concentração. Esse elemento deve ficar em local remoto por questões de segurança.

A linha de amostragem tem comprimento 15,24 m e a área da seção transversal do tubo é 0,92 cm².

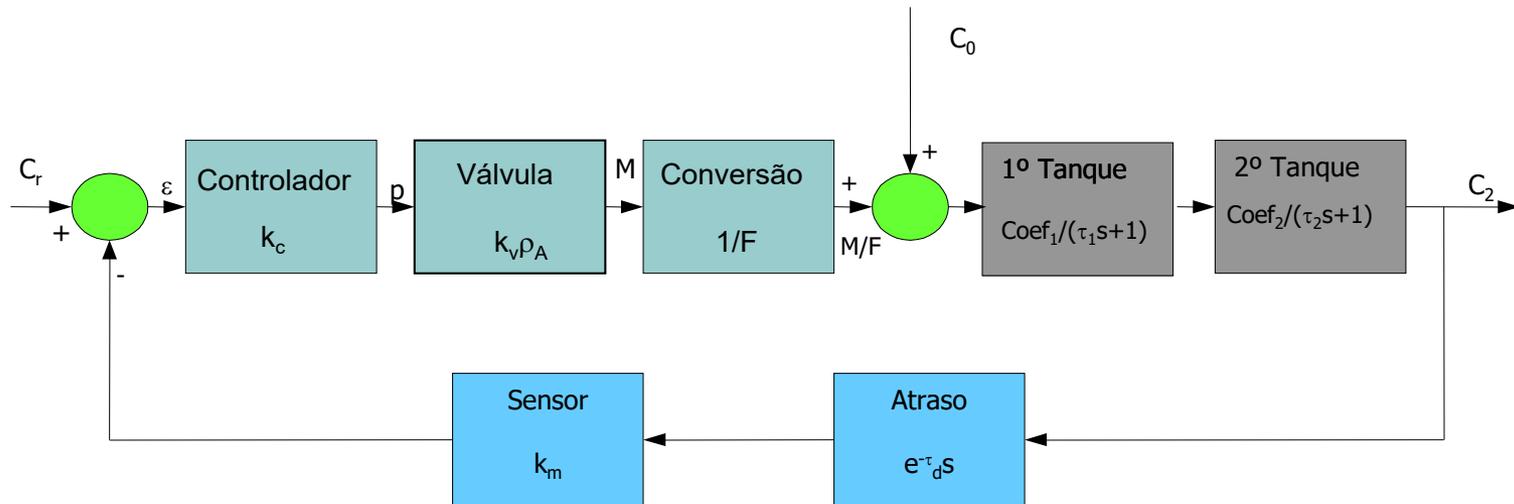
Com isso, o efeito dessa linha de amostragem é impor um atraso de transporte, representado por:

$$\tau_d = \frac{\text{volume}}{\text{vazão}} = \frac{1524 \cdot 0,92}{2800} \Rightarrow \tau_d = 0,5 \text{ min}$$

Função de Transferência associada:

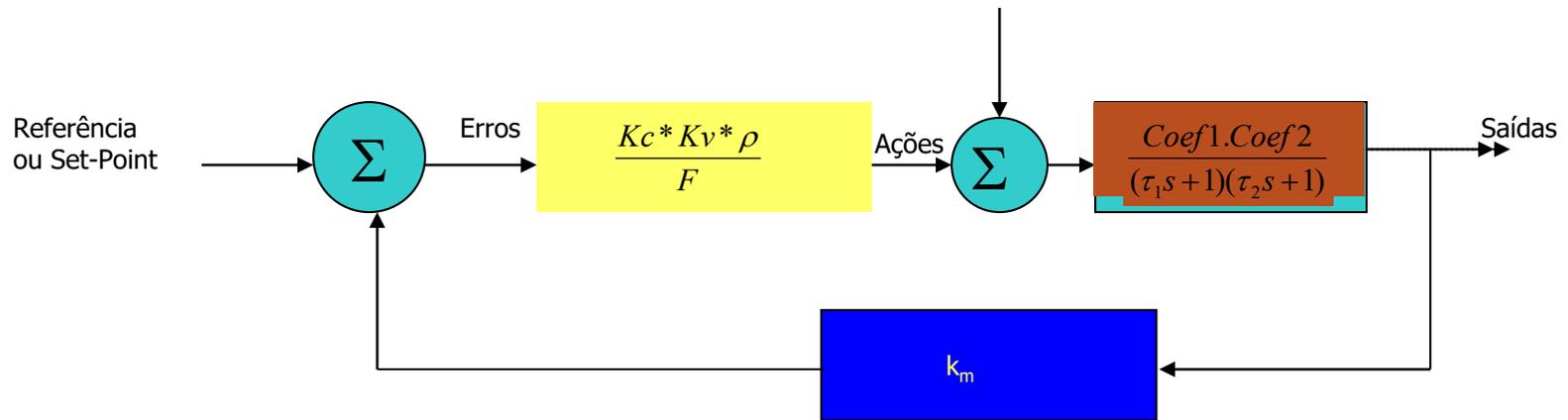
$$e^{-\tau_d s} = e^{-0,5s}$$

Representação por Diagrama de Blocos



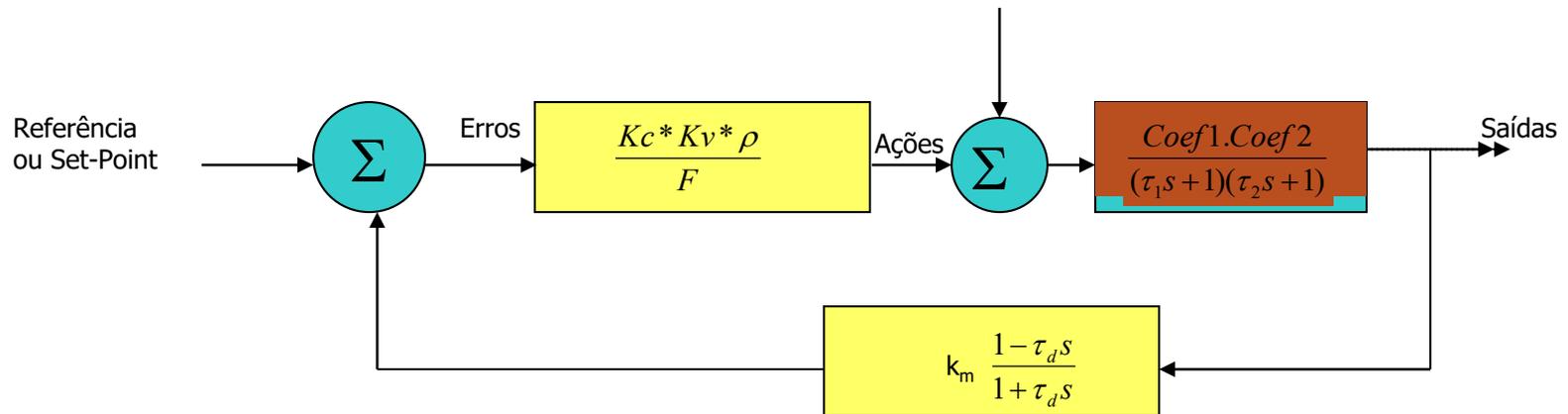
Automação e Controle IPT 2008

- Simular o sistema de 2 tanques com e sem atraso:
- A) **Sem atraso**



Automação e Controle IPT 2008

- Simular o sistema de 2 tanques com e sem atraso:
- B) **Com atraso**



- Representação por Variáveis de Estado

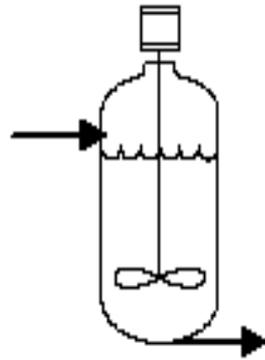
Usaremos o exemplo de um CSTR para mostrar os principais conceitos. O comportamento dinâmico de um CSTR pressupõe o desenvolvimento de equações de balanço para:

- massa
- energia
- componentes

Balanço de Massa

Na ausência de reações, o balanço de massa do sistema é dado por:

Vazão de massa na entrada – Vazão na saída =
Variação de massa dentro do reator



$$F_{\text{ent}}\rho_{\text{ent}} - F_{\text{sai}}\rho_{\text{sai}} = d(V\rho)/dt$$

Normalmente, a densidade ρ é admitida constante ao longo do tempo e do processo:

$$F_{\text{ent}} - F_{\text{sai}} = dV/dt \quad (1)$$

Balanco de Componentes

Componentes podem aparecer ou desaparecer devido às reações, lembrando que a massa global de reagentes e produtos deve ser sempre a mesma. Por exemplo, se $A \rightarrow B$ é uma reação irreversível de 1ª ordem:

$$dC_A/dt = -k.C_A$$

Portanto, a concentração C_A diminui ao longo do tempo com taxa k . Então, o balanço para o componente A é dado por:

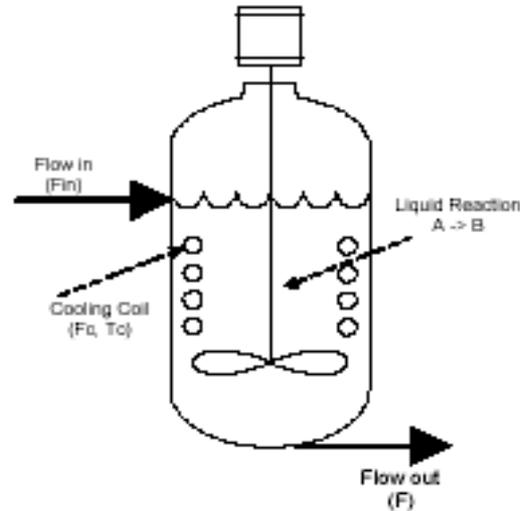
$$F_{ent} \cdot C_{A\ ent} - F_{sai} \cdot C_{A\ sai} - kVC_A = d(V \cdot C_A)/dt \quad (2)$$

n relações do tipo da Equação (2) devem ser escritas quando existem n componentes envolvidos no processo.

Balanço de Energia

Variação de Energia na entrada - Variação de Energia na saída + Taxa em que Calor é liberado = Variação de Energia dentro do sistema

Automação e Controle IPT 2008



A reação $A \rightarrow B$ é admitida exotérmica. Uma serpentina refrigerante é usada para remover o calor da reação a uma taxa Q (J/s ou W). O calor específico e a densidade do líquido são constantes.

Nesse caso:

$$F_{ent}\rho_{ent}C_p[T_{ent}-T_{amb}] - F_{sai}\rho_{sai}C_p[T-T_{amb}] + kVC_A\Delta H - Q = \rho C_p V(dT/dt)$$

Se $F_{ent} = F_{sai} = F$, a expressão se simplifica para:

$$\rho C_p F (T_{ent}-T) + kVC_A\Delta H - Q = \rho C_p V(dT/dt)$$

onde k pode ser expresso pela lei de Arrhenius:

$$k=k_0\exp(-E/RT),$$

com E – energia de ativação; R – constante da Lei dos Gases; k_0 – coeficiente de Arrhenius e T – temperatura da reação

Cálculo da troca de calor através da serpentina ou da jaqueta

A taxa de troca de calor, Q , pode, em geral, ser utilizada para regular a temperatura do reator. Isso é feito através da variação da vazão de refrigerante. As hipóteses geralmente feitas são as seguintes:

- O refrigerante tem densidade e calor específico constantes;
- A dinâmica de refrigeração pode ser ignorada (é mais rápida que o reator);
- A área da serpentina, multiplicada por um coeficiente global de troca de calor, é aproximada por:

$$A_c U = \alpha F_c^\beta$$

onde α e β são constantes.

- A diferença média logarítmica de temperaturas é aproximada por uma média aritmética.

Dessa maneira:

$$Q = F_c \rho C_p (T_{c, \text{sai}} - T_{c, \text{ent}})$$

$$Q = \alpha F_c^\beta ([T - T_{c, \text{ent}}] + [T - T_{c, \text{sai}}])/2$$

Essas duas expressões são combinadas de modo a eliminar a temperatura de saída, levando a:

$$Q = \frac{\alpha F_c^{\beta+1} (T - T_{c, \text{ent}})}{F_c + \frac{\alpha F_c^\beta}{2 \rho C_p}}$$

A expressão final para o balanço de energia resulta, então:

$$\rho C_p F (T_{ent} - T) - k V C_A \Delta H - \frac{\alpha F_c^{\beta+1} (T - T_{cent})}{F_c + \frac{\alpha F_c^\beta}{2\rho C_p}} = \rho C_p \frac{dV}{dt} \quad (3)$$

Linearização das Equações do CSTR

A linearização das equações (1) a (3) é feita sempre em torno de valores de regime permanente. Para achar esses valores, basta igualar a zero todos os termos que contêm as derivadas. O sistema resultante é, portanto, algébrico, embora não linear.

Existem várias maneiras de linearizar um sistema de equações:

- Expansão em Série de Taylor;
- Linearização Entrada-Saída;
- Linearização Global;
- Outras

A expansão em série de Taylor é, de longe, a mais conhecida e empregada mas há casos em que falha. As outras técnicas são mais sofisticadas e devem ser empregadas quando a primeira falha.

Para simplificar nossa análise, admitimos que existe uma única reação $A \rightarrow B$ de 1ª ordem e que o controle de nível é perfeito ($F_{ent} = F$), o que dispensa a equação (1). O modelo para o CSTR é dado, então, por:

$$F_{ent} \cdot C_{A\ ent} - F_{sai} \cdot C_{A\ sai} - kVC_A = d(V \cdot C_A)/dt \quad (2)$$

$$\rho C_p F (T_{ent} - T) - kVC_A \Delta H - \frac{\alpha F_c^{\beta+1} (T - T_{cent})}{F_c + \frac{\alpha F_c^\beta}{2\rho C_p}} = \rho C_p \frac{dV}{dt} \quad (3)$$

A expansão em série de Taylor em torno dos valores de regime leva a:

$$dC_A/dt = [\text{coef11}]C'_A + [\text{coef12}]C'_{Aent} + [\text{coef13}]T' + [\text{coef14}]F' \quad (4)$$

onde cada variável $x' = x - x_{reg}$ e

$$[\text{coef11}] = -\left[\frac{F}{V} + k_o \exp\left(\frac{-E}{RT}\right)\right]$$

$$[\text{coef12}] = \left[\frac{F}{V}\right]$$

$$[\text{coef13}] = -\left[\frac{k_o E}{RT^2} \exp\left(\frac{-E}{RT}\right) C_A\right]$$

$$[\text{coef14}] = \left[\frac{C_{Aent} - C_A}{V}\right]$$

$$dT'/dt = [\text{coef21}]F' + [\text{coef22}]T' + [\text{coef23}]T'_{ent} + [\text{coef24}]C'_A + [\text{coef25}]F'_c \quad (5)$$

Onde:

$$[\text{coef21}] = \left[\frac{T'_{ent} - T}{V} \right]$$

$$[\text{coef22}] = - \left[\frac{F}{V} - \frac{\Delta H}{\rho C_p} k_0 \left(\frac{E}{RT^2} \right) \exp\left(\frac{-E}{RT} \right) C_A + \frac{\alpha F_c^{\beta+1}}{V \rho C_p F_c + \alpha F_c^\beta V / 2} \right]$$

$$[\text{coef23}] = \left[\frac{F}{V} \right]$$

$$[\text{coef24}] = - \left[\frac{\Delta H}{\rho C_p} k_0 \exp\left(\frac{-E}{RT} \right) \right]$$

$$[\text{coef25}] = \left[\frac{-\frac{\alpha \beta F_c^\beta}{V \rho C_p} \left(F_c + \frac{\alpha F_c^\beta}{2 \rho C_p} \right) (T - T'_{ent})}{\left[V \rho C_p F_c + \frac{\alpha F_c^\beta V}{2} \right]^2} \right]$$

São 2 equações lineares que podem ser agrupadas como:

$$\begin{bmatrix} \frac{dC'_A}{dt} \\ \frac{dT'}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{coef11} & \text{coef13} \\ \text{coef24} & \text{coef22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_A \\ T' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{coef12} & 0 & \text{coef14} & 0 \\ 0 & \text{coef23} & \text{coef21} & \text{coef25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'_{Aent} \\ T'_{ent} \\ F' \\ F'_c \end{bmatrix}$$

e

ou

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} C_A \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{24} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_A \\ T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{12} & 0 & c_{14} & 0 \\ 0 & c_{23} & c_{21} & c_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{Aent} \\ T_{ent} \\ F \\ F_c \end{bmatrix}$$

Das variáveis de entrada no modelo, a vazão de refrigerante é a única que pode ser manipulada. Vamos separar da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} C_A \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{24} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_A \\ T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c_{25} \end{bmatrix} F_c + \begin{bmatrix} c_{12} & 0 & c_{14} \\ 0 & c_{23} & c_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{Aent} \\ T_{ent} \\ F \end{bmatrix} \quad (6)$$

A Equação (6) representa o MODELO EM VARIÁVEIS DE ESTADO do reator:

$$\frac{d}{dt} x = \dot{x} = Ax + Bu + Ep$$

- $$\dot{x} = Ax + Bu + Ep$$

x – vetor de variáveis de estado

u – vetor de variáveis de controle

p – vetor de perturbações

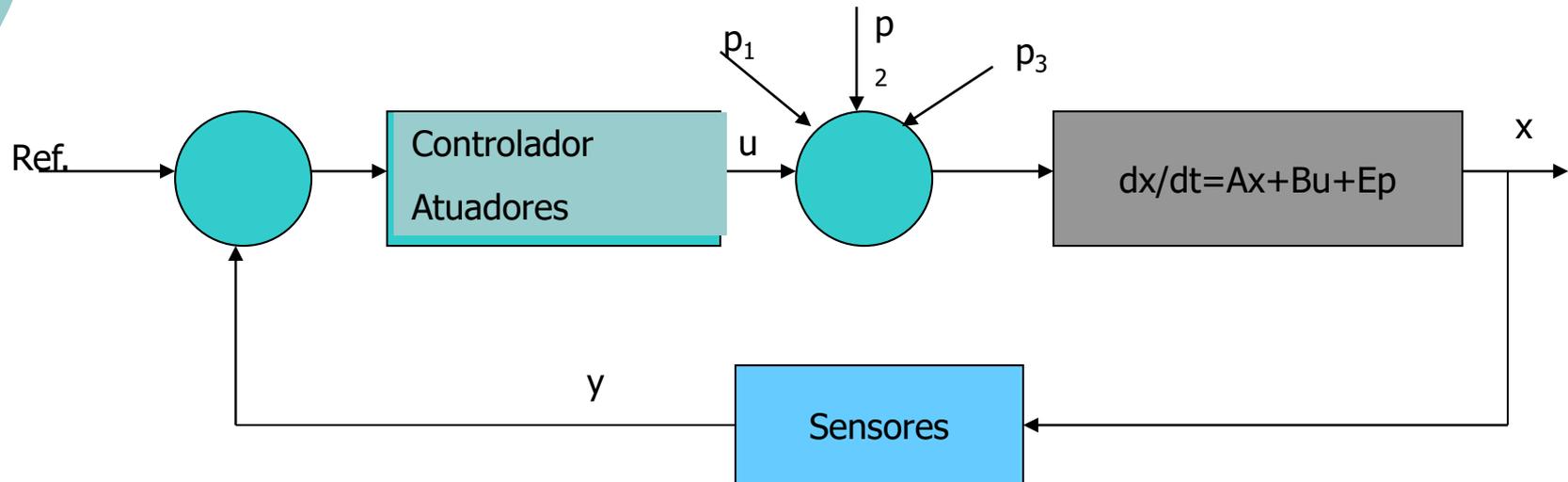
A – matriz dinâmica (2x2)

B – matriz de controle (2x1)

E – matriz de perturbações (2x3)

Automação e Controle IPT 2008

O sistema CSTR é claramente multivariável: 4 entradas (F_c , controle; C_{aent} , T_{ent} , F , perturbações) e 2 saídas (C_A , T).



Para completar a representação é preciso dizer como o sistema será medido. Isto é representado por uma transformação algébrica:

$$y=Cx$$

y – vetor de observações (dimensão igual ao n^o de sensores)

C – matriz de observação

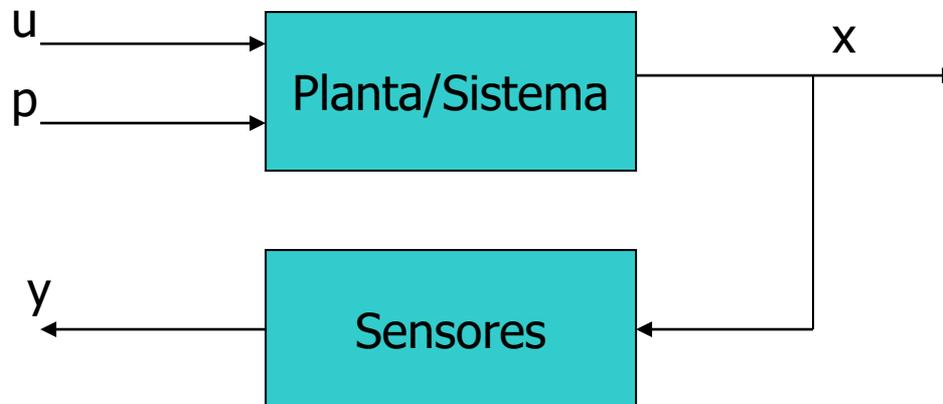
- MODELOS EM REPRESENTAÇÃO DE ESTADOS

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Ep \\ y &= Cx\end{aligned}$$

- O que se pretende? Atingir os 4 objetivos:
 - Sistema estável (alterar A)
 - Resposta dinâmica adequada (adequar A)
 - Seguir referência
 - Rejeitar perturbações (para qualquer p, sistema volta ao regime permanente)

- FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA E VARIÁVEIS DE ESTADO

Para fins de projeto de controle, a(s) Função(ões) de Transferência de interesse são as que relacionam entradas (controle ou perturbações) e saídas dos instrumentos (lidas pelos sensores). Portanto, corresponde(m) à seguinte parte:



Uma Função de Transferência corresponde à relação de transformação entre a saída medida y e a entrada (u ou p), expressa em números complexos, s . A transformação da relação do domínio do tempo para o domínio complexo é extremamente útil para operações matemáticas.

No caso em análise, admitamos que as perturbações sejam nulas, o que reduz o sistema de equações a:

- $$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

Aplicando a Transformada de Laplace em ambos os lados:

$$sIX(s) = AX(s) + BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s)$$

Da 1ª equação:

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s)$$

Substituindo na 2ª equação:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} BU(s) \Rightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B$$

A expressão anterior contém uma ou mais Funções de Transferência entre as entradas de controle e as variáveis medidas.

No caso do CSTR, supondo que as duas variáveis de interesse, concentração C_A e temperatura T , sejam medidas, duas FT's serão

geradas:

$$G_1(s) = \frac{C_A(s)}{F_C(s)}; G_2(s) = \frac{T(s)}{F_C(s)}$$

relacionando a influência da vazão de refrigerante, F_C , com as variáveis de processo