Controle FEI 2008 Funções de Transferência

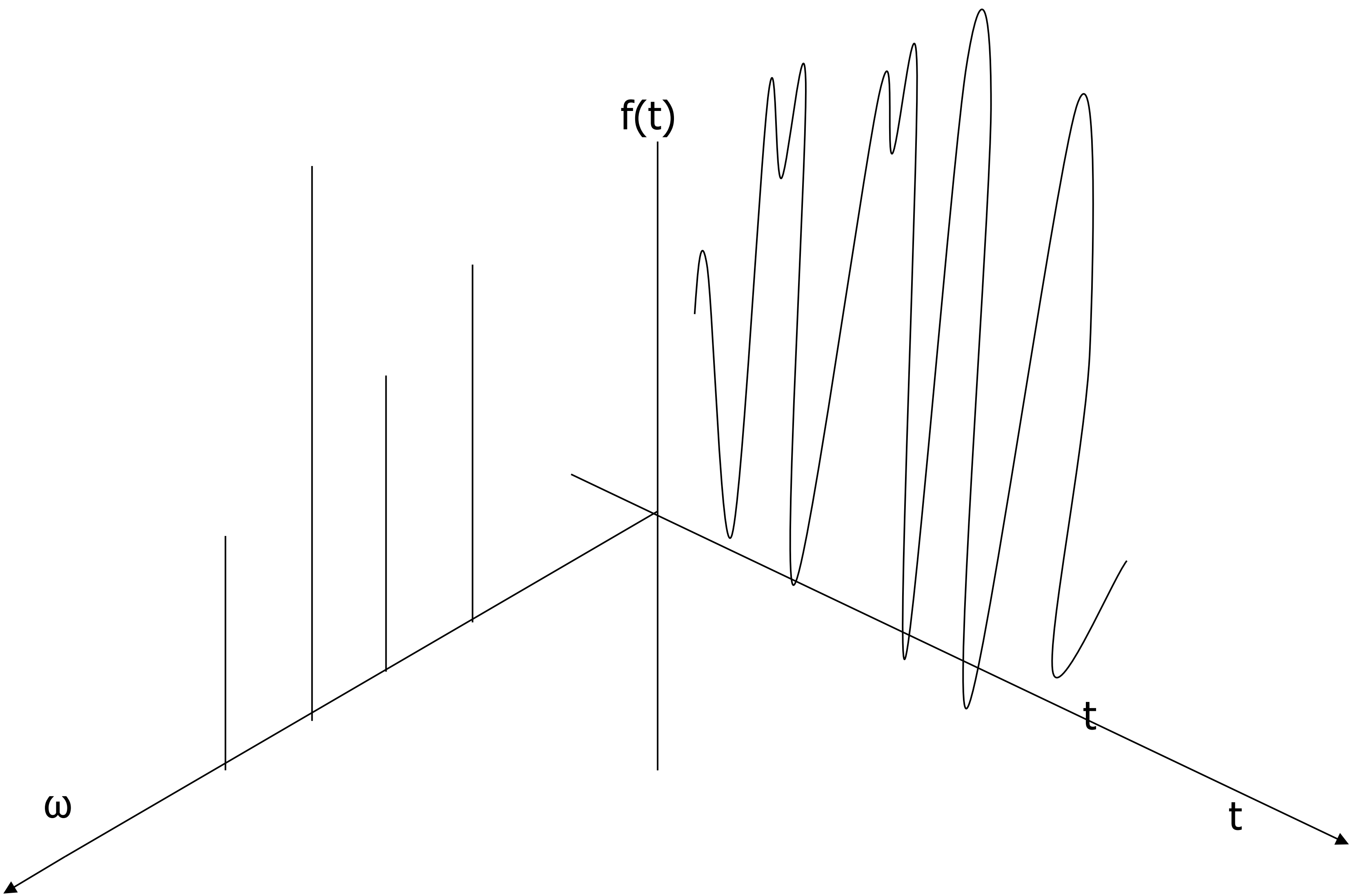
1. Transformadas de Laplace
2. Relações Variáveis de Estado-FT
3. Funções de Transferência
4. Pólos e Estabilidade
5. Ações básicas de Controle
6. Controladores PID
7. Sintonia

Funções de Transferência e a Transformada de Laplace

Uma das grandes dificuldades no entendimento das técnicas de Controle é que grande parte das relações e equações vêm escritas em variáveis complexas. Minha função é de mostrar que todas essas relações e equações podem ser entendidas num contexto mais simples.

A representação em variáveis complexas nada mais é do que levar para um outro plano um sinal complicado de entender no domínio do tempo.

Controle FEI 2008 Funções de Transferência



Controle FEI 2008 Funções de Transferência

O uso das Transformadas de Laplace na Dinâmica de Sistemas traz vantagens como:

-maneira simples de resolver Equações Diferenciais lineares;

-converter funções complicadas, como as senoidais, em funções algébricas da variável complexa s;

-diferenciação e integração substituidas por operações algébricas no plano complexo;

-permitir o uso de técnicas gráficas para previsão de desempenho sem resolver as equações da dinâmica.

- Na verdade, precisamos da Teoria de Laplace, apenas 3 resultados:

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

1. As regras de diferenciação e de integração;
2. O Teorema do Valor Final;
3. As formas das funções usuais de excitação (degrau, rampa, seno,...)

- Então, dada uma função f(t), f(t)=0 para t<0, define-se sua FT por:

$$\mathrm{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

A Transformada Inversa é dada por:

$$L^{-1}(F(s)) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{st}F(s)ds$$

A TL e um operador linear sobre f(t), de modo que:

1. $$L(f_1(t)+f_2(t)) = L(f_1(t)) + L(f_2(t))$$

2. $$L(Af(t)) = AL(f(t)) = AF(s)$$

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

Regras de Diferenciação e Integração das TLs:

$$L(\frac{d}{dt}f(t)) = sF(s) - f(0)$$

$$L(\frac{d^2}{dt^2}f(t)) = s^2F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt}f(0)$$

$$L(\int f(t)dt) = \frac{1}{s}F(s)$$

Diz o Teorema do Valor Final que se $f(t)$ e sua derivada no tempo, $df(t)/dt$, têm Transformadas, então:

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

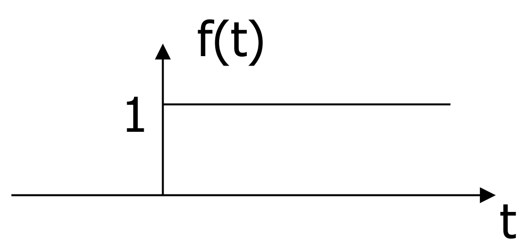
Sinais de entrada normalmente empregados nos testes e simulações de sistemas dinâmicos são o Degrau, o Impulso, a Rampa e o Seno. São funções que exigem muito do sistema, daí sua utilização. As TLs correspondentes são:

- Degrau

  $f(t)=0,\ t<0$

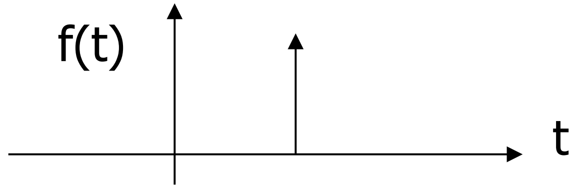
  $f(t)=1,\ t>0$

  $F(s)=1/s$

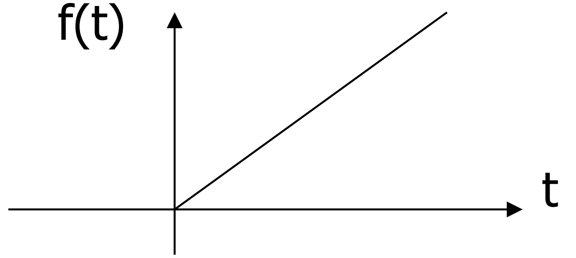


Controle FEI 2008 Funções de Transferência

- Impulso
  $\delta(t)=\lim_{t\to\infty} f(t)$ F(s)=1

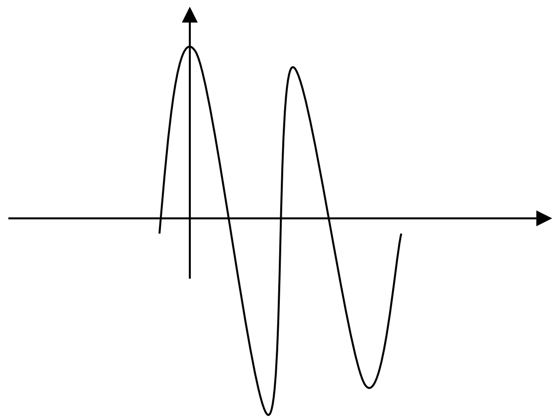


- Rampa
  f(t)=0, t<0; f(t)=t, t>0
  $F(s)=1/s^2$



- Seno
  f(t)=sen(wt)

$$F(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$



Controle FEI 2008 Funções de Transferência

- <u>Solução de Equações de Movimento via Ts Laplace</u>

Uso de uma técnica chamada Expansão em Frações Parciais: uma função racional pode ser expandida em outras até que se possa identificar a função original no tempo através das tabelas Exemplos:

- 1) Achar x(t) tal que:

$$\ddot{y} + y = 3sen2t$$

$$y(0) = 1; \dot{y}(0) = -2$$

- Solução: $\mathcal{L}(\ddot{y}) = s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)$
- $\mathcal{L}(sen\ 2t) = 2/(s^2+4)$

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

A equação em variáveis complexas fica:

$$s^2Y(s)-s+2+Y(s)=\frac{6}{s^2+4}$$

$$(s^2+1)Y(s)=\frac{6+s^3-2s^2+4s-8}{s^2+4}$$

$$Y(s)=\frac{(s^3+4s)-(2s^2+2)}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$Y(s)=\frac{s}{s^2+1}-\frac{2}{s^2+4}$$

A solução é, então:

$$y(t)=\cos t-sen2t$$

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

2) Resolver o sistema de EDO's:

$$\dot{x} - 6x + 3y = 8e^t$$

$$\dot{y} - 2x - y = 4e^t$$

com x(0)=-1, y(0)=0

Aplicando Laplace às 2 equações:

$$(s-6)X + 3Y = \frac{-s+9}{s-1}$$

$$-2X + (s-1)Y = \frac{4}{s-1}$$

Resolvendo para X e Y:

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

$$X = \frac{-s+7}{(s-1)(s-4)} = \frac{-2}{s-1} + \frac{1}{s-4}$$

$$Y = \frac{2}{(s-1)(s-4)} = \frac{-2/3}{s-1} + \frac{2/3}{s-4}$$

Aplicando a transformada inversa:

$$x(t) = -2e^{t} + e^{4t}$$

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{t} + \frac{2}{3}e^{4t}$$

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

A geração das Funções de Transferência de um sistema a partir das matrizes (A, B, C) que o caracterizam leva à forma:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1} B$$

É importante observar que:

- O número de FT's corresponde ao número de entradas vezes o número de saídas (qxm);
- O fato de se ter a inversa de (sI-A) no cálculo das FT's leva a que todas tenham o mesmo denominador;
- Mais que isso, como o cálculo da inversa requer que:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\left| Transpostados Cofatores \right|}{\det(sI - A)}$$

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

Então, o polinômio do denominador, chamado Polinômio Característico do sistema, terá, sempre, grau n, número de variáveis de estado. Por outro lado, a transposta de cada cofator, no numerador, é obtida pela eliminação da linha e da coluna correspondentes a cada elemento. Com isso, o polinômio do numerador de cada FT terá, no máximo, grau n-1.

- Em consequência, nos casos de interesse da Engenharia, as FT's serão sempre funções racionais, quando o grau do numerador é menor que o do denominador:

$$FT_{ij}(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots. + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots. + a_{n-1} s + a_n}$$

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

Como uma FT é uma fração com 2 polinômios distintos que indica como a entrada U_j (s) se transforma na saída Y_i(s), verifica-se:

- Os pontos onde o numerador se anula representam condições em que, qualquer que seja a entrada U, nada se transmite à saída Y. As raízes do numerador são chamadas ZEROS do sistema;
- Os pontos onde o denominador se anula representam condições em que o sistema encontra uma ressonância (amortecida ou não amortecida). As raízes do denominador são chamadas PÓLOS do sistema e contêm todas as informações sobre o comportamento dinâmico do mesmo, estabilidade, etc.
- Como os coeficientes dos polinômios são todos reais, as raízes só podem ser reais ou pares de complexos conjugados.

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

POLOS E ESTABILIDADE

Já vimos que toda função racional pode ser expandida em Frações Parciais. De uma FT que tem forma:

$$FT_{ij}(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + ... + b_{m-1}s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + ... + a_{n-1}s + a_n}$$

Pode-se expandir em:

$$FT = \sum_{i=1}^{l} \frac{d_i}{s + p_i} + \sum_{j=1}^{m} \frac{e_j s + f_j}{s^2 + 2\xi_j \omega_j s + \omega_j^2}$$

Onde p_i são os pólos reais e ζ_j e ω_j caracterizam um par de complexos conjugados. Então, l+2m=n.

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

Isso leva a que qualquer resposta de um sistema linear a uma entrada conhecida possa ser representada por:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{l} D_i e^{-p_i t} + \sum_{j=1}^{m} E_j e^{-\xi_j \omega_j t} \cos(\omega_{aj} t - \phi_j)$$

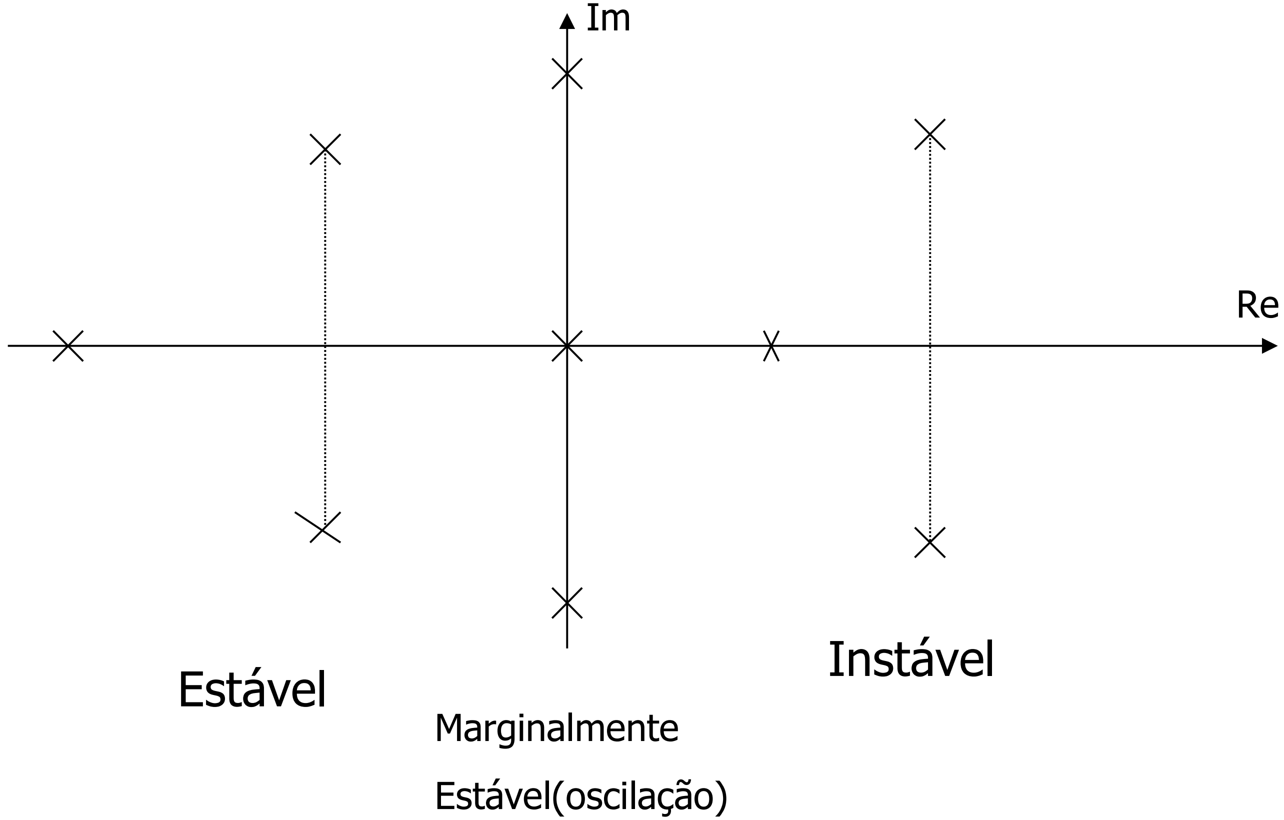
onde D_i e E_j são amplitudes, ζ_j e ω_j são amortecimentos e freqüências naturais.

A forma exponencial que aparece na resposta do sistema, leva a que:

- Se houver um único polo com parte real positiva, a resposta correspondente a esse polo cresce indefinidamente com o tempo, mesmo que todas as outras partes vão para zero;
- Se houver resposta crescente com o tempo, o sistema é dito INSTÁVEL. Se a resposta do sistema permanece limitada entre valores reais ou vai para zero com o passar do tempo, o sistema é dito ESTÁVEL.

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

Se imaginarmos, agora, fazer um mapa dos polos no plano complexo:



Controle FEI 2008 Funções de Transferência

À luz desse diagrama, voltamos, novamente, aos objetivos básicos.

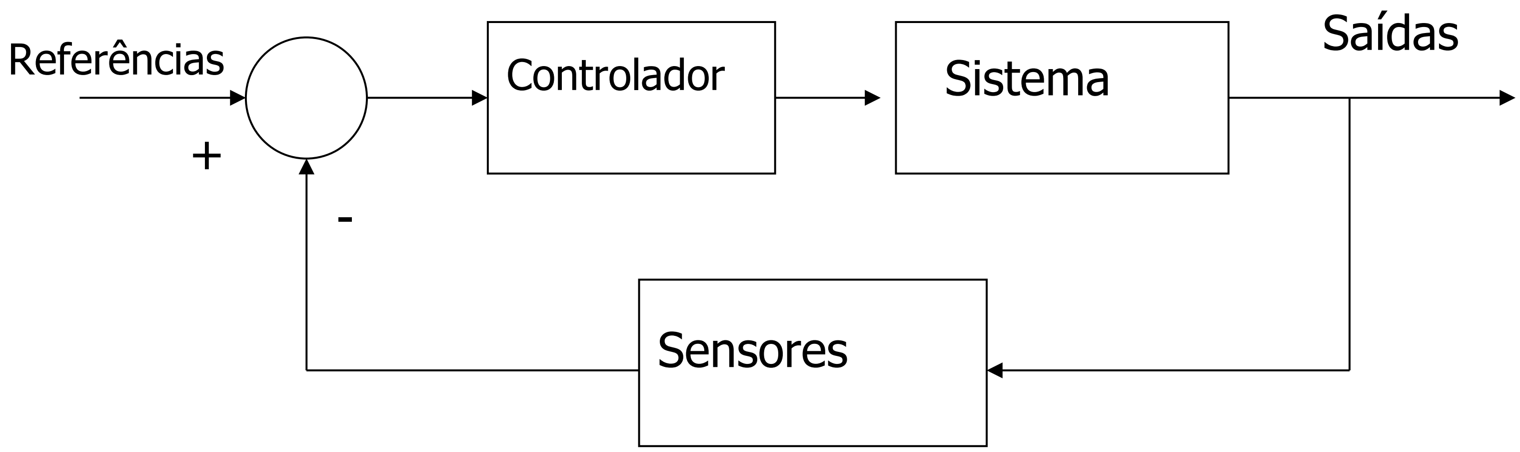
1. O sistema de controle implementado (em malha fechada) deve ter todos os seus pólos no semi-plano esquerdo do plano imaginário, mesmo que o sistema original em malha aberta tenha pólos no semi-plano direito;
2. Os pólos em Malha Fechada podem, quase sempre, ser colocados em posições que garantam uma resposta dinâmica especificada ao sistema;
3. Os zeros da FT contribuem para as amplitudes e para as fases da resposta, mas não têm nenhuma influência na estabilidade do sistema.

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

- # Controladores PID/Ações Básicas
- Conceitualmente, um controlador é um dispositivo físico dotado de capacidade de interpretação capaz de comparar valores de saída de um sistema com as referências de entrada (set-point, valores desejados, variáveis ou não), determinar os erros e, a partir desses erros, determinar os sinais de controle para reduzir os erros a zero ou a valores convenientemente pequenos, dentro dos desvios aceitáveis (zona morta).
- A maneira com que um controlador desenvolve essas ações é denominada ESTRATÉGIA. A essência do projeto de controle é a determinação da melhor estratégia que satisfaça os requisitos do sistema.

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

- Vamos partir de uma malha padrão:



- Apenas para facilitar o entendimento, partimos de sistemas SISO (uma entrada-uma saída), para os quais as estratégias mais comuns são:

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

- Controladores liga-desliga (on-off)
- Controladores Proporcionais (P)
- Controladores Integrais (I)
- Controladores Derivativos (D)
- Controladores Proporcionais-Integrais-Derivativos (PID)

Apresentamos a seguir as principais características de cada um:

- Controladores liga-desliga (on-off)

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

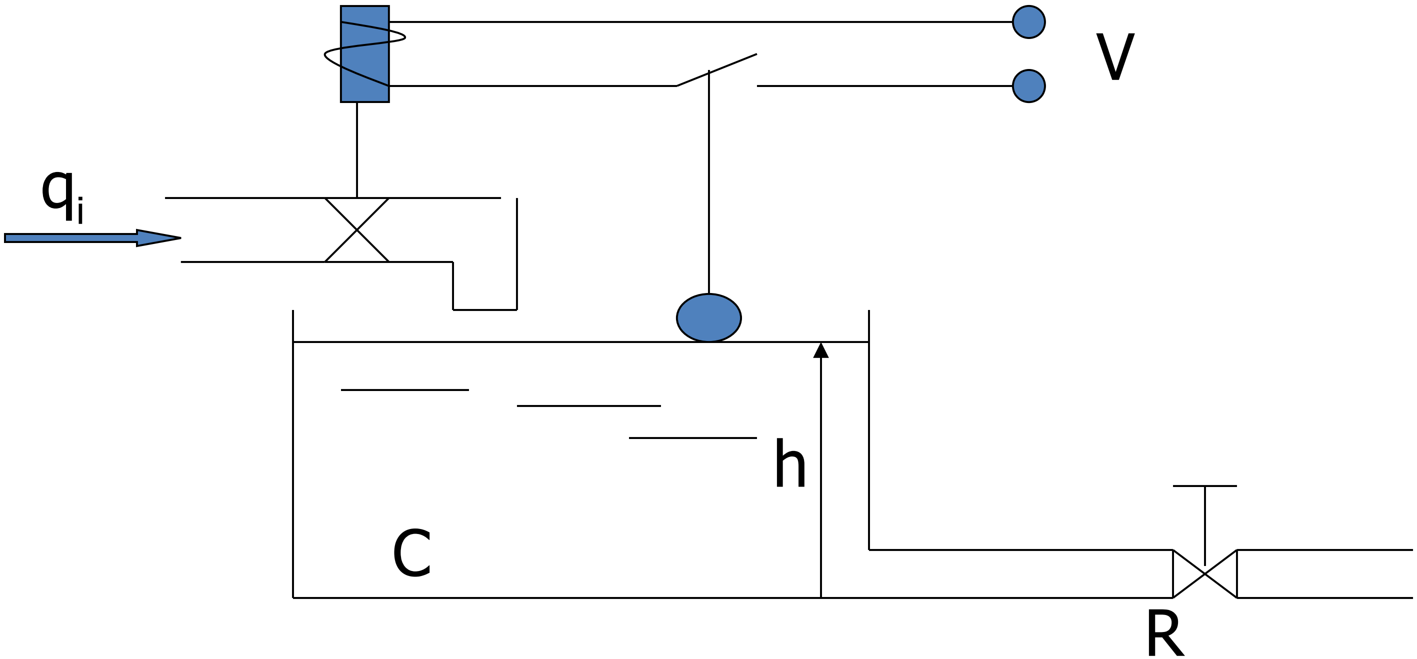
- **Controladores liga-desliga (on-off)**

Designam controladores em que a variável de controle u(t) só pode assumir dois valores, dependentes do erro e(t)

$$u(t) = \begin{cases} U_1; e(t) > 0 \\ U_2; e(t) < 0 \end{cases}$$

Um controlador desse tipo é <u>não-linear</u> e, portanto, não tem Transformada de Laplace. Um exemplo típico é o uso, em processos, de válvulas solenóides:

Controle FEI 2008 Funções de Transferência



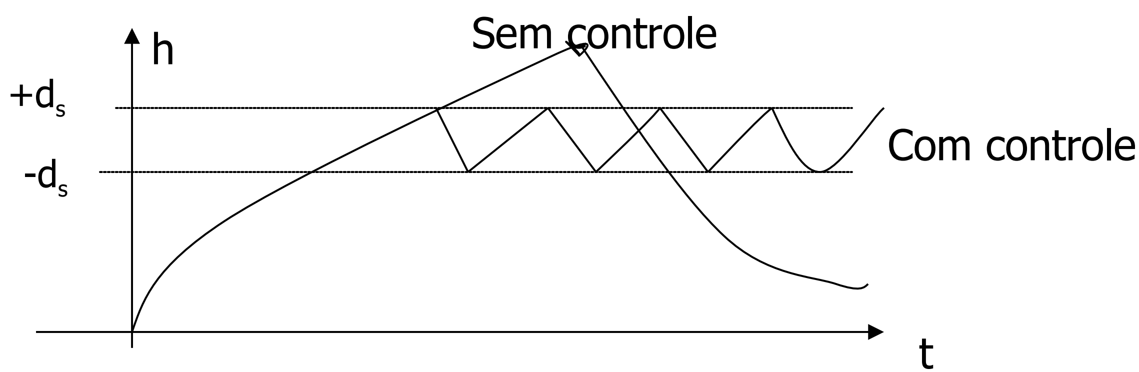
- O controle preciso seguindo a estratégia acima é impraticável: o sistema ficará abrindo e fechando (batendo) o tempo todo.

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

- Usa-se, então, definir uma zona morta para o controlador:

$$u(t) = \begin{bmatrix} U_1; e(t) > d_s \\ U_2; e(t) < d_s \end{bmatrix} ou\ |e(t)| > d_s$$

- Para o sistema de controle de nível, se o objetivo for manter esse nível entre valores máximo e mínimo, com controlador on-off e zona morta, deve-se obter uma resposta como:



Controle FEI 2008 Funções de Transferência

- Note que, quanto maior for a largura da zona morta, menor será o número de chaveamentos, com consequente diminuição do desgaste dos componentes. Por outro lado, perde-se precisão.

- **Controladores Proporcionais (P)**

Um controlador Proporcional gera uma ação proporcional ao erro medido,isto é:

$$u(t) = k_p e(t)$$

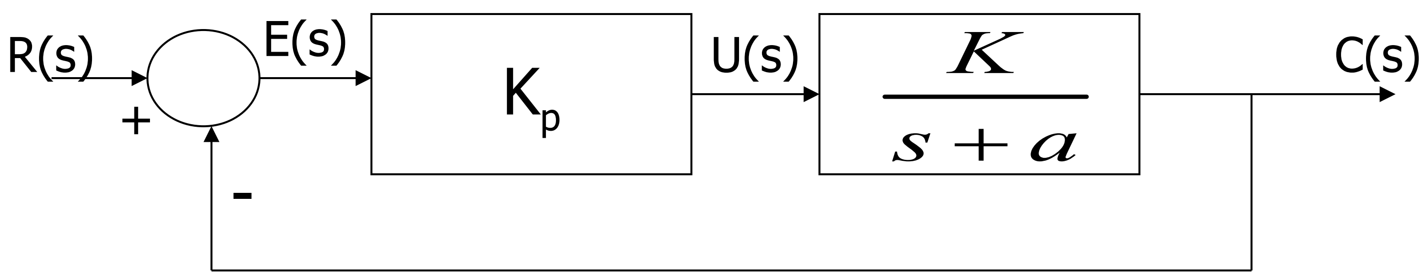
A Função de Transferência, nesse caso, é igual ao Ganho Proporcional k_p:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = k_p$$

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

- Uma característica essencial aos controladores P é o off-set (desvio). Para entendermos melhor, consideramos um controlador P aplicado a um sistema de 1ª ordem, cuja dinâmica é dada pela Função de Transferência:

$$G_s(s) = \frac{K}{s+a}$$



Controle FEI 2008 Funções de Transferência

- K e a, ambos >s 0, são parâmetros do sistema. Então:

$$C(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} R(s) = \frac{K_pK/(s+a)}{1 + K_pK/(s+a)} R(s)$$

$$C(s) = \frac{K_pK}{K_pK + (s+a)} R(s)$$

- Por outro lado, o erro E(s) do sistema é dado por:

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

e se a entrada R(s) for um degrau (R(s)=1/s):

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

$$E(s)=\left(1-\frac{K_pK}{K_pK+(s+a)}\right)\frac{1}{s}$$

- Pelo Teorema do Valor Final:

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)=e(\infty)$$

- Então, o erro em regime permanente fica:

$$e(\infty)=1-\frac{K_pK}{K_pK+a}=\frac{a}{K_pK+a}$$

- Em consequência, $e(\infty)\to 0$ só se $K_p\to\infty$, o que é fisicamente impossível
- <u>Conclusão</u>: um controlador P sempre leva a erros em regime permanente não nulos.

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

- **Controlador Integral (I)**

Como um controlador só P não resolve o problema do erro, pode-se imaginar um controlador cuja saída é a integral do erro:

$$u(t) = K_I \int_0^t e(t)dt$$

onde K_I é dito Ganho Integral.

Nesse caso, a FT do controlador será:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_I}{s}$$

Um controlador I atua sobre a história passada do erro. Em consequência, precisa de uma "história" do erro no tempo para começar a funcionar. O sistema, como um todo, fica lento.

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

- Por outro lado, se aplicarmos um controlador I sobre o mesmo sistema já visto no caso P, veremos que o erro em regime permanente é eliminado. A ação integral, por isso, é também chamada de reinicialização ou “reset”.

- **Controlador Derivativo (D)**

  A idéia de se trabalhar com a derivada (tendência) do erro é introduzir um caráter antecipativo à ação total de controle:

Em termos de FT, a ação derivativa fica:

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt}$$

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_d s$$

Um controlador puramente D nunca é usado isoladamente pois atua apenas nos transitórios. Se aplicado ao mesmo sistema de 1ª ordem do exemplo anterior, demonstra-se que o erro em regime permanente tem exatamente o mesmo tamanho da entrada.

- **Controlador PID**

A junção das 3 ações Proporcional, Integral e Derivativa numa única estratégia leva ao controlador mais difundido no meio industrial. Nesse caso, a ação de controle é calculada por:

a

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(t)dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

ou, alternativamente, já em Funções de Transferência:

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

onde T_I é o tempo de reinicialização e T_D é a taxa de variação.

Um controlador PID é também chamado Controlador de 3 Parâmetros. Se, por um lado, isso confere grande versatilidade em relação à obtenção de desempenho nos sistemas aos quais é incorporado, por outro, o ajuste desses 3 parâmetros resulta tedioso e complicado.

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

- **Critérios de Sintonia de Controladores PID**

A disseminação dos controladores PID vem de uma série de fatores:

- Podem ser construidos com elementos eletrônicos, hidráulicos ou pneumáticos;
- A ação Proporcional, sózinha, provoca desvios (off-sets) em regime permanente; a ação Integral corrige esses desvios mas torna o sistema lento; a ação Derivativa confere maior velocidade ao sistema final;
- Os PID eletrônicos são extremamente baratos e quase todos, hoje em dia, incluem algoritmos de sintonização.

A flexibilidade de dispor de três diferentes ações tem como preço a dificuldade de escolher três diferentes ganhos (K_p, K_I e K_d). Para orientar essa escolha, foram desenvolvidos algo como 350 diferentes critérios de sintonia. O mais conhecido é o de Ziegler-Nichols (1943).

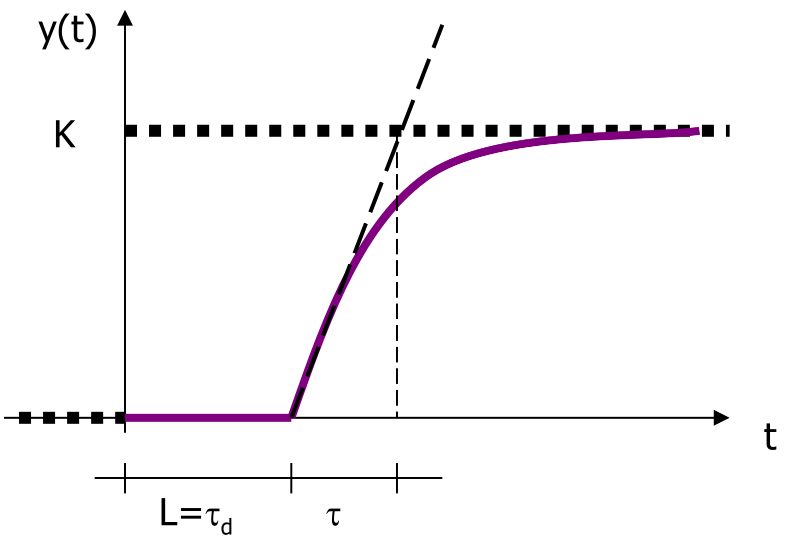
Controle FEI 2008 Funções de Transferência

Ziegler e Nichols eram consultores de industrias de processos numa época em que poucas ferramentas eram disponíveis para modelar ou simular um sistema. Observaram que, para plantas estáveis e não muito complexas, as respostas a um degrau na variável manipulada poderiam ser resumidas em duas curvas, correspondentes a dois únicos comportamentos:

- Resposta de 1ª ordem com atraso ou
- Resposta oscilatória com valor de ganho crítico.

No 1º caso, a resposta ao degrau se chama Curva de Reação do Processo, uma curva em forma de S, cujo aspecto e cuja FT são apresentados na seqüência:

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

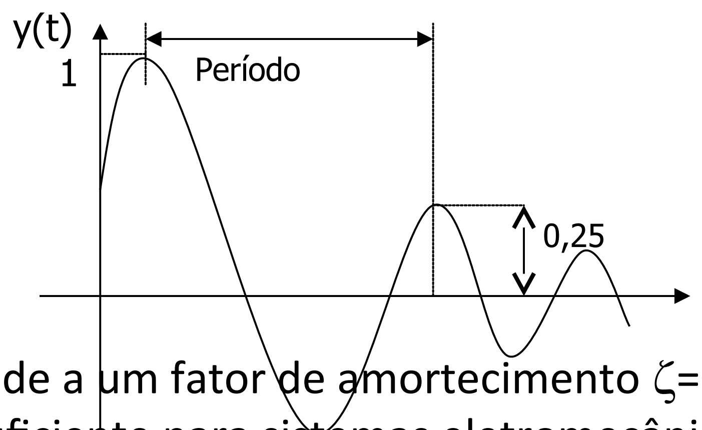


$$R = \frac{K}{\tau} - taxadereação$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-\tau_d s}}{\tau s + 1}$$

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

O critério de ajuste sugerido pela técnica corresponde a impor uma taxa de decaimento (amortecimento) de 25%, como na figura:



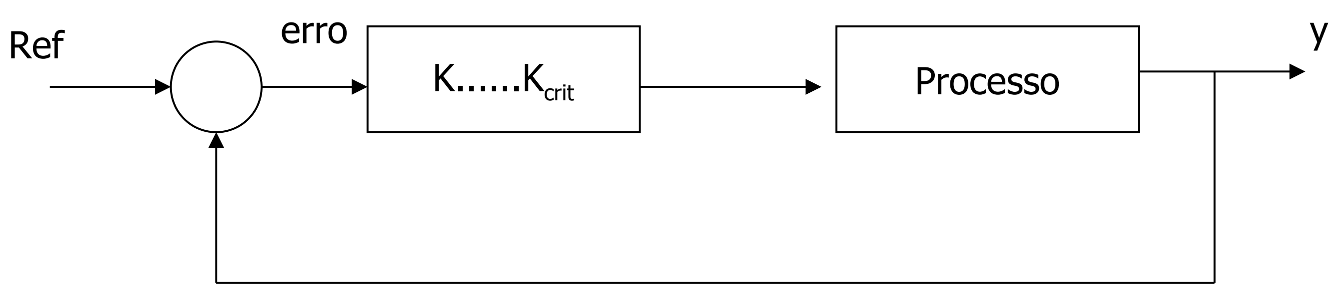
Esse critério corresponde a um fator de amortecimento ζ=0,21, bom para processos, mas, em geral, insuficiente para sistemas eletromecânicos.

A partir da curva de reação, os parâmetros do PID devem ser escolhidos da tabela:

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

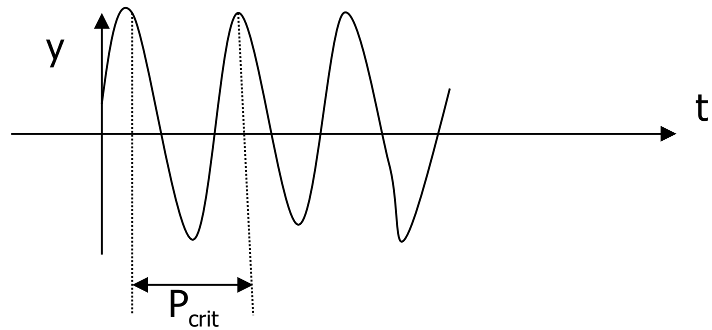
TIPO	GANHOS		
Proporcional	K_p=1/RL	∞	0
Proporcional-Integral	K_p=0,9/RL	T_i=L/0,3	0
PID	K_p=1,2/RL	T_i=2L	T_d=0,5L

Para o 2º caso, o ajuste dos parâmetros do PID é feito pela avaliação do sistema no limite da estabilidade:



Controle FEI 2008 Funções de Transferência

Fecha-se a malha apenas com ganho proporcional K, que é alterado até que o sistema entre em oscilação (estabilidade marginal). O valor do ganho é o valor crítico, K_{crit}. Ao mesmo tempo, registra-se o período de oscilação do sistema.



Com os valores de K_{crit} e P_{crit}, os ganhos do PID podem ser escolhidos da tabela:

Proporcional	K_p=0,5 K_{crit}	∞	0
Proporcional-Integral	K_p=0,45 K_{crit}	T_i=P_{crit}/1,2	0
PID	K_p=0,6 K_{crikt}	T_i=0,5 P_{crit}	T_d=0,125 P_{crit}

Controle FEI 2008 Funções de Transferência

Essas regras de sintonia são um excelente primeiro passo no projeto, quando aplicáveis, e podem ser geradas ainda na fase de simulação, com o uso do modelo. Existem, no entanto, restrições:

- No caso de levantamento experimental (1º critério), perturbações podem afetar os resultados já que o sistema é ensaiado em malha aberta;
- Não funcionam bem em sistemas complexos, gerando sintonia não precisa.

Exemplo: ver Franklin, Powell