CONTROLE POLI 2021– LUGAR DAS RAÍZES

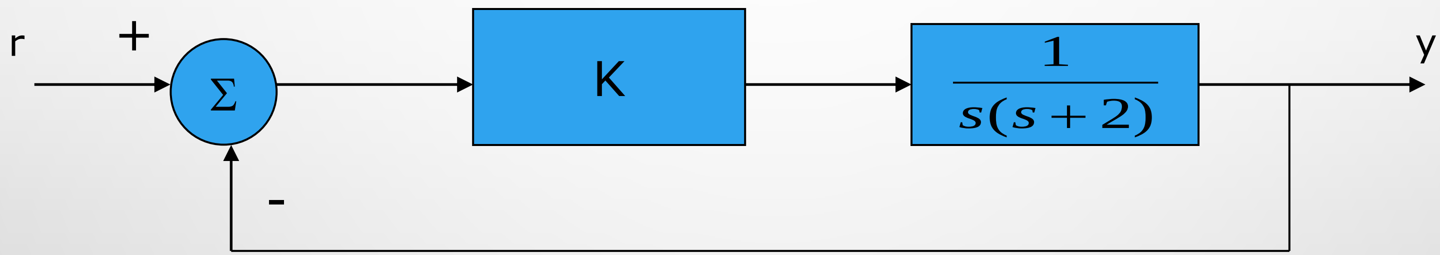
RESUMO

- MOTIVAÇÃO
- MÉTODO DO LUGAR DAS RAIZES
- REGRAS DE CONSTRUÇÃO
- EXEMPLOS
- SOLUÇÃO COM MATLAB

CONTROLE POLI 2021– LUGAR DAS RAÍZES

O MÉTODO DO LUGAR DAS RAÍZES (EVANS, 1948,1950)

CONSIDEREM O SISTEMA:



A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA ENTRADA-SAÍDA EM MALHA FECHADA É:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

E A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA:

$$P(s) = s^2 + 2s + K = 0$$

CONTROLE POLI 2021– LUGAR DAS RAÍZES

O SISTEMA É ESTÁVEL PARA QUALQUER VALOR DE K>0, UMA VEZ QUE AS RAÍZES DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA TÊM SEMPRE PARTE REAL POSITIVA:

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$$

SE 0<K<1, AS RAÍZES SÃO REAIS NEGATIVAS E O SISTEMA É SUPER-AMORTECIDO.

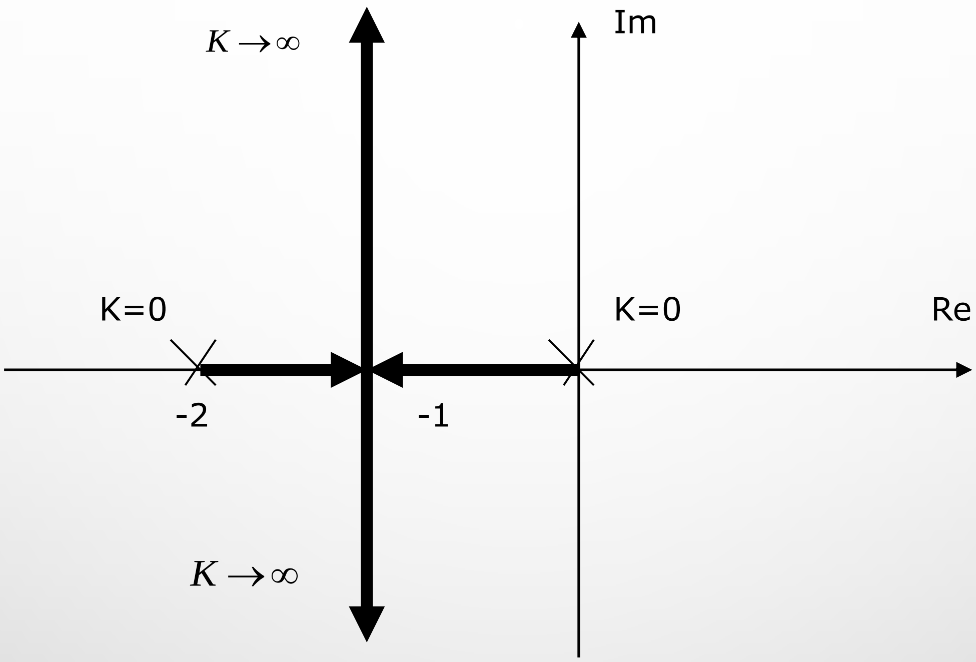
SE K=1, AS RAÍZES SÃO REAIS, IGUAIS E NEGATIVAS E O SISTEMA TEM AMORTECIMENTO CRÍTICO.

SE K>1, AS RAÍZES SÃO COMPLEXAS CONJUGADAS E O SISTEMA É SUB-AMORTECIDO.

A PARTIR DESSA ANÁLISE, PODE-SE MONTAR UM GRÁFICO QUE PERMITA OBSERVAR O CAMINHO QUE AS RAÍZES PERCORREM ENQUANTO O GANHO K DO SISTEMA VARIA DE 0 A ∞.

ESSE É UM CASO BASTANTE SIMPLES. O LR SE BASEIA NUM CONJUNTO DE 6 REGRAS QUE PERMITE MONTAR ESSE GRÁFICO PARA UM SISTEMA COM QUALQUER NÚMERO DE ZEROS OU PÓLOS.

CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES



Percebe-se que qualquer que seja o valor de K, o sistema será estável, uma vez que não há cruzamento com o eixo imaginário, ou seja, o sistema não vai para a região de instabilidade.

O ponto chave é saber se essa análise pode ser feita para sistemas com ordem maior que 2

CONTROLE 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

NO CASO GERAL, A EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA, 1+G(S)H(S)=0 OU GH=-1, É DIVIDIDA EM 2, CORRESPONDENTES AO MÓDULO E AO ÂNGULO COMPLEXO, IÉ, QUALQUER RAÍZ DEVE OBEDECER SIMULTANEAMENTE A 2 EQUAÇÕES:

$$|G(s)H(s)| = 1$$

$$\angle G(s)H(s) = -1 \Rightarrow \angle G(s)H(s) = \pm 180^{o}(2k+1), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

SE ESCREVEMOS:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

$$|G(s)H(s)| = \frac{|K|\prod_{j=1}^{m}|s+z_j|}{\prod_{i=1}^{n}|s+p_i|};$$

ONDE P_I SÃO OS PÓLOS, Z_J SÃO OS ZÉROS E K É O GANHO, ENTÃO, PARA 0<K<∞:

$$\angle GH = \angle K + \sum_{j=1}^{m} \angle(s+z_j) - \sum_{i=1}^{n} \angle(s+p_i) = (2k+1)\pi$$

CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

- REGRAS DE CONSTRUÇÃO DO LUGAR DAS RAÍZES

REGRA I

OS RAMOS DO LR COMEÇAM NOS PÓLOS DE GH E TERMINAM NOS ZEROS DE GH OU NO ∞. O NÚMERO DE SEGMENTOS DO LR É IGUAL AO NÚMERO DE PÓLOS (N) MENOS O NÚMERO DE ZEROS (M), ISTO É, N=N-M.

ISTO VEM DO FATO QUE:

$$|GH| = 1 \Rightarrow \frac{\prod_{j=1}^{m} |s + z_j|}{\prod_{i=1}^{n} |s + p_i|} = \frac{1}{K}$$

$$K \to 0 \Rightarrow \frac{\prod |s + z_j|}{\prod |s + p_i|} \to \infty, ié, s \to p_i;$$

ENTÃO:

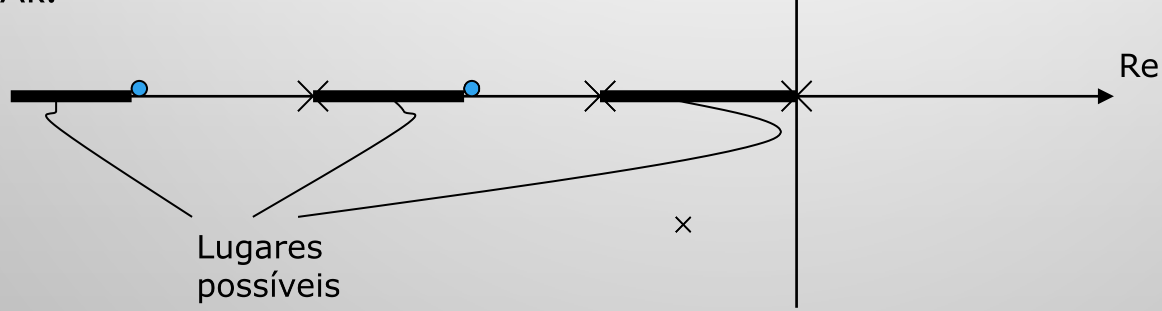
$$K \to \infty \Rightarrow \frac{\prod |s + z_j|}{\prod |s + p_i|} \to 0, ié, s \to z_j ou s \to \infty$$

CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

<u>REGRA II</u>

O LR É SIMÉTRICO EM RELAÇÃO AO EIXO REAL E OS SEGMENTOS DO LR SOBRE O EIXO REAL SÓ EXISTEM SE À DIREITA DO SEGMENTO HOUVER SOMA ÍMPAR DOS NÚMEROS DE PÓLOS E ZEROS.

ISTO OCORRE PORQUE AS RAÍZES DA EQ. CARACTERÍSTICA OU SÃO COMPLEXAS CONJUGADAS OU SÃO REAIS. O FATO DE SEREM COMPLEXAS CONJUGADAS IMPÕE SIMETRIA EM RELAÇÃO AO EIXO REAL, DE ONDE SE DEDUZ QUE NÃO TÊM CONTRIBUIÇÃO ANGULAR SOBRE O EIXO. COMO AS RAÍZES REAIS DEVEM SATISFAZER A CONDIÇÃO ANGULAR DE SOMA $(2K+1)\pi$, A SOMA DOS NÚMEROS DE PÓLOS E ZEROS TEM DE SER ÍMPAR.



CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

REGRA III

OS SEGMENTOS DO LR QUE TENDEM A ∞ SE APROXIMAM ASSINTOTICAMENTE DE RETAS QUE TEM COMO ORIGEM O PONTO (Σ_A, 0) DO EIXO REAL E FORMAM ÂNGULOS

$\Theta_K=(2K+1)\pi/N$, K=0,1,2,...(N-1) COM O MESMO EIXO REAL. ESSAS ASSÍNTOTAS PODEM SER O EIXO REAL, O EIXO IMAGINÁRIO OU PARES DE RETAS SIMÉTRICAS QUE SE INTERCEPTAM SOBRE O EIXO REAL NO PONTO:

$$\sigma_a = \frac{\sum(s+p_i) - \sum(s+z_j)}{N}$$

VAMOS COMEÇAR A MONTAR UM EXEMPLO COM A FT:

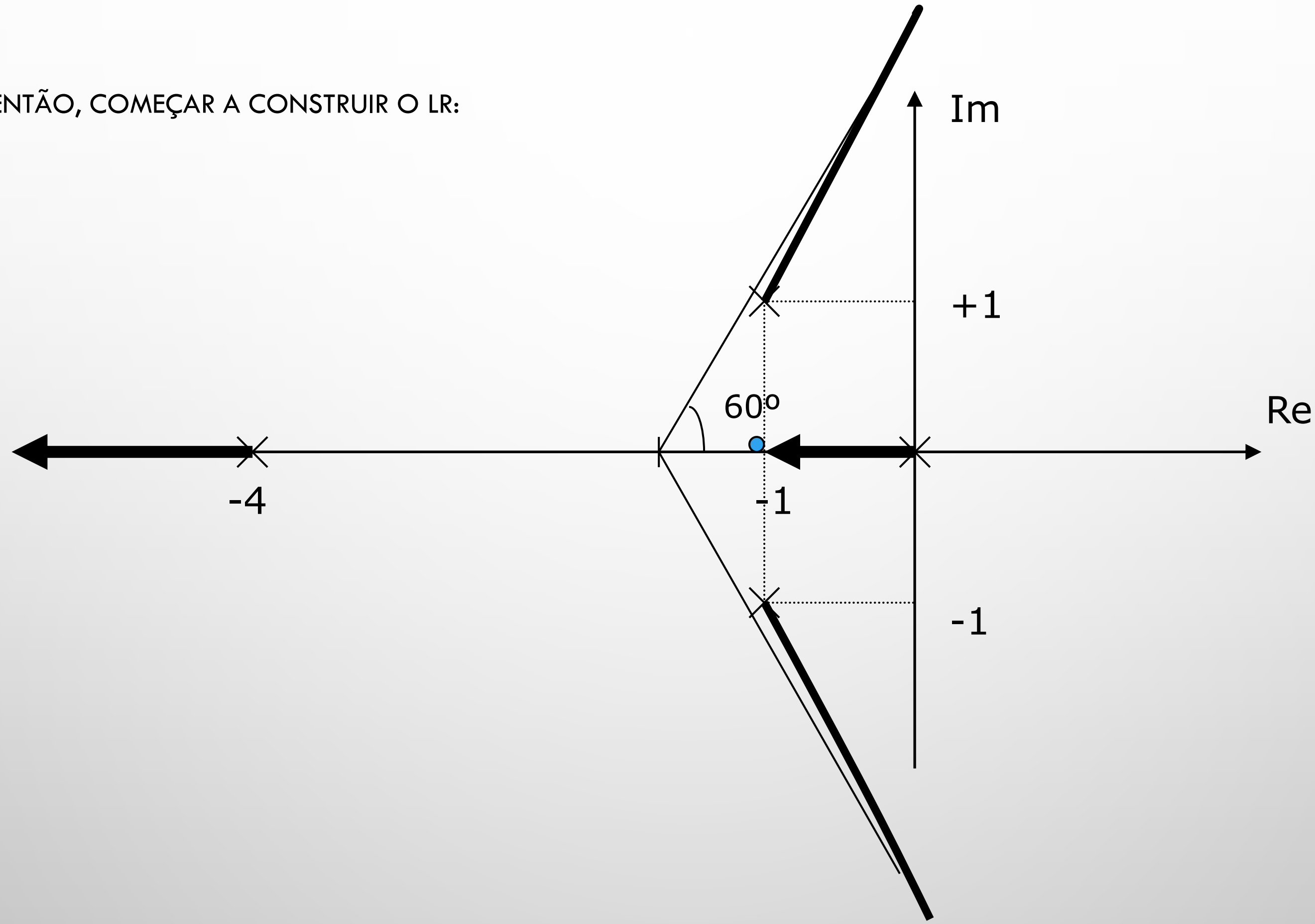
$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+4)(s^2+2s+2)}$$

ESSA FT TEM UM ZERO EM S=-1 E 4 PÓLOS $S_1=0$, $S_2=-4$ E $S_{3,4}=-1\pm 1I$. ASSÍNTOTAS EXISTIRÃO EM $\Theta_K=(2K+1)\pi/3$, K=0,1,2, JÁ QUE N=N-M, COM N=4 E M=1. DAÍ, $\Theta_0=\pi/3$, $\Theta_1=\pi$ E $\Theta_2=5\pi/3$.

O PONTO DE ENCONTRO DESSAS RETAS SOBRE O EIXO REAL SERÁ $\Sigma_A=-5/3=-1,667$.

CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

PODEMOS, ENTÃO, COMEÇAR A CONSTRUIR O LR:



PROBLEMA: ESTÁ CORRETO O ÂNGULO DE SAÍDA "CHUTADO"? NÃO!

CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

REGRA IV

O ÂNGULO DE PARTIDA DE UM RAMO DO LR A PARTIR DE UM POLO COMPLEXO P_I É

$$AP_i = 180^o - \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \angle\theta_{p_i} + \sum_{j=1}^{m} \angle\theta_{z_j}$$

ANALOGAMENTE, O ÂNGULO DE CHEGADA EM UM ZERO COMPLEXO É DADO POR:

$$AC_j = 180^o + \sum_{i=1}^{n} \angle\theta_{p_i} - \sum_{j=1, j \neq i}^{m} \angle\theta_{z_j}$$

PARA O EXEMPLO EM QUESTÃO:

$$\theta_{z_1} = 90^o ; \theta_{p_4} = 90^o ; \theta_{p_1} = 135^o ; \theta_{p_2} = arctg\frac{1}{3} = 18{,}3^o$$

COM ISSO, O ÂNGULO DE PARTIDA AP_3 É APROXIMADAMENTE +27°, CONTRÁRIO AO INDICADO NA FIGURA “TENTATIVA”.

CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

REGRA V

SE O LR CRUZA O EIXO IMAGINÁRIO (LIMITE DE ESTABILIDADE), O PONTO (OU PONTOS) DE CRUZAMENTO OBRIGATORIAMENTE INDICAM POLINÔMIOS DE ORDEM 2 QUE SÃO DIVISORES EXATOS DO POLINÔMIO CARACTERÍSTICO.

OS PONTOS DE CRUZAMENTO E OS CORRESPONDENTES GANHOS SÃO OBTIDOS USANDO O CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE ROUTH. NO EXEMPLO, ISSO É FEITO A PARTIR DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA:

$$1+G(s)H(s)=s(s+4)(s^2+2s+2)+K(s+1)=0$$

$$s^4+6s^3+10s^2+(8+K)s+K=0$$

:

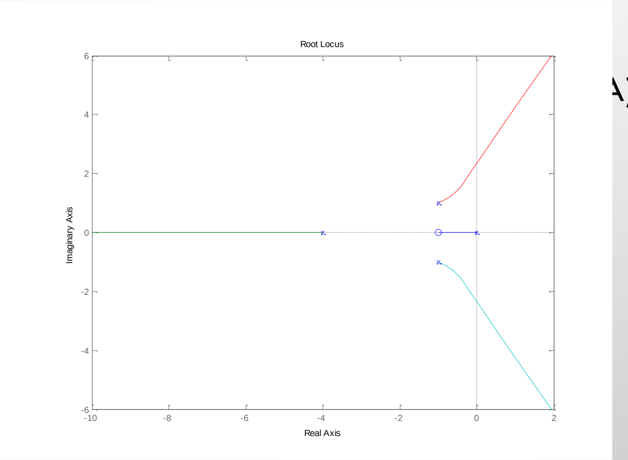
s^4	1	10	K
s^3	6	8+K	0
s^2	(52+K)/6	K	0
s^1	$416+8K-K^2$	0	
s^0	K	0	

CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

- O VALOR DE K QUE ANULA O POLINÔMIO NA LINHA CORRESPONDENTE A S^1 É UM VALOR LIMITE DE GANHO. NO CASO, K DEVE SER MENOR QUE 24,7 PARA QUE O SISTEMA SEJA ESTÁVEL.
- O VALOR LIMITE DE K, DE ACORDO COM O CRITÉRIO DE ROUTH, FAZ O POLINÔMIO EM S^2, NA LINHA ACIMA, SE ANULAR. NO CASO:

$$\frac{(-52+K)}{6}s^2 + K = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm 2{,}33i$$

- ENTÃO, LR CRUZA O EIXO IM A), QUANDO O GANHO K É IGUAL A 24,7. ISSO COMPLETA O



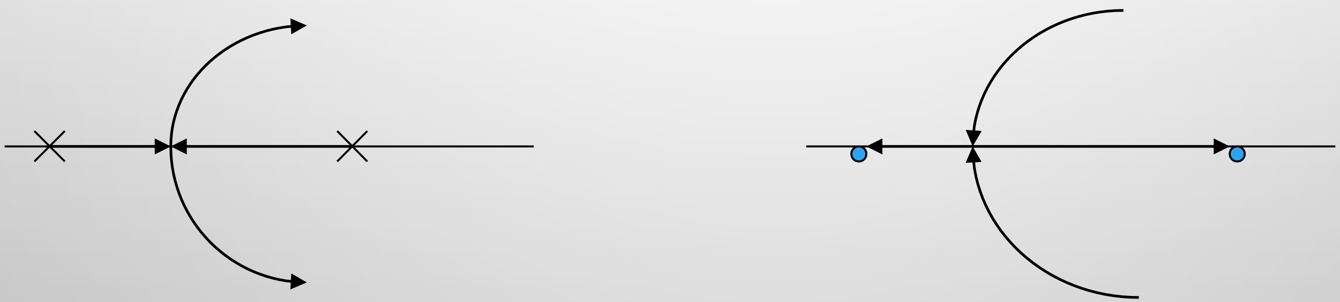
CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

<u>REGRA VI</u>

RAMOS DO LR ENTRE 2 PÓLOS OU ENTRE 2 ZEROS REAIS (OU ENTRE 1 ZERO E ±∞) DEVEM APRESENTAR PONTOS DE PARTIDA Σ QUE SATISFAÇAM A RELAÇÃO:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma + p_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sigma + z_j}$$

COM ÂNGULOS DE PARTIDA OU CHEGADA DE 90° EM RELAÇÃO AO EIXO REAL



ESSAS 6 REGRAS PERMITEM CONSTRUIR O LUGAR DAS RAIZES DE QUALQUER SISTEMA SISO.

CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

EXEMPLO:

PILOTO AUTOMÁTICO PARA O MODO LONGITUDINAL (PITCH) DE UM AVIÃO

A FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE MALHA ABERTA É DADA POR:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+a)}{s(s-b)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$$

O SISTEMA TEM UM POLO DE MALHA ABERTA NO SEMI-PLANO DIREITO E, PROVAVELMENTE, DEVE SER APENAS CONDICIONALMENTE ESTÁVEL.

VAMOS DESENHAR O LUGAR DAS RAÍZES PARA A=B=1, ζ=0,5 E ω_N=4 E ACHAR A FAIXA DE GANHOS K PARA QUE O SISTEMA SEJA ESTÁVEL.

NO CASO:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

$\sqrt{3}$

E O SISTEMA TEM UM ZERO EM -1 E 4 PÓLOS EM S_1=0, S_2=+1, $S_{3,4}$=-2±2

CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

AS ASSÍNTOTAS SÃO 3 (N= Nº PÓLOS - Nº ZEROS):

$$\theta_k = \frac{180^{o}(2k+1)}{4-1}, k = 1,2,3 \Rightarrow \theta_1 = 60^{o}; \theta_2 = 180^{o}; \theta_3 = -60^{o}$$

OS PONTOS DE PARTIDA PODEM SER CALCULADOS PELA FÓRMULA DA REGRA VI OU PELA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA:

$$1 + \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} = 0;$$

$$K = -\frac{s(s-1)(s^2+4s+16)}{(s+1)}$$

FAZENDO $\frac{dK}{ds} = 0$ E RESOLVENDO PARA S, OBTEM-SE 4 PONTOS, DOS QUAIS APENAS 2 REAIS.

OS PONTOS DE PARTIDA OU CHEGADA SERÃO S_1=+0,46 E S_2=-2,22.

MONTANDO AGORA A TABELA DE ROUTH, A PARTIR DA EQUAÇÃO CARACTERÍSTICA ACIMA:

CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

s^4	1	12	K
s^3	3	(K-16)	0
s^2	(52-K)/3	K	O
s^1	$(59K-K^2-832)/3(52-K)$	0	
s^0	K	0	

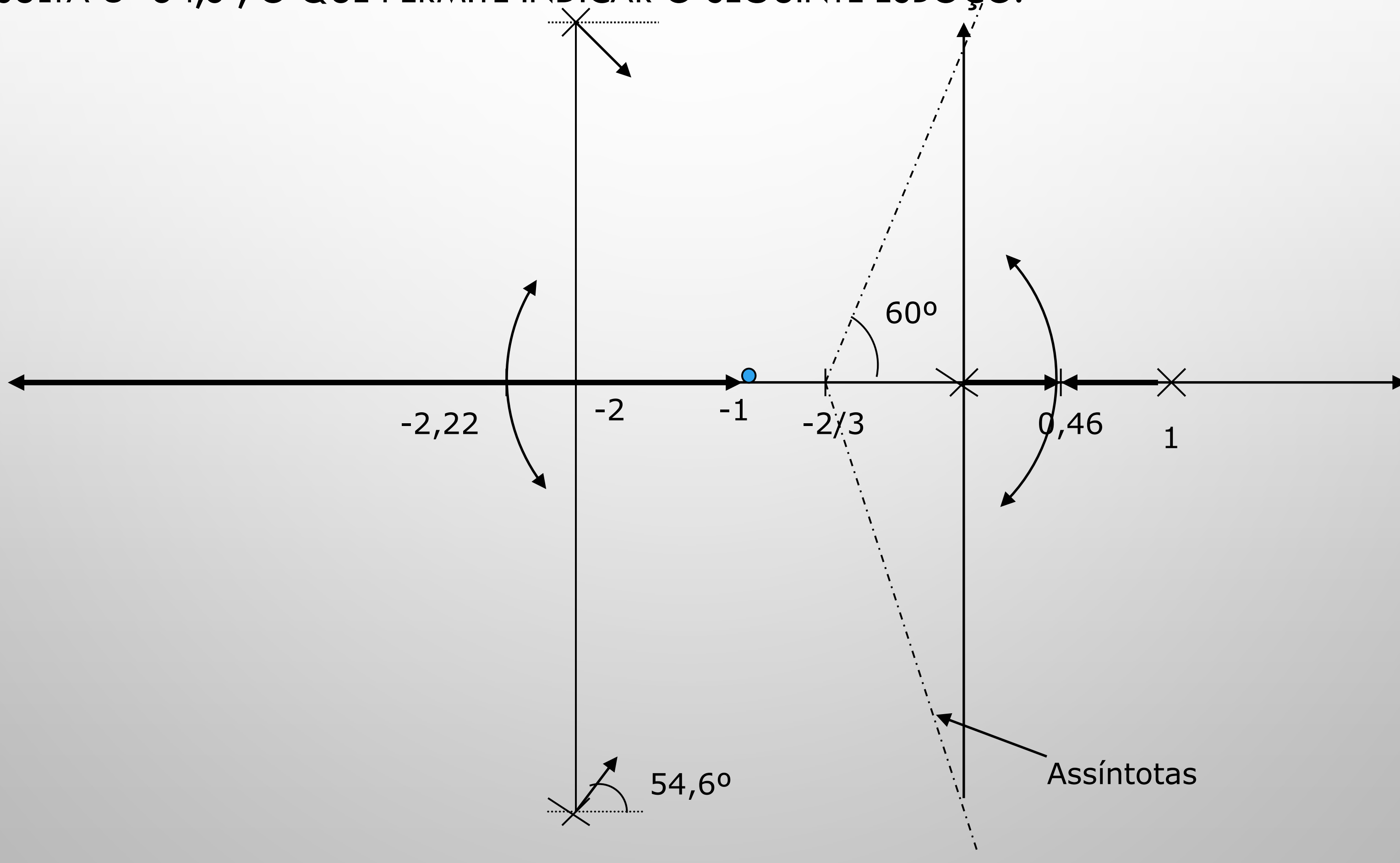
A solução da equação correspondente a s^1 resulta que o coeficiente se anula para K=35,7 e para K=23,3, indicando um duplo cruzamento do LR com o eixo imaginário. Para achar esses pontos, resolve-se:

$$\frac{(52-K)}{3}s^2 + K = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} s = \pm 2{,}56i, K = 35{,}7 \\ s = \pm 1{,}56i, K = 23{,}3 \end{array}\right.$$

CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

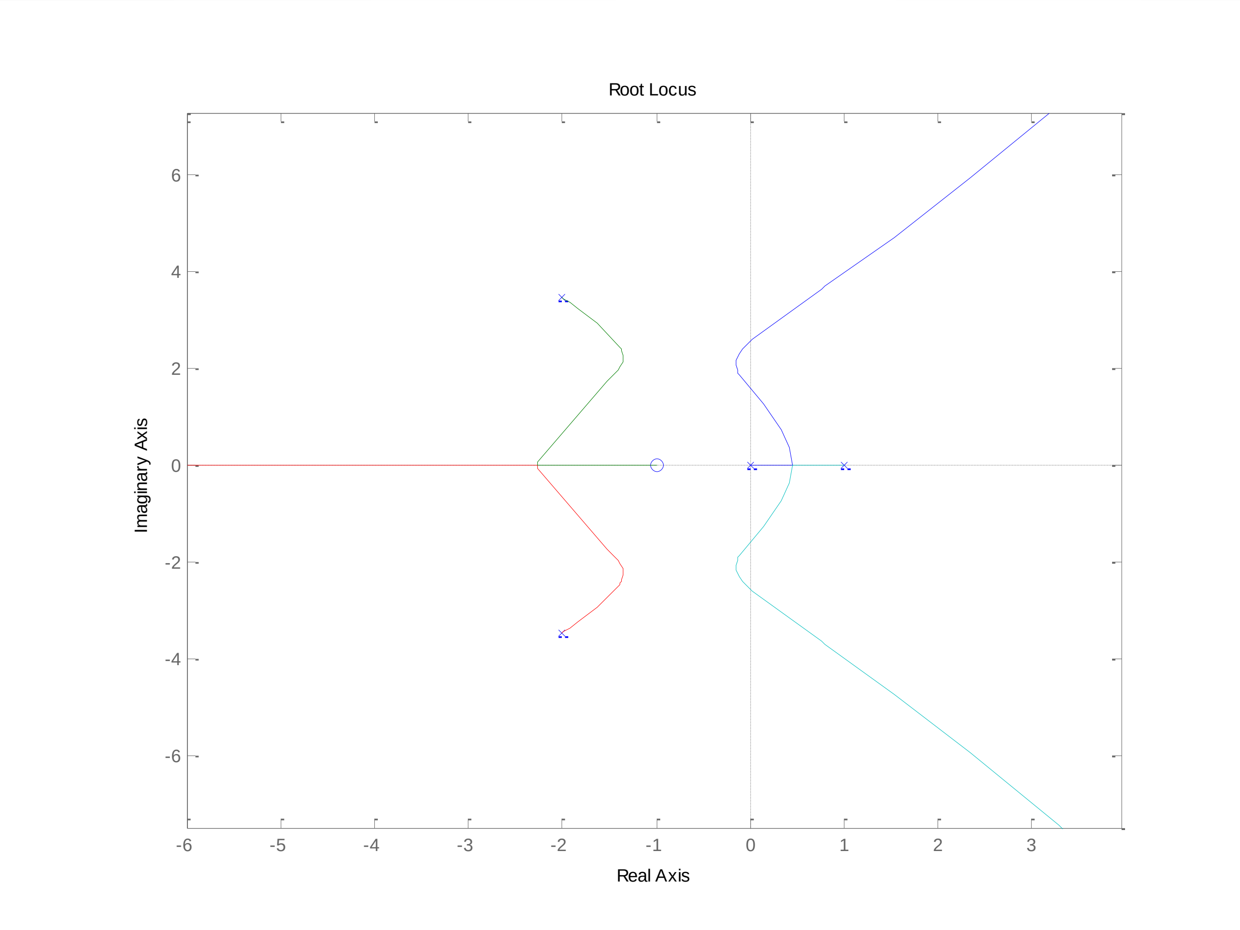
FINALMENTE, OS ÂNGULOS DE PARTIDA DOS PÓLOS COMPLEXOS PODEM SER CALCULADOS.

RESULTA Θ=54,6°, O QUE PERMITE INDICAR O SEGUINTE ESBOÇO:



CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

NOTEM QUE, NA SIMULAÇÃO DO MATLAB, OS DETALHES SÃO OMITIDOS.



CONTROLE POLI 2021 – LUGAR DAS RAÍZES

- COMANDOS DO MATLAB
- RLOCUS
- RLOCFIND
- SISOTOOL