Redução de Ordem

- *Eliminação de polos insignificantes*
- *Método da Norma de Hankel (comandos balreal e modred do Matlab)*
- *Método de Graham-Lathrop para preservação de magnitude em banda larga*

Eliminação simples de polos insignificantes

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 51s^2 + 50s} = \frac{1}{s(s+1)(s+50)}$$

$$G_r(s) = \frac{1}{s(s+1)(50)} \Rightarrow \text{manutenção do ganho em CC}\,(s \to 0)$$

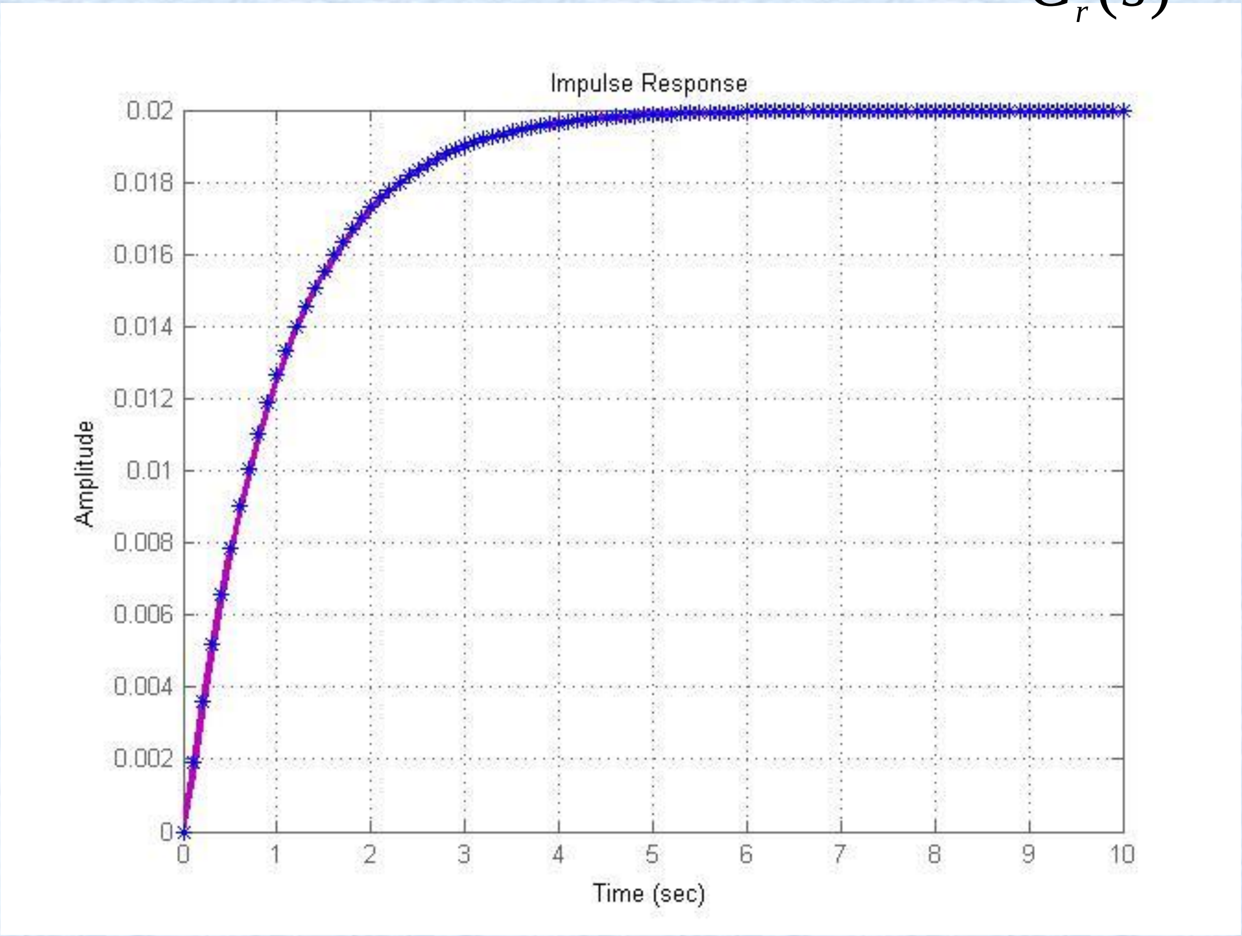
$$G_w(s) = \frac{1}{s(s+1)} \Rightarrow \text{eliminação incorreta do polo em -50}$$

Eliminação simples de polos insignificantes

- G= ———— Gr= ****

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 51s^2 + 50s}$$

$$G_r(s) = \frac{1}{s(s+1)(50)}$$

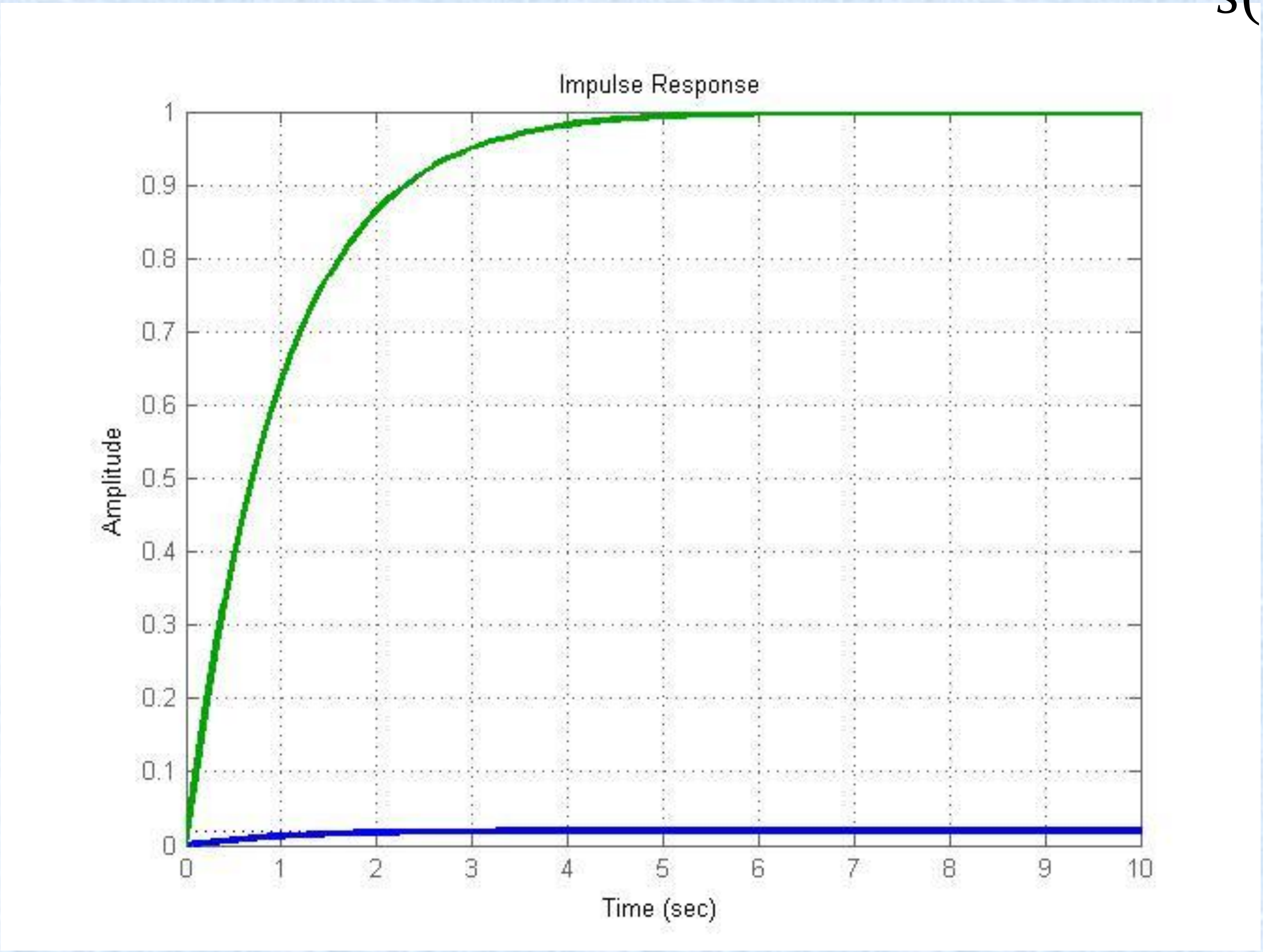


Eliminação simples de polos insignificantes (errado)

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 51s^2 + 50s}$$

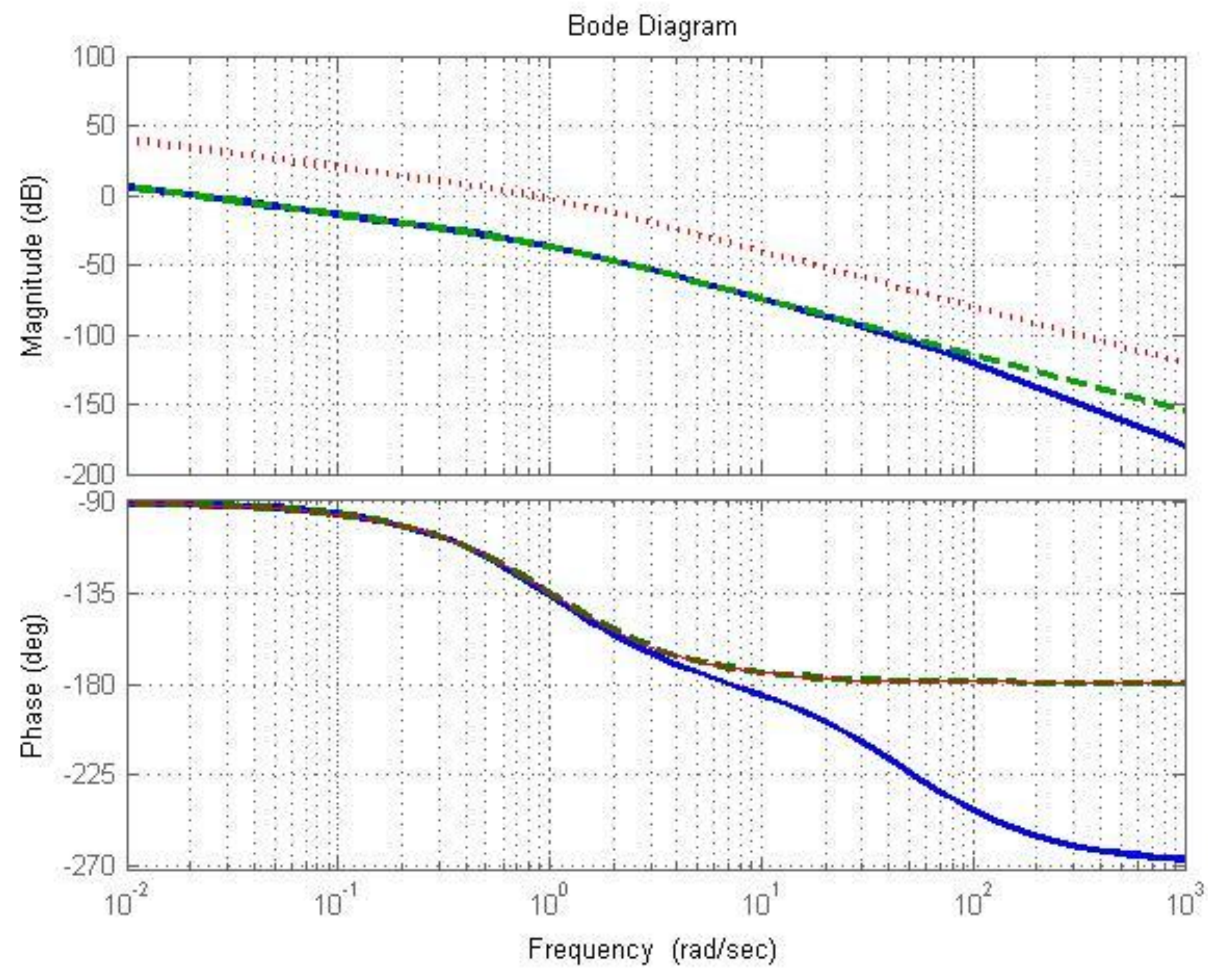
- G= ——— Gw= ———

$$G_w(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$



Eliminação simples de polos insignificantes

- G= Gr= Gw=



Redução pela norma de Hankel

- Seja (A,B,C,D) uma realização balanceada de G(s). O balanceamento é uma transformação linear. (A,B,C,D) é dita balanceada se as matrizes de Controlabilidade ($\mathcal{C}$) e Observabilidade ($\mathcal{O}$) são iguais: $\mathcal{C} = \mathcal{O} = \Sigma$
- Considere o valor singular de Σ dado por:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\Sigma^2)}, i = 1, \cdots\cdots n$$

$$\lambda_i \to \text{i - ésimo autovalor}$$

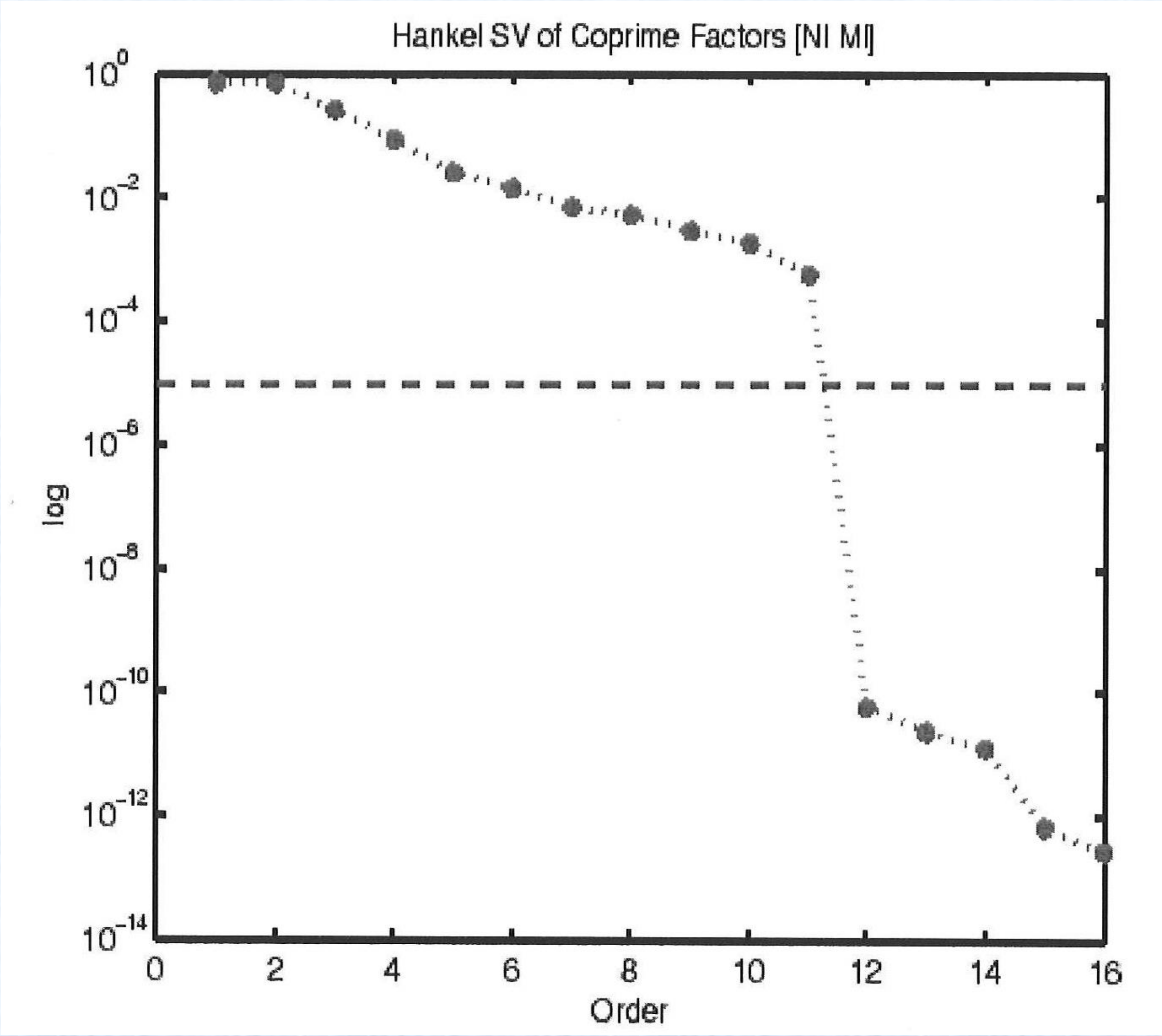
$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots\cdots \geq \sigma_n \geq 0 \to \text{valores singulares de Hankel}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \Rightarrow x_1 \text{ influencia a relação entrada/saída mais do que } x_2$$

$$\sigma_1 = \|\Sigma\|_H \to \text{norma de Hankel de G(s)}$$

- Cada σ_i está associado a um estado x_i e indica a energia do sistema na direção i considerada.

Redução pela norma de Hankel



Redução pela norma de Hankel

O problema da redução de ordem desta abordagem pode ser posto assim:

"Dado um modelo estável G(s) de ordem n, determinar um modelo Gr(s) de ordem k<n tal que a norma de Hankel do erro de aproximação:

$$\left\| G(s) - Gr(s) \right\|_H = \left\| E(s) \right\|_H = \sqrt{\lambda_{\max}(\Sigma_E{}^2)}$$

seja mímima".

A ideia subjacente é encontrar um erro que esteja próximo de ser completamente não-controlável e completamente não-observável.

Redução pela norma de Hankel

- sys = zpk([-10 -20.01],[-5 -9.9 -20.1],1)

```
(s+10) (s+20.01)
----------------------
(s+5) (s+9.9) (s+20.1)
```

- [sysb,g] = balreal(sys)
- g'

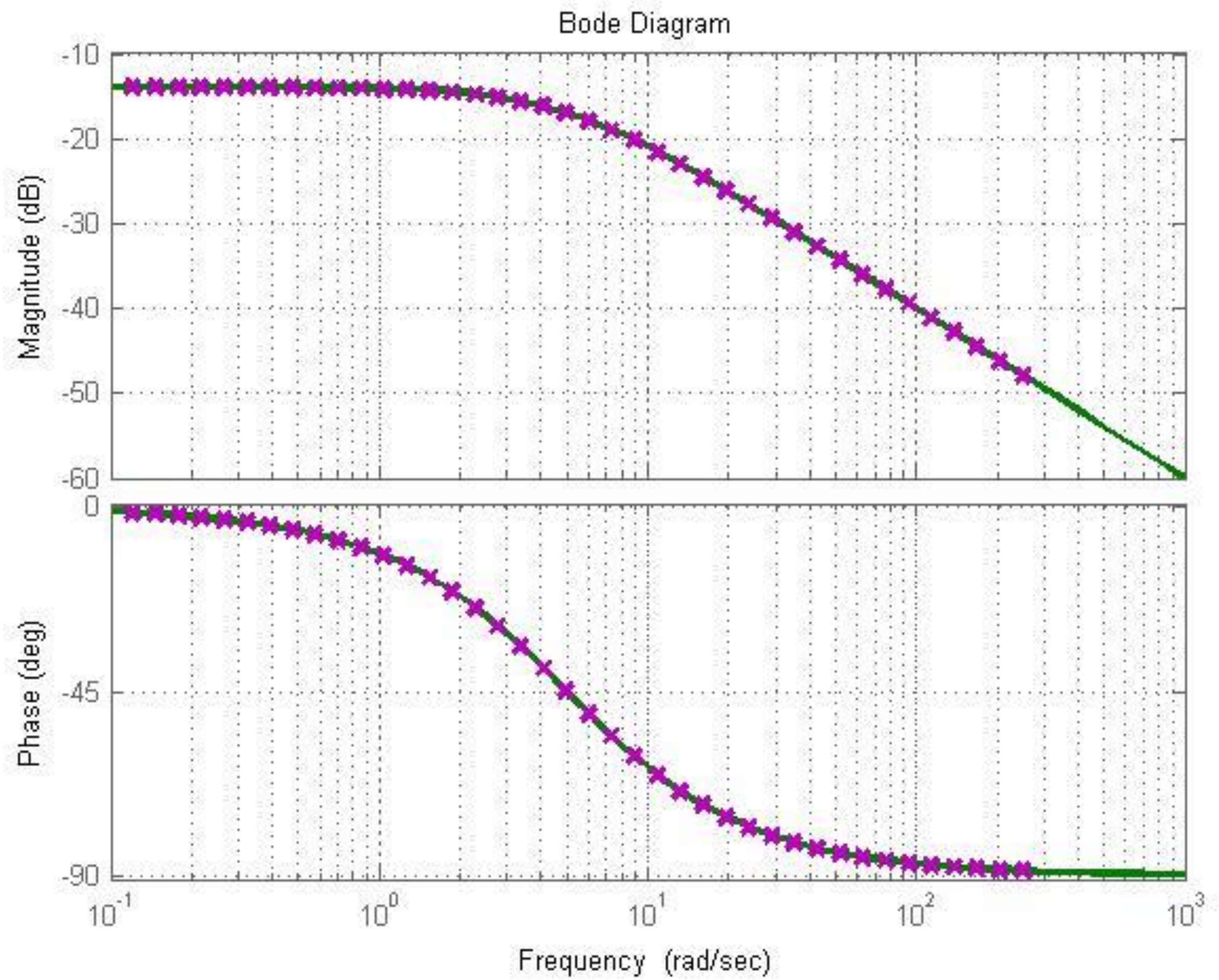
```
ans =
1.0062e-01     6.8039e-05     1.0055e-05
```

- sysr = modred(sysb,[2 3],'del')
- zpk(sysr)

```
1.0001
--------
(s+4.97)
```

- bode(sys,'-',sysr,'x')

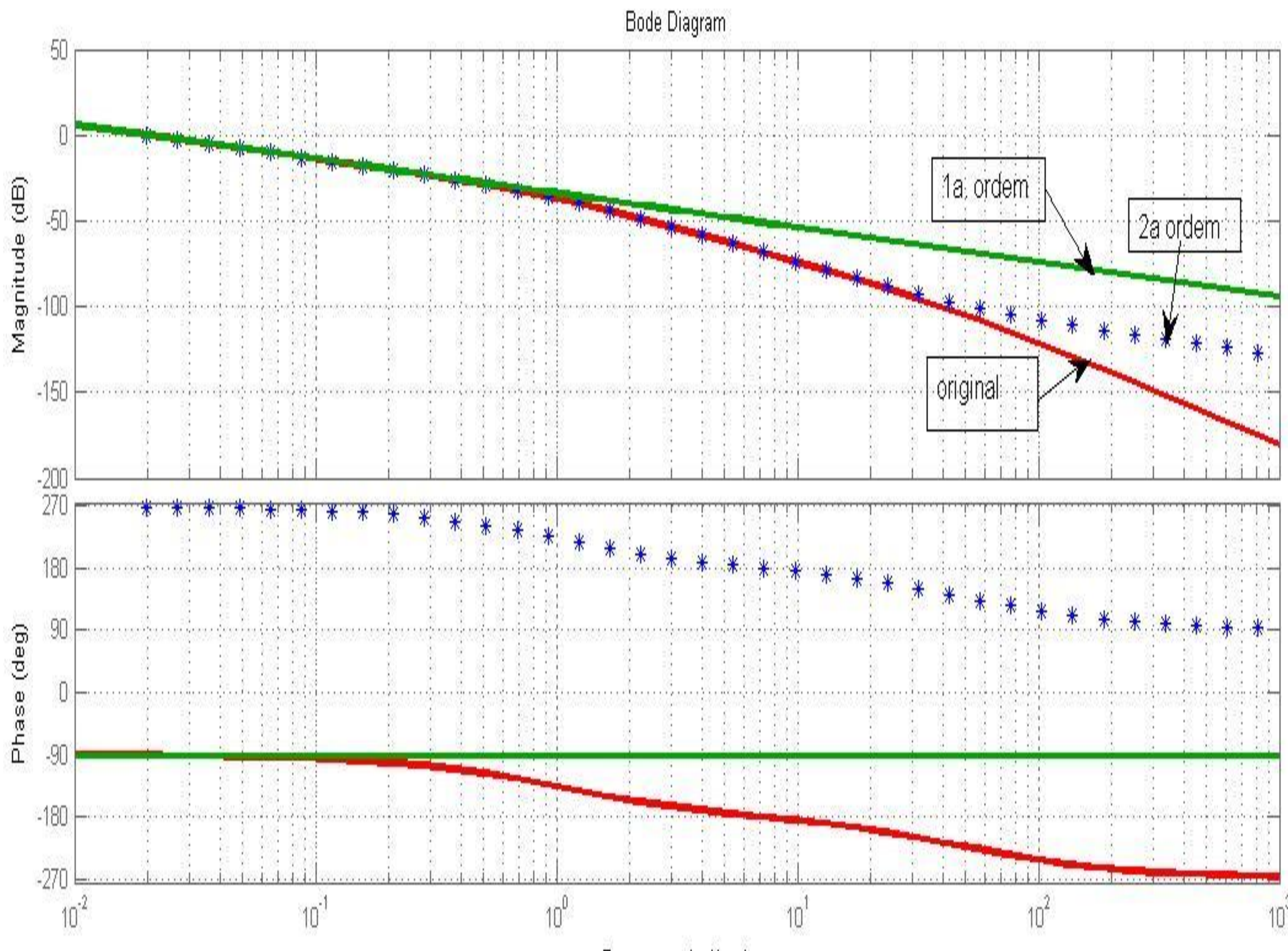
Redução pela norma de Hankel



Aplicação da Redução pela norma de Hankel ao primeiro exemplo

(slide 5)

g'*100 = Inf 1.0204 0.0004



Método de Graham/Lathrop

$$H(s) = K\frac{\sum_{k=0}^{m} a_k s^k}{\sum_{l=0}^{n} b_l s^l} \qquad \text{com: } \; a_o = 1 \quad \mathrm{b_o} = 1$$

$$L(s) = K\frac{\sum_{i=0}^{p} c_i s^i}{\sum_{j=0}^{r} d_l s^l} \qquad \text{com: } \; c_o = 1 \quad \mathrm{d_o} = 1$$

$$\mathrm{p} \leq \mathrm{r} < \mathrm{n}$$

K igual em $H(s)$ e $L(s)$ para preservar a resposta em CC ($s \to 0$)

$$\text{Objetivo do método: } \left|\frac{\mathrm{H(j}\omega)}{\mathrm{L(j}\omega)}\right| = \left|\frac{N(\mathrm{j}\omega)}{\mathrm{D(j}\omega)}\right| \cong 1{,}0 \text{ para uma banda larga.}$$

Método de Graham/Lathrop

Método: usar derivadas sucessivas de N(s) e D(s) para a determinação de $\boldsymbol{c_i}$ e $\boldsymbol{d_j}$:

$$N_{2l} = \sum_{k=0}^{2l} \frac{(-1)^{l+k} N^{(k)}(0) N^{(2l-k)}(0)}{k!\,(2l-k)!}$$

$$D_{2l} = \sum_{k=0}^{2l} \frac{(-1)^{l+k} D^{(k)}(0) D^{(2l-k)}(0)}{k!\,(2l-k)!}$$

l até atingir o número de equações necessárias.

para o cálculo dos coeficientes.

Método de Graham/Lathrop

EXEMPLO:

$$H(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{\frac{1}{6}s^3 + s^2 + \frac{11}{6}s + 1}$$

$$Seja : L(s) = \frac{1}{d_2 s^2 + d_1 s + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{H(s)}{L(s)} = \frac{d_2 s^2 + d_1 s + 1}{\frac{1}{6}s^3 + s^2 + \frac{11}{6}s + 1} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Método de Graham/Lathrop

$l = 0 \rightarrow \quad No = Do = 1$

$$l = 1 \quad \Rightarrow N_2 = \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^{1+k} N^{(k)}(0) N^{(2-k)}(0)}{k!(2-k)!}$$

$$D_2 = \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^{1+k} D^{(k)}(0) D^{(2-k)}(0)}{k!(2-k)!}$$

$$N_2 = \underbrace{\frac{(-1)^1 N^{(0)}(0) N^{(2)}(0)}{0!(2)!}}_{k=0} + \underbrace{\frac{(-1)^{1+1} N^{(1)}(0) N^{(2-1)}(0)}{1!(1)!}}_{k=1} + \underbrace{\frac{(-1)^{1+2} N^{(2)}(0) N^{(0)}(0)}{2!(0)!}}_{k=2}$$

$$D_2 = \underbrace{\frac{(-1)^1 D^{(0)}(0) D^{(2)}(0)}{0!(2)!}}_{k=0} + \underbrace{\frac{(-1)^{1+1} D^{(1)}(0) D^{(2-1)}(0)}{1!(1)!}}_{k=1} + \underbrace{\frac{(-1)^{1+2} D^{(2)}(0) D^{(0)}(0)}{2!(0)!}}_{k=2}$$

Método de Graham/Lathrop

$$N_2 = \underbrace{\frac{(-1)(1)(2d_2)}{2}}_{k=0} + \underbrace{\frac{(d_1)(d_1)}{1}}_{k=1} + \underbrace{\frac{(-1)(2d_2)1}{2}}_{k=2}$$

$$D_2 = \underbrace{\frac{(-1)(2)}{2}}_{k=0} + \underbrace{\left(\frac{11}{16}\right)^2}_{k=1} + \underbrace{\frac{(-1)(2)(1)}{2}}_{k=2} = \frac{49}{36}$$

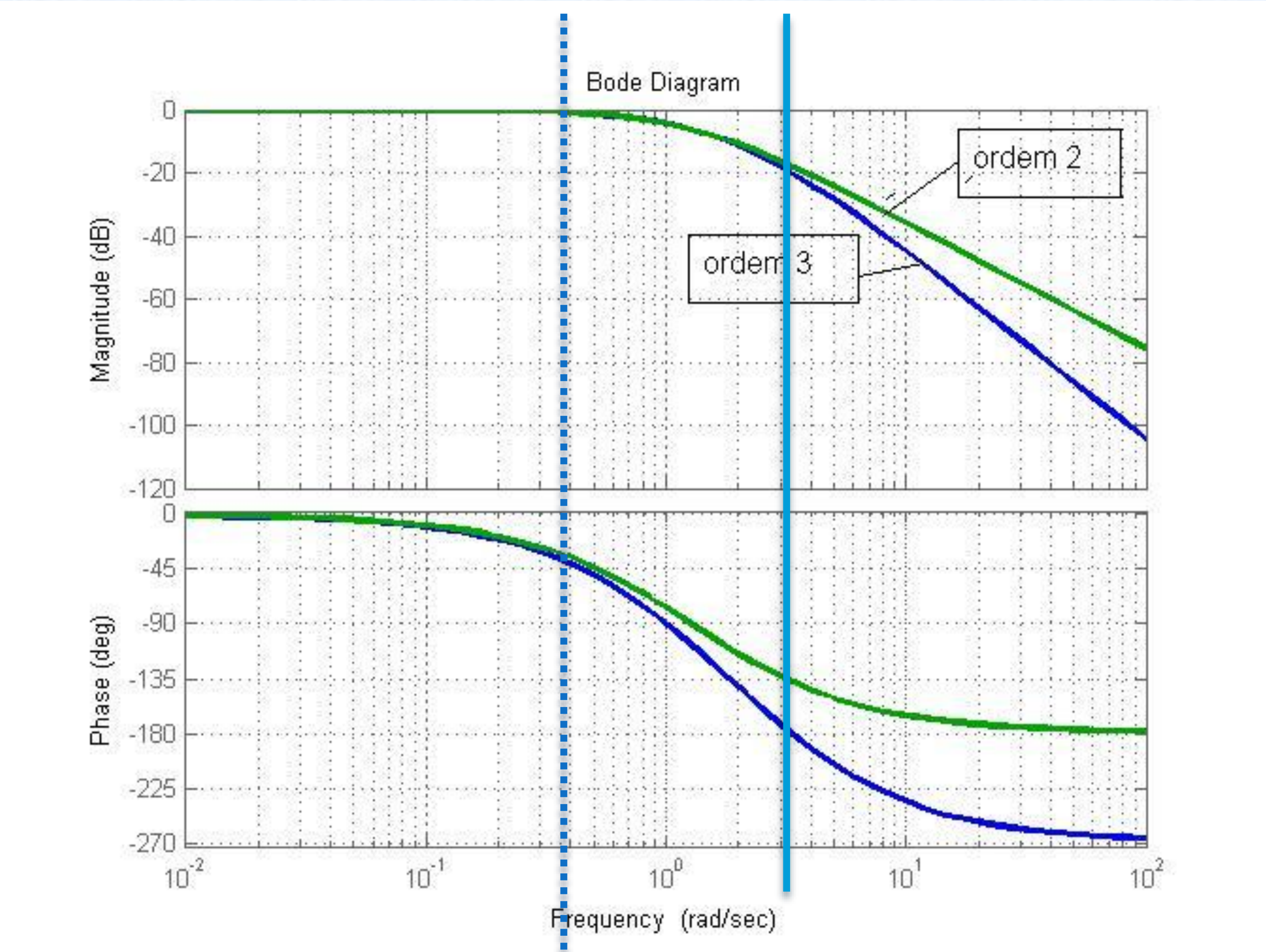
$$l = 2 \quad \Rightarrow N_4 = \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^{2+k} N^{(k)}(0) N^{(4-k)}(0)}{k!(4-k)!}$$

$$D_4 = \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^{2+k} D^{(k)}(0) D^{(4-k)}(0)}{k!(4-k)!}$$

$$N_4 = D_4 \Rightarrow d_2^2 = \frac{7}{18} \Rightarrow d_2 = \pm 0{,}625 \Rightarrow d_2 = +0{,}625$$

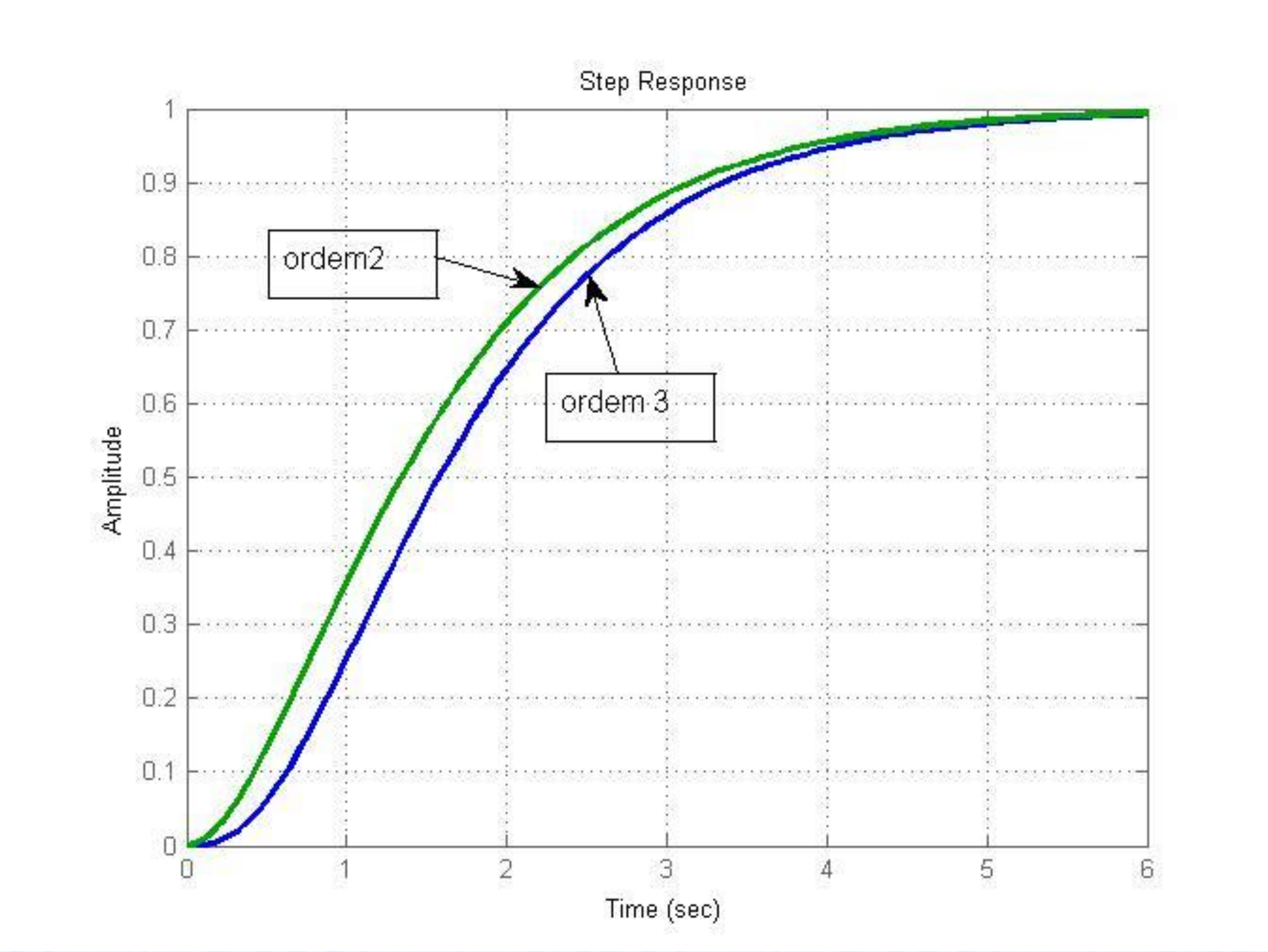
Método de Graham/Lathrop

$$H(s)=\frac{6}{s^3+6s^2+11s+6} \qquad L(s)=\frac{1}{0{,}625s^2+1{,}615s+1}=\frac{1{,}6}{s^2+2{,}584s+1{,}6}$$



Método de Graham/Lathrop

$$H(s) = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \qquad L(s) = \frac{1{,}6}{s^2 + 2{,}584s + 1{,}6}$$



Norma de Hankel