Controlabilidade e Observabilidade

- *HISTÓRICO*
- *CONCEITOS*
- *CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE EM SISTEMAS*
- *CAUSAS DA NÃO CONTROLABILIDADE E NÃO OBSERVABILIDADE EM SISTEMAS*

Controlabilidade e Observabilidade

- Novos conceitos do Espaço de Estados (EE)
- Histórico: Rudolph Kalman em 1950, quando estudava o cancelamento de polos instáveis, observou que:
    a) Mesmo com o cancelamento perfeito dos polos instáveis alguns sistemas permaneciam instáveis, isto é, sistema instável com FT estável e FTs de ordem menor do que sistema;
    b) Modos instáveis
        i. Não eram afetados pela entrada de controle (incontroláveis)
        ii. Não eram visíveis na saída (não podiam ser medidos, isto é, não eram observáveis)

Controlabilidade e Observabilidade

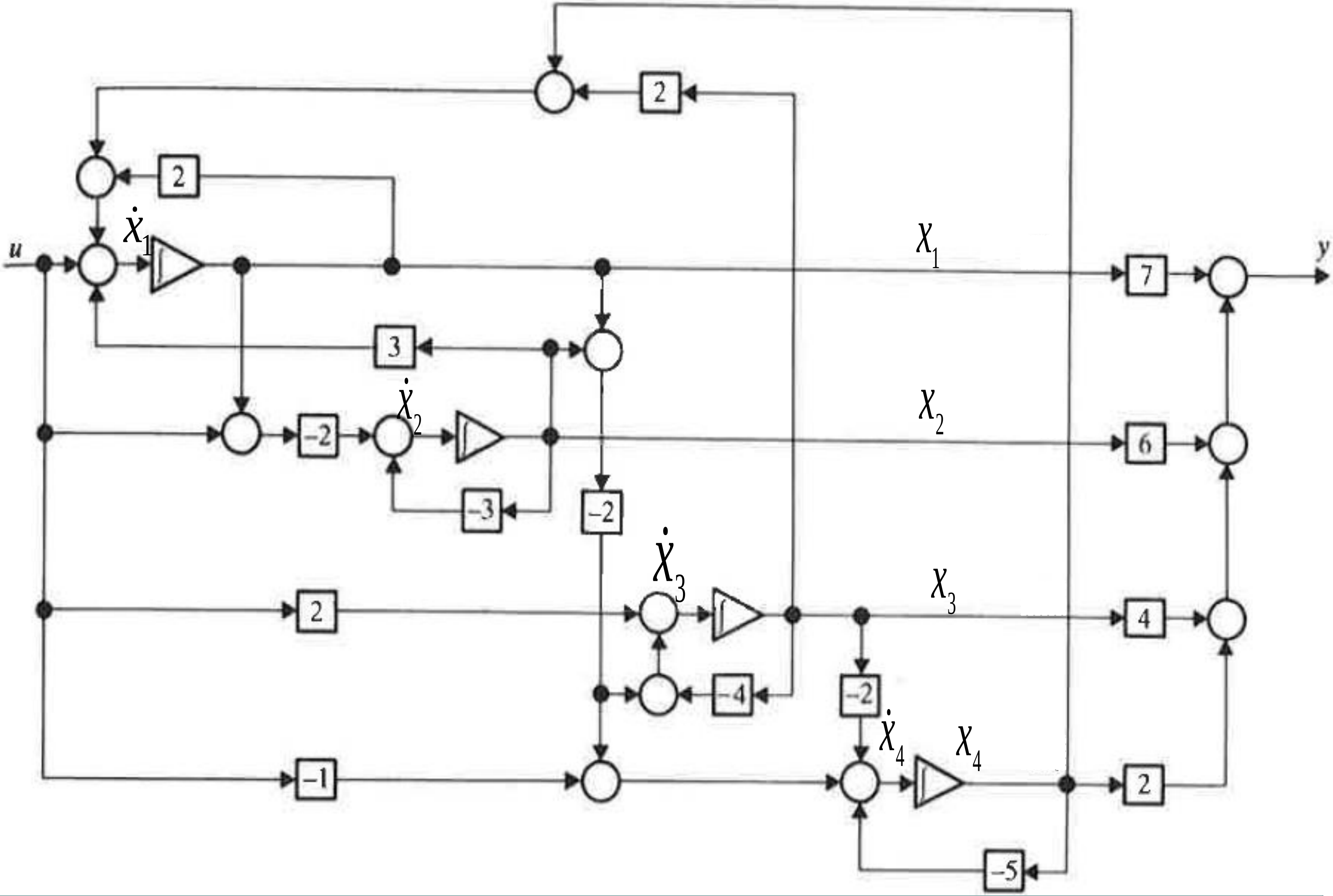
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 - 2u \\ \dot{x}_3 = -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2u \\ \dot{x}_4 = -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 - u \end{cases}$$

Eq. de Observação:

$$y = 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad C = [7 \quad 6 \quad 4 \quad 2]$$

Controlabilidade e Observabilidade



Controlabilidade e Observabilidade

Matriz resolvente:

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1} = (Adj(sI-A)/\Delta(s)$$

$$\frac{1}{\Delta(s)}\begin{bmatrix} s^3+12s^2+47s+60 & 3s^2+21s+36 & 2s^2+14s+24 & s^2+7s+12 \\ -2s^2-18s-40 & s^3+7s^2+8s-16 & -4s-16 & -2s-8 \\ -2s^2-12s-10 & -2s^2-12s-10 & s^3+6s^2+7s+2 & -2s-2 \\ -2s^2-6s-4 & -2s^2-6s-4 & -2s^2-6s-4 & s^3+5s^2+8s+4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(s) = |sI - A| = s^4 + 21s^3 + 35s^2 + 50s + 24$$

Controlabilidade e Observabilidade

- A FT da entrada *u* para a saída *y* é:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}{s^4 + 21s^3 + 35s^2 + 50s + 24}$$

fatorando o numerador e o denominador :

$$\therefore G(s) = \frac{\cancel{(s+2)}\cancel{(s+3)}\cancel{(s+4)}}{(s+1)\cancel{(s+2)}\cancel{(s+3)}\cancel{(s+4)}} = \frac{1}{(s+1)}$$

Afinal, o sistema é de 1ª ou 4ª Ordem??!!

Controlabilidade e Observabilidade

- Seja: $x = Tz$

  T é uma matriz que diagonaliza o sistema.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

T é a matriz modal (matriz de autovetores, u_i, i=1,4): $Au_i = \lambda_i u_i$

Controlabilidade e Observabilidade

$$T^{-1}AT = \Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad T^{-1}B = \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$CT = \theta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{z}_1 = -z_1 + u \quad (1) \\ &\dot{z}_2 = -2z_2 \quad (2) \\ &\dot{z}_3 = -3z_3 + u \quad (3) \\ &\dot{z}_4 = -4z_4 \quad (4) \\ &\text{Observação:} \\ &y = z_1 + z_2 \quad (5) \end{aligned}\right\}$$

Aplicando a Tranf. de Laplace em (1), (2) e (5) e levando o resultado de (1) e (2) em (5):

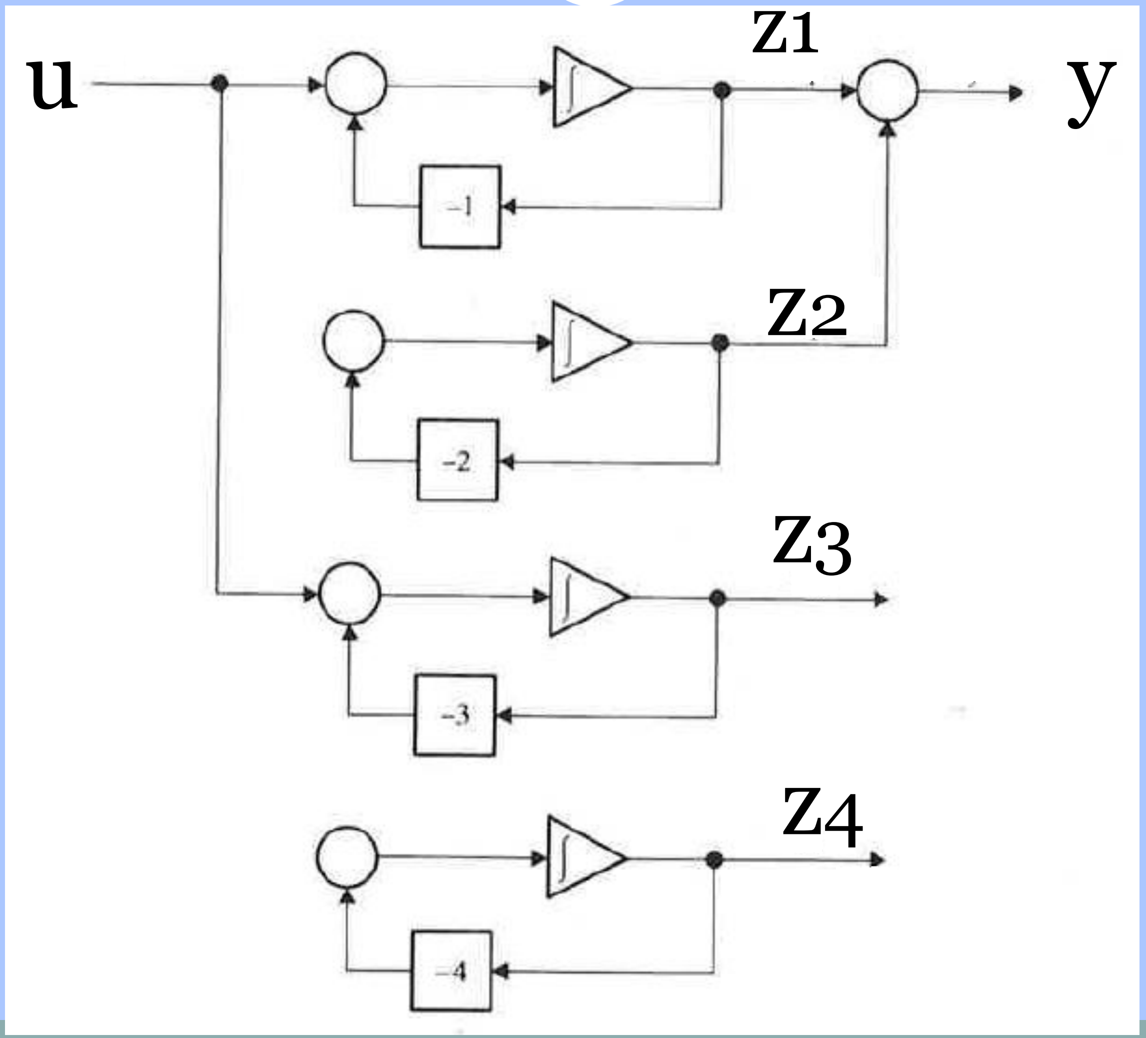
$$(1) \rightarrow (s+1)Z_1 = U$$

$$(2) \rightarrow (s+2)Z_2 = 0$$

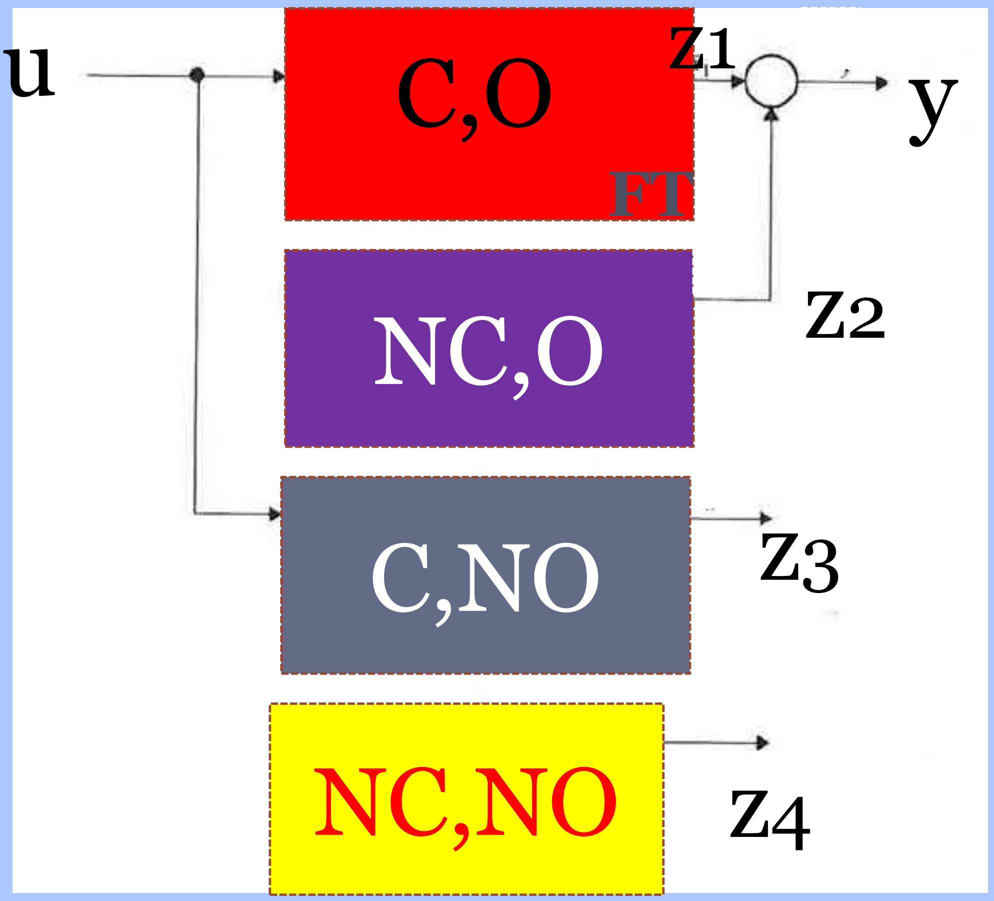
$$(5) \rightarrow Y = \frac{U}{(s+1)} \Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{1}{(s+1)}$$

A parte controlável/observável (a FT) é de 1ª Ordem!!!

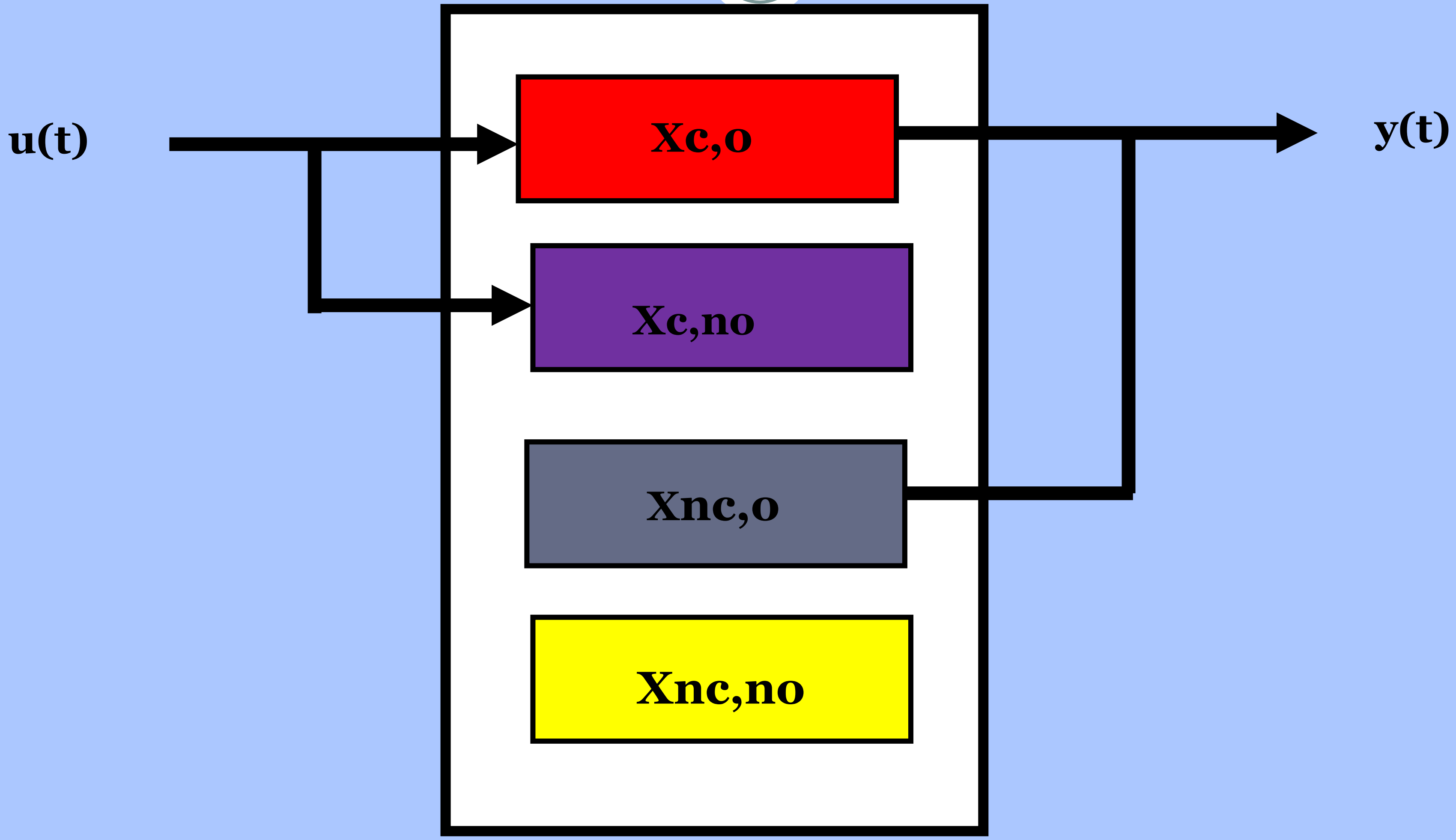
Controlabilidade e Observabilidade



Controlabilidade e Observabilidade



Controlabilidade e Observabilidade

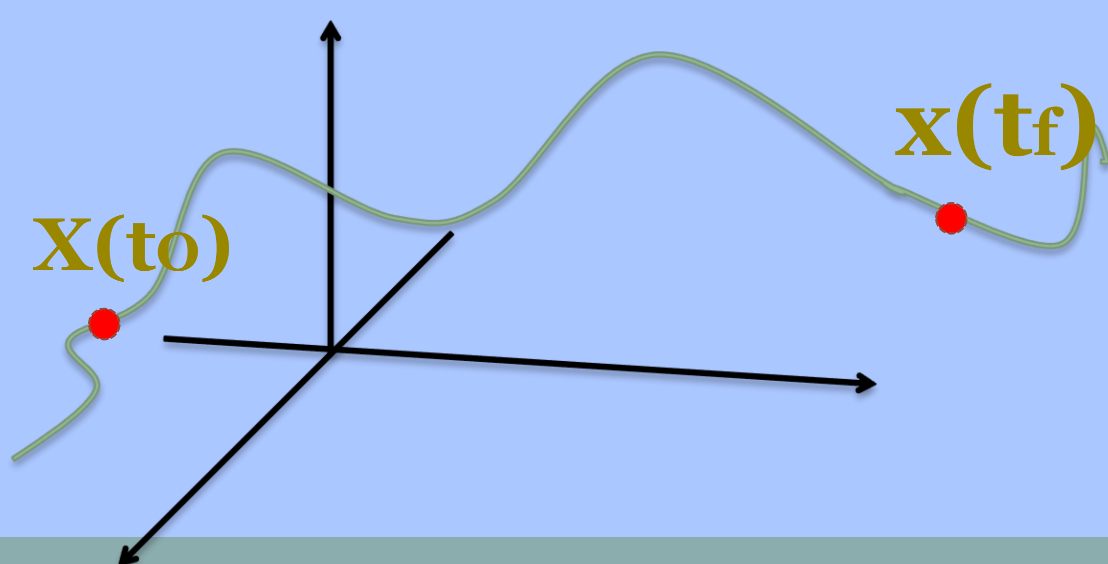


Controlabilidade e Observabilidade

- A Função de Transferência de um sistema é determinada apenas pela parte controlável e observável (**Xc,o**).
- Controle deve ser feito apenas com **Xc,o.**
- **Xc,no** ➔controle afeta variáveis não medidas. Se o sistema é instável, qualquer entrada pode instabilizar o sistema. Sistema estável➔ estabilizável.
- **Xnc,o** ➔medidas são afetadas por variáveis indesejadas. Realimentação incorreta. Sistema instável➔instabilidade. Sistema estável➔ detectável (pode haver perda de desempenho).

Controlabilidade

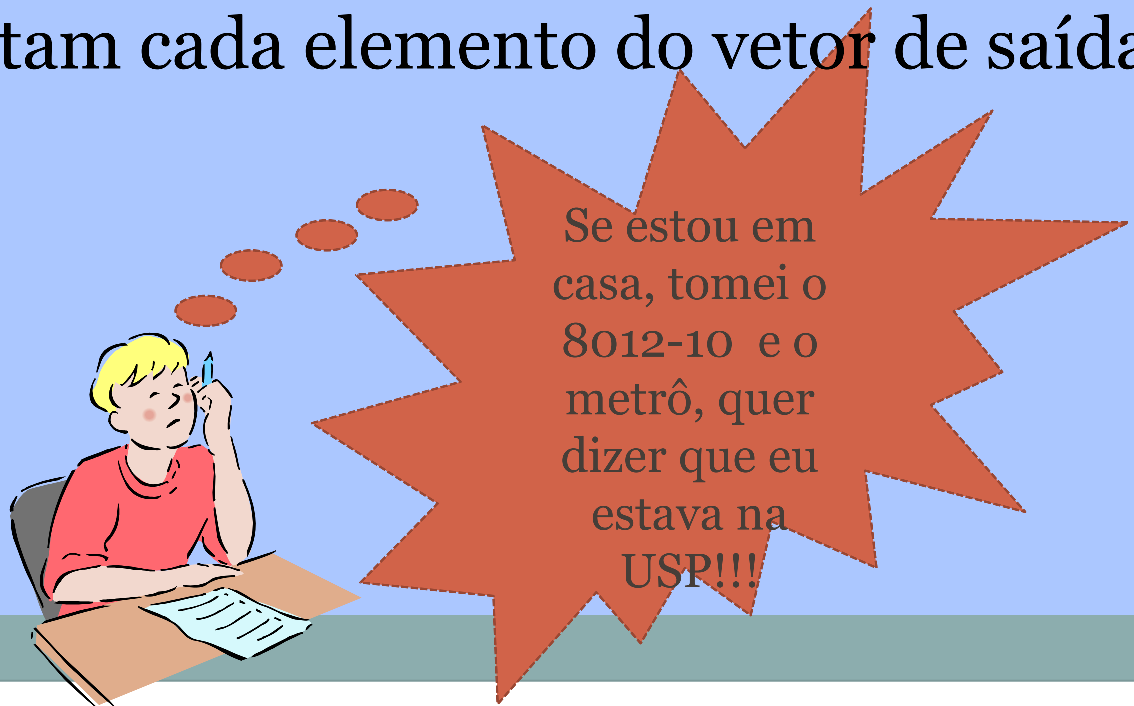
Um sistema é dito *controlável*, se existir um vetor de entradas ***u****(t)* sem restrições, que possa transferir ***qualquer*** estado inicial **x**(*to*), para ***qualquer*** estado final **x**(*tf*), num intervalo finito de tempo.



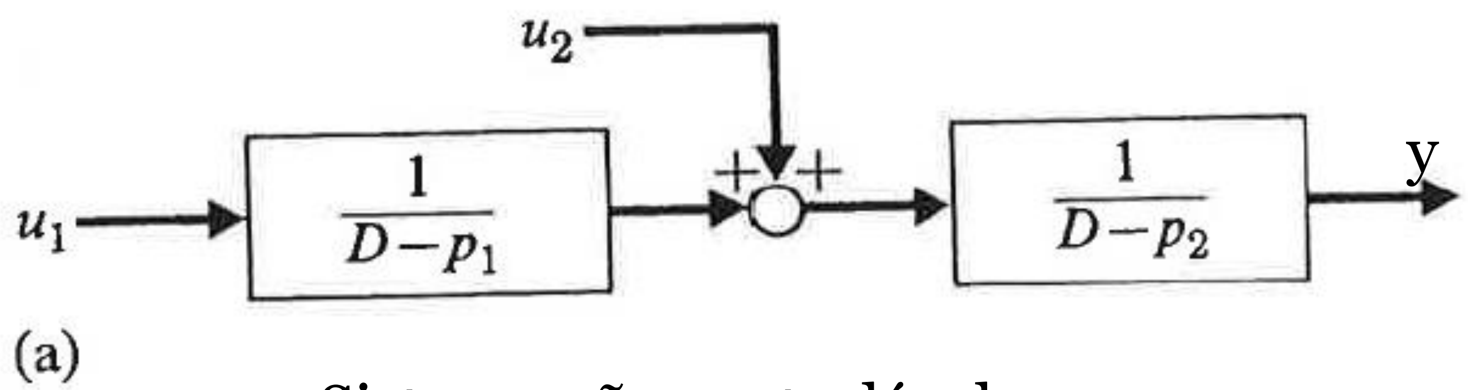
Observabilidade

Um sistema é dito *observável*, se todo e qualquer estado inicial **x**(to) pode ser exatamente determinado das medidas **y**(t), e das entradas $u(t)$ num intervalo de tempo finito ($0 \leq t \leq tf$).

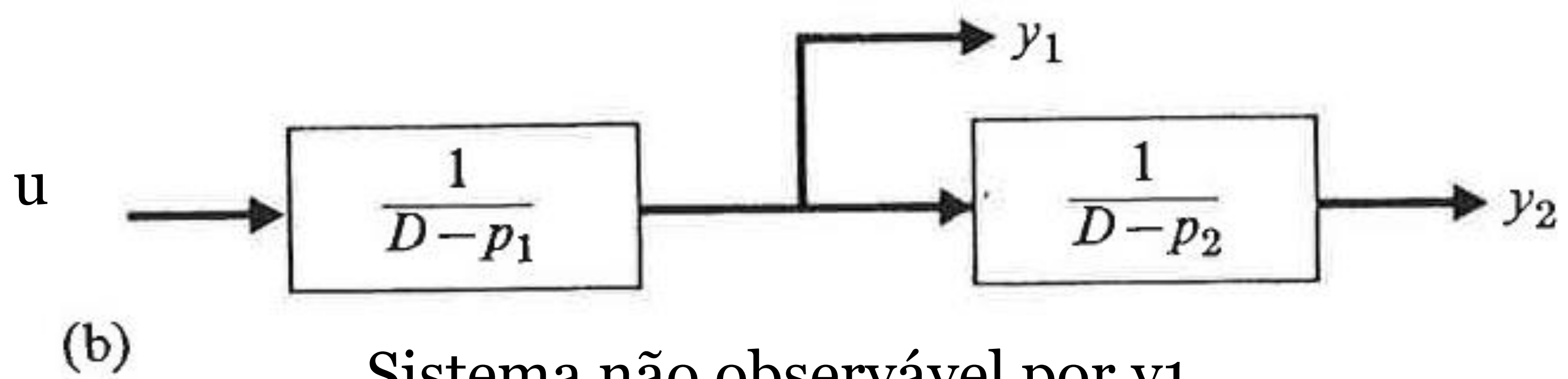
(Sistema é completamente observável se todos os estados afetam cada elemento do vetor de saída)



Controlabilidade e Observabilidade



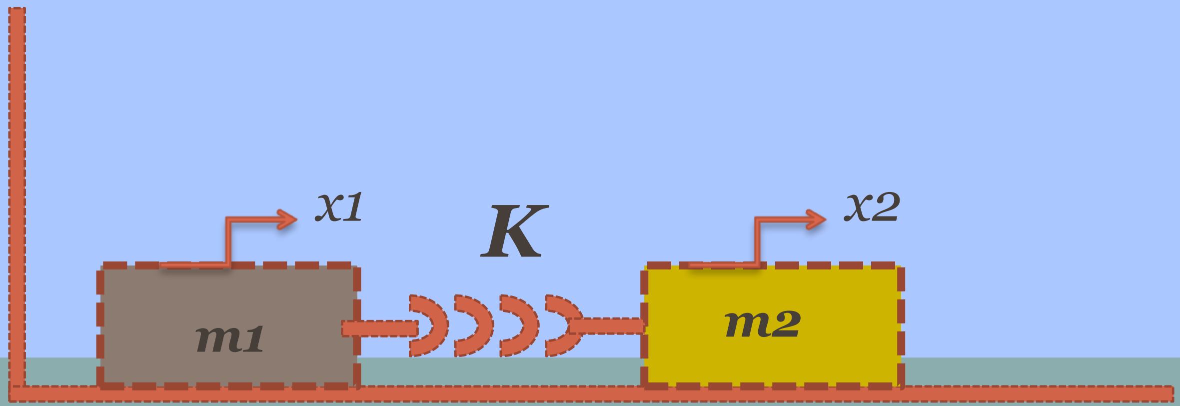
Sistema não controlável por u2



Sistema não observável por y1

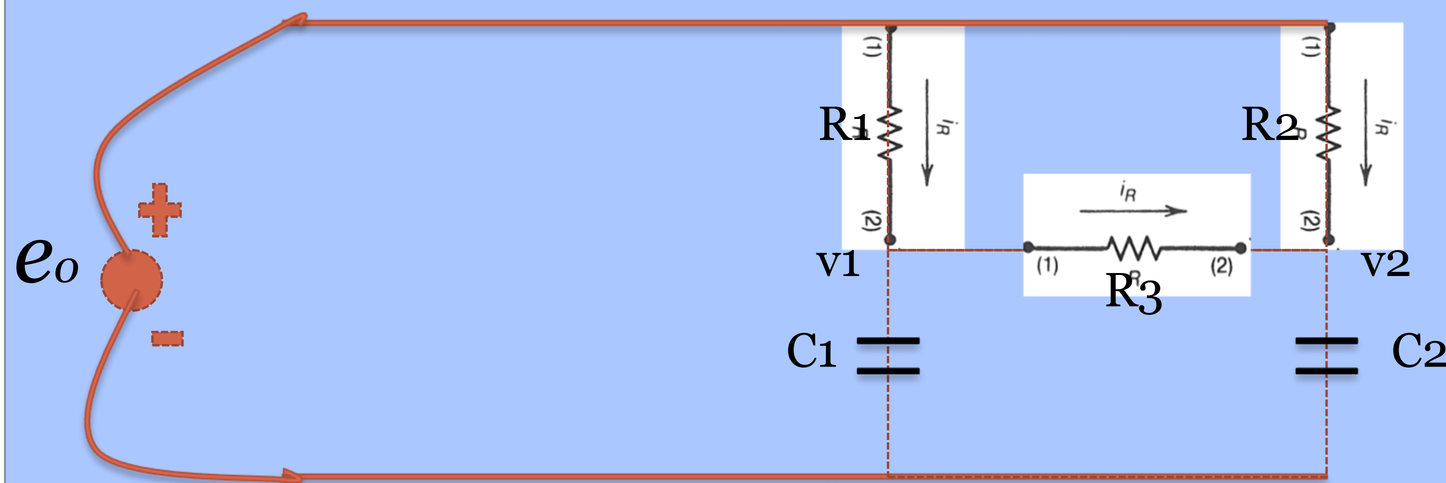
Causas da NC e NO

- Uso de variáveis redundantes ➔ SLLD
  (o número de variáveis de estado não é mínimo).
- Sistemas fisicamente incontroláveis (forças e torques internos).

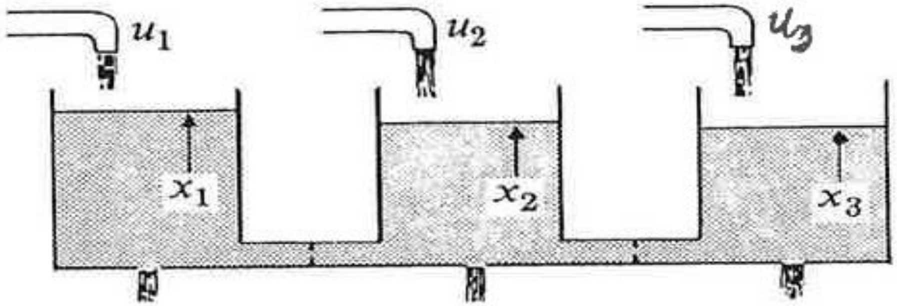


Causas da NC e NO - continuação

- Excesso de simetria : se $R_1C_1=R_2C_2$, a diferença de tensão (v_1-v_2) não pode ser influenciada por e_o e vai para zero. Se esta diferença for a única medida do sistema ➔ sistema é não observável.



Excesso de simetria



$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

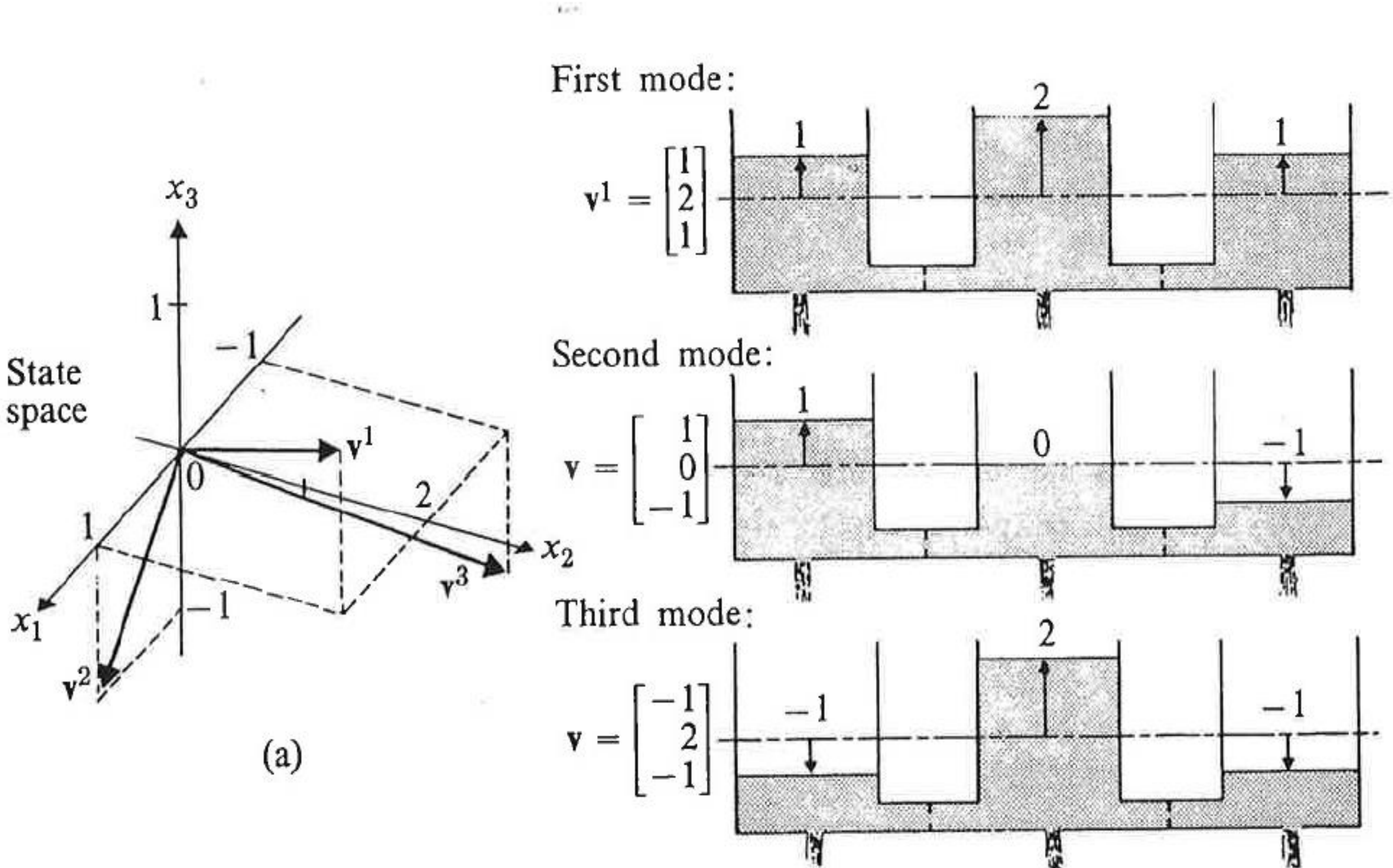
$$\text{Autovalores}: |\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}| = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1; \lambda_2 = -3; \lambda_1 = -5.$$

Sistema Estável.

Autovetores: (matriz modal)

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Excesso de simetria



Excesso de simetria

$$\begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATx + T^{-1}Bu \\ y = CTx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \Lambda z + \Gamma u \\ y = \theta z \end{cases}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 3/4 \\ \boxed{0} \\ 1/4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Não há ação de controle !!}$$

Não há ação de controle sobre o tanque 2 no modo 2!