

# PME 3100 • Mecânica I • Módulo 3.2

Matriz de inércia – definição e propriedades

Dinâmica de um corpo rígido em movimento geral

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino



- 1 Resumo do módulo
- 2 Representação matricial
- 3 Matriz de inércia
- 4 Representação vetorial
- 5 Dinâmica de um corpo rígido em movimento geral
- 6 \*Equações de Euler
- 7 \*Rotação em torno de eixo fixo
- 8 \*Momentos de inércia de sólidos homogêneos



- 1 Resumo do módulo
- 2 Representação matricial
- 3 Matriz de inércia
- 4 Representação vetorial
- 5 Dinâmica de um corpo rígido em movimento geral
- 6 \*Equações de Euler
- 7 \*Rotação em torno de eixo fixo
- 8 \*Momentos de inércia de sólidos homogêneos



## TQMA para um corpo rígido em movimento geral

Para um corpo rígido  $C$  em *movimento geral*, a expressão do TQMA com respeito ao um *polo A solidário* a  $C$  é:

$$m(\mathbf{G} - \mathbf{A}) \wedge \vec{a}_A + \mathbf{J}_A(\vec{\alpha}) + \vec{\omega} \wedge \mathbf{J}_A(\vec{\omega}) = \vec{M}_A$$

com  $(\mathbf{G} - \mathbf{A})$  denotando a posição do centro de massa  $G$ ,  $\vec{M}_A$  sendo a resultante dos momentos externos sobre  $C$  e  $\mathbf{J}_A$  representando o diádico de inércia de  $C$  com respeito ao ponto  $A$ , definido como:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_A(q_x \hat{i} + q_y \hat{j} + q_z \hat{k}) &= (+J_{Ax}q_x - J_{Axy}q_y - J_{Axz}q_z)\hat{i} \\ &+ (-J_{Axy}q_x + J_{Ay}q_y - J_{Ayz}q_z)\hat{j} \\ &+ (-J_{Axz}q_x - J_{Ayz}q_y + J_{Az}q_z)\hat{k} \end{aligned}$$

Utilizando a representação de  $\mathbf{J}_A$  como *matriz de inércia*:

$$\mathbf{J}_A \mathbf{q} = \begin{bmatrix} J_{Ax} & -J_{Axy} & -J_{Axz} \\ -J_{Axy} & J_{Ay} & -J_{Ayz} \\ -J_{Axz} & -J_{Ayz} & J_{Az} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +J_{Ax}q_x - J_{Axy}q_y - J_{Axz}q_z \\ -J_{Axy}q_x + J_{Ay}q_y - J_{Ayz}q_z \\ -J_{Axz}q_x - J_{Ayz}q_y + J_{Az}q_z \end{bmatrix}$$



## Matriz de inércia e suas propriedades

Os elementos da matriz de inércia em um sistema de coordenadas Axyz são os *momentos de inércia*  $J_{Ax}$ ,  $J_{Ay}$  e  $J_{Az}$  e os *produtos de inércia*  $J_{Axy}$ ,  $J_{Axz}$  e  $J_{Ayz}$ . Para um sistema de pontos materiais, como:

$$J_{Ax} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad J_{Ay} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) \quad J_{Az} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$J_{Axy} = \sum_i m_i x_i y_i \quad J_{Axz} = \sum_i m_i x_i z_i \quad J_{Ayz} = \sum_i m_i y_i z_i$$

São *nulos* os *produtos de inércia* que envolvem um *eixo ortogonal a um plano de simetria inercial*. Os eixos do sistema de coordenadas Axyz são ditos *eixos principais de inércia* se  $J_{Axy} = J_{Axz} = J_{Ayz} = 0$ .

Para os sistemas de coordenadas Axyz e Gxyz, de *eixos paralelos*, o último com origem no *centro de massa G*, valem relações da forma:

$$J_{Az} = J_{Gz} + m(x_G^2 + y_G^2) \quad J_{Axy} = J_{Gxy} + mx_G y_G$$



- 1 Resumo do módulo
- 2 Representação matricial
- 3 Matriz de inércia
- 4 Representação vetorial
- 5 Dinâmica de um corpo rígido em movimento geral
- 6 \*Equações de Euler
- 7 \*Rotação em torno de eixo fixo
- 8 \*Momentos de inércia de sólidos homogêneos



## Representação matricial do produto escalar entre vetores

A representação do vetor  $\vec{p}$  na base  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  pode ser feita na forma da *matriz-coluna*  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{p} = p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k}$$

Considere os vetores  $\vec{p}$  e  $\vec{q}$  e suas representações em uma *base ortonormal*  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ . Pode-se afirmar que:

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= (p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k}) \cdot (q_x \hat{i} + q_y \hat{j} + q_z \hat{k}) = p_x q_x + p_y q_y + p_z q_z \\ &= \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = \vec{q} \cdot \vec{p} = \mathbf{p}^T \mathbf{q} = \mathbf{q}^T \mathbf{p}$$



## Matrizes antissimétricas e a representação do produto vetorial

A representação de produtos vetoriais, contudo, requer a introdução da representação em uma *base ortonormal positiva* ( $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ) do vetor  $\vec{p}$  na forma de uma *matriz quadrada antissimétrica*  $\tilde{\mathbf{p}} = -\tilde{\mathbf{p}}^T$ :

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{p} = p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k}$$

Dessa forma, o produto vetorial  $\vec{w} = \vec{p} \wedge \vec{q}$  pode ser representado na seguinte forma matricial:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} p_y q_z - p_z q_y \\ p_z q_x - p_x q_z \\ p_x q_y - p_y q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{w} = \vec{p} \wedge \vec{q} = -\vec{q} \wedge \vec{p} \Rightarrow \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{p}}\mathbf{q} = -\tilde{\mathbf{q}}\mathbf{p}$$



## Campos de velocidades e acelerações de um corpo rígido

As *equações dos campos de velocidades e acelerações* de um corpo rígido permitem calcular a velocidade e aceleração de qualquer ponto P solidário ao corpo em um dado instante de tempo, se forem conhecidos, neste *mesmo instante de tempo*, os vetores:

- velocidade angular  $\vec{\omega}$  e aceleração angular  $\vec{\alpha}$  do corpo;
- velocidade  $\vec{v}_A$  e aceleração  $\vec{a}_A$ , de um ponto A a ele solidário;
- posição relativa  $\vec{r}_{P/A} = (P - A)$ .

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{P/A}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \vec{r}_{P/A} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{P/A})$$

Pode-se adotar a representação matricial para estas equações:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{r}_{P/A}$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{r}_{P/A} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}^2 \mathbf{r}_{P/A}$$



## Quantidade de movimento angular de um corpo rígido

Particione um corpo rígido  $C$  como um sistema de pontos materiais  $\{P_k | k = 1, \dots, n\}$ . Seja  $A$  um ponto solidário a  $C$  e adote a notação:

- $\vec{r}_k = (P_k - A)$ : posição da partícula  $P_k$  relativa ao ponto  $A$ .
- $\vec{v}_k$ : velocidade da partícula  $P_k$  em um *referencial inercial*  $N$ .

A *quantidade de movimento angular* (ou momento da quantidade de movimento) do corpo rígido  $C$  com respeito ao polo  $A$  é dada por:

$$\begin{aligned} \vec{H}_A &= \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_A = \sum_i m_i \tilde{r}_i \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \tilde{r}_i (\mathbf{v}_A - \tilde{r}_i \boldsymbol{\omega}) \\ &= \underbrace{\left( \sum_i m_i \tilde{r}_i \right)}_{m \tilde{r}_{G/A}} \mathbf{v}_A + \underbrace{\left( - \sum_i m_i \tilde{r}_i^2 \right)}_{\mathbf{J}_A} \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_A = m \tilde{r}_{G/A} \mathbf{v}_A + \mathbf{J}_A \boldsymbol{\omega}$$



## Energia cinética de um corpo rígido

Analogamente, simplificando a expressão da *energia cinética* do corpo C:

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^\top \mathbf{v}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_A + \tilde{\omega} \mathbf{r}_i)^\top (\mathbf{v}_A + \tilde{\omega} \mathbf{r}_i) \\
 &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_A^\top \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_A^\top \tilde{\omega} \underbrace{\left( \sum_i m_i \mathbf{r}_i \right)}_{m \mathbf{r}_{G/A}} + \frac{1}{2} \omega^\top \underbrace{\left( - \sum_i m_i \tilde{\mathbf{r}}_i^2 \right)}_{\mathbf{J}_A} \omega
 \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_A^\top \mathbf{v}_A + m \mathbf{v}_A^\top \tilde{\omega} \mathbf{r}_{G/A} + \frac{1}{2} \omega^\top \mathbf{J}_A \omega$$

Define-se assim a *matriz de inércia*  $\mathbf{J}_A$  do corpo C no sistema de coordenadas  $Axyz = (A, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  por meio da expressão:

$$\mathbf{J}_A = - \sum_i m_i \tilde{\mathbf{r}}_i^2$$



- 1 Resumo do módulo
- 2 Representação matricial
- 3 Matriz de inércia
- 4 Representação vetorial
- 5 Dinâmica de um corpo rígido em movimento geral
- 6 \*Equações de Euler
- 7 \*Rotação em torno de eixo fixo
- 8 \*Momentos de inércia de sólidos homogêneos



## Matriz de inércia de um sistema material

Considere um sistema de pontos materiais  $S = \{P_k | k = 1, \dots, n\}$ .

Defina-se um sistema de coordenadas  $Axyz = (A, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ , tal que:

$$\vec{r}_i = (P_i - A) = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$$

A *matriz de inércia* de  $S$  no sistema de coordenadas  $Axyz$  é:

$$J_A = - \sum_i m_i \begin{bmatrix} 0 & -z_i & y_i \\ z_i & 0 & -x_i \\ -y_i & x_i & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} J_{Ax} & -J_{Axy} & -J_{Axz} \\ -J_{Axy} & J_{Ay} & -J_{Ayz} \\ -J_{Axz} & -J_{Ayz} & J_{Az} \end{bmatrix}$$

$$J_{Ax} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad J_{Ay} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) \quad J_{Az} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$J_{Axy} = \sum_i m_i x_i y_i \quad J_{Axz} = \sum_i m_i x_i z_i \quad J_{Ayz} = \sum_i m_i y_i z_i$$

A matriz de inércia é uma *matriz simétrica*.



## Momento de inércia e raio de giração

Como vimos no Módulo 3.1, o **momento de inércia** com respeito ao eixo  $Au$ , orientado pelo vetor unitário  $\hat{u}$ , de um sistema de pontos materiais  $\{P_k | k = 1, \dots, n\}$ , pode ser calculado pela expressão:

$$J_{Au} = \sum_i m_i (\vec{r}_i \wedge \hat{u}) \cdot (\vec{r}_i \wedge \hat{u}) = \sum_i m_i (\tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{u})^\top (\tilde{\mathbf{r}}_i \mathbf{u}) = \mathbf{u}^\top \underbrace{\left( - \sum_i m_i \tilde{\mathbf{r}}_i^2 \right)}_{\mathbf{J}_A} \mathbf{u}$$

$$J_{Au} = \mathbf{u}^\top \mathbf{J}_A \mathbf{u}$$

Por definição,  $J_{Au} > 0$ . Portanto,  $\mathbf{u}^\top \mathbf{J}_A \mathbf{u} > 0$ , qualquer seja o vetor unitário  $\hat{u}$ . Por ter esta propriedade,  $\mathbf{J}_A$  é uma matriz *definida positiva*.

O **raio de giração** com respeito ao eixo  $Au$  deste sistema material de massa  $m$ , é então dado pela expressão:

$$r_{Au} = \sqrt{\frac{J_{Au}}{m}} = \sqrt{\frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{J}_A \mathbf{u}}{m}} \quad \Leftrightarrow \quad J_{Au} = m r_{Au}^2$$



## Momento polar de inércia

O **momento polar de inércia** com respeito ao ponto A de um sistema material, é definido pela expressão:

$$I_A = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{J}_A) = \frac{1}{2} (J_{Ax} + J_{Ay} + J_{Az})$$

Em particular, modelando o corpo rígido C, como um sistema de pontos materiais  $\{P_k | k = 1, \dots, n\}$ , tem-se:

$$I_A = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i |\vec{r}_i|^2$$

A contribuição de uma porção material para o momento polar de inércia depende apenas de sua distância ao polo A, não dependendo do sistema de coordenadas escolhido. Decorre, portanto, que o *traço da matriz de inércia é invariante* com respeito à orientação dos eixos.

Para um corpo rígido modelado como uma *figura plana esbelta* sobre o plano xy,  $z_i = 0, \forall P_i \Rightarrow I_A = J_{Az}$  e, portanto:  $J_{Az} = J_{Ax} + J_{Ay}$ .



## Produto de inércia

Define-se o **produto de inércia** de um sistema material com respeito ao par de eixos  $As$  e  $Au$ , orientados pelos vetores unitários  $\hat{s}$  e  $\hat{u}$ , respectivamente, como:

$$\begin{aligned}
 J_{Asu} = J_{Aus} &= - \sum_i m_i (\vec{r}_i \wedge \hat{s}) \cdot (\vec{r}_i \wedge \hat{u}) \\
 &= - \sum_i m_i (\tilde{r}_i \mathbf{s})^\top (\tilde{r}_i \mathbf{u}) = -\mathbf{s}^\top \underbrace{\left( - \sum_i m_i \tilde{r}_i^2 \right)}_{J_A} \mathbf{u}
 \end{aligned}$$

$$J_{Asu} = J_{Aus} = -\mathbf{s}^\top J_A \mathbf{u} = -\mathbf{u}^\top J_A \mathbf{s}$$

Por exemplo para os eixos  $Ax$  e  $Ay$ , respectivamente orientados pelos vetores unitários  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$ :

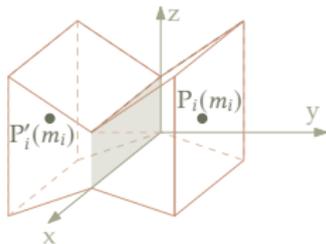
$$\vec{r}_i \wedge \hat{i} = z_i \hat{j} - y_i \hat{k} \quad \text{e} \quad \vec{r}_i \wedge \hat{j} = -z_i \hat{i} + x_i \hat{k} \quad \Rightarrow \quad J_{Axy} = \sum_i m_i x_i y_i$$



## Produtos de inércia e simetria

O corpo homogêneo indicado na figura apresenta simetria na distribuição de massa com respeito ao plano  $xz$ . Observe que para cada ponto  $P_i$ , existe um ponto espelho  $P'_i$ , de mesma massa tal que:

$$P_i = (x_i, y_i, z_i) \quad \text{e} \quad P'_i = (x_i, -y_i, z_i)$$



Assim:

$$J_{xy} = \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k = \dots + m_i x_i y_i + m_i x_i (-y_i) + \dots = 0$$

$$J_{yz} = \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k = \dots + m_i y_i z_i + m_i (-y_i) z_i + \dots = 0$$

Os *produtos de inércia* que envolvem um *eixo ortogonal a um plano de simetria inercial* são identicamente *nulos*.

## Translação de eixos

Considere dois sistemas de eixos,  $Axyz$  e  $Gxyz$ , o último com origem no *centro de massa*  $G$  do sistema material e tal que os eixos  $Gx$ ,  $Gy$  e  $Gz$  sejam respectivamente paralelos aos eixos  $Ax$ ,  $Ay$  e  $Az$ . Adote:

$$\vec{r}_i = (P_i - A) = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$$

$$\vec{r}_{G/A} = (G - A) = x_G\hat{i} + y_G\hat{j} + z_G\hat{k}$$

Dessa forma:

$$\begin{aligned} J_G &= - \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{G/A}) (\vec{r}_i - \vec{r}_{G/A}) \\ &= - \underbrace{\sum_i m_i \tilde{r}_i^2}_{J_A} + \underbrace{\left( \sum_i m_i \tilde{r}_i \right)}_{m\tilde{r}_{G/A}} \tilde{r}_{G/A} + \tilde{r}_{G/A} \underbrace{\left( \sum_i m_i \tilde{r}_i \right)}_{m\tilde{r}_{G/A}} - \underbrace{\left( \sum_i m_i \right)}_m \tilde{r}_{G/A}^2 \end{aligned}$$

$$J_A = J_G - m\tilde{r}_{G/A}^2$$



## Translação de eixos

Desenvolvendo a expressão anterior, obtém-se:

$$\mathbf{J}_A = \mathbf{J}_G + m \begin{bmatrix} (y_G^2 + z_G^2) & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & (x_G^2 + z_G^2) & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & (x_G^2 + y_G^2) \end{bmatrix}$$

Assim, os momentos e produtos de inércia correspondentes aos *eixos paralelos* destes sistemas podem ser relacionados pelo conjunto de expressões (também conhecido como *teorema de Steiner*):

$$\begin{aligned} J_{Ax} &= J_{Gx} + m(y_G^2 + z_G^2) & J_{Axy} &= J_{Gxy} + mx_G y_G \\ J_{Ay} &= J_{Gy} + m(x_G^2 + z_G^2) & J_{Axz} &= J_{Gxz} + mx_G z_G \\ J_{Az} &= J_{Gz} + m(x_G^2 + y_G^2) & J_{Ayz} &= J_{Gyz} + my_G z_G \end{aligned}$$

## Eixos principais de inércia e momentos principais de inércia

A matriz de inércia de um sistema material  $\mathcal{S}$  expressa em um sistema de coordenadas  $Axyz = (A, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  é uma matriz:

- *simétrica* ( $\mathbf{J}_A^T = \mathbf{J}_A$ ) e, portanto, *diagonalizável*;
- *definida positiva* ( $\mathbf{w}^T \mathbf{J}_A \mathbf{w} > 0, \forall \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ) e, portanto, *invertível*.

Existe uma *base ortonormal positiva* ( $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ ) tal que a representação da matriz de inércia no sistema de coordenadas  $(A, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  é diagonal:

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} J_{A1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{A2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{A3} \end{bmatrix}$$

- Os eixos do sistema  $(A, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  são denominados *eixos principais de inércia* (ou, se  $A = G$ , *eixos centrais de inércia*).
- Os momentos de inércia  $J_{A1}$ ,  $J_{A2}$  e  $J_{A3}$  são denominados *momentos principais de inércia* (ou, se  $A = G$ , *momentos centrais de inércia*).
- Como consequência de a matriz  $\mathbf{J}_A$  ser definida positiva, os momentos principais de inércia são positivos.



## Simetrias inerciais

**Simetria inercial esférica:** ocorre quando os três *momentos centrais* de inércia são idênticos. Exs.: corpos homogêneos em forma de esfera ou de poliedros regulares (tetraedro, cubo, ...); bolas de futebol, vôlei, basquete, ...

**Axissimetria inercial:** ocorre quando dois dos três *momentos centrais* de inércia são idênticos, de valor  $I$ , e o terceiro momento central tem valor  $J$ , com:

- $J > I$ , se o corpo for oblato (achatado) – exs.: discos homogêneos, engrenagens cilíndricas e cônicas balanceadas, rodas de veículos terrestres balanceadas.
- $J < I$ , se o corpo for prolato (esbelto) – exs.: cilindros homogêneos esbeltos, bolas de rugby e de futebol americano.

O *eixo principal* associado ao momento  $J$  é o *eixo de axissimetria*.



- 1 Resumo do módulo
- 2 Representação matricial
- 3 Matriz de inércia
- 4 Representação vetorial
- 5 Dinâmica de um corpo rígido em movimento geral
- 6 \*Equações de Euler
- 7 \*Rotação em torno de eixo fixo
- 8 \*Momentos de inércia de sólidos homogêneos



## Representação vetorial

Se os vetores  $\vec{p} = p_x \hat{i} + p_y \hat{j} + p_z \hat{k}$  e  $\vec{q} = q_x \hat{i} + q_y \hat{j} + q_z \hat{k}$ , quando representados como matriz-coluna na base  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  satisfazem à relação:

$$\mathbf{p} = \mathbf{J}_A \mathbf{q}$$

então:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{Ax} & -J_{Axy} & -J_{Axz} \\ -J_{Axy} & J_{Ay} & -J_{Ayz} \\ -J_{Axz} & -J_{Ayz} & J_{Az} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +J_{Ax}q_x - J_{Axy}q_y - J_{Axz}q_z \\ -J_{Axy}q_x + J_{Ay}q_y - J_{Ayz}q_z \\ -J_{Axz}q_x - J_{Ayz}q_y + J_{Az}q_z \end{bmatrix}$$

Assim, pode-se interpretar  $\mathbf{J}_A$  como um *operador* em espaço vetorial Euclidiano para o qual, dado  $\vec{q} = q_x \hat{i} + q_y \hat{j} + q_z \hat{k}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \vec{p} = \mathbf{J}_A(\vec{q}) = & (+J_{Ax}q_x - J_{Axy}q_y - J_{Axz}q_z)\hat{i} + (-J_{Axy}q_x + J_{Ay}q_y - J_{Ayz}q_z)\hat{j} \\ & + (-J_{Axz}q_x - J_{Ayz}q_y + J_{Az}q_z)\hat{k} \end{aligned}$$

Tal operador é denominado *diádico de inércia*, sendo um *tensor*. A *matriz de inércia* corresponde a uma representação do diádico na base  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ .

## Representação vetorial

Utilizando representação vetorial, as expressões para o *momento de inércia*  $J_{Au}$  e o *produto de inércia*  $J_{Aus}$  de um sistema material são:

$$J_{Aus} = \hat{u} \cdot \mathbf{J}_A(\hat{u}) \quad \text{e} \quad J_{Asu} = J_{Aus} = -\hat{s} \cdot \mathbf{J}_A(\hat{u}) = -\hat{u} \cdot \mathbf{J}_A(\hat{s})$$

A *quantidade de movimento angular* de um corpo rígido com respeito a um polo A a ele solidário, por sua vez, fica expressa como:

$$\vec{H}_A = m(\mathbf{G} - \mathbf{A}) \wedge \vec{v}_A + \mathbf{J}_A(\vec{\omega})$$

Ainda, para a *energia cinética* deste corpo, é válida a expressão:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_A \cdot \vec{v}_A + m \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \wedge (\mathbf{G} - \mathbf{A}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{J}_A(\vec{\omega})$$

Definindo o versor  $\hat{u} = \vec{\omega}/|\vec{\omega}|$ , conclui-se que:

$$\vec{\omega} \cdot \mathbf{J}_A(\vec{\omega}) = \hat{u} \cdot \mathbf{J}_A(\hat{u}) |\vec{\omega}|^2 = J_{Au} |\vec{\omega}|^2$$

Assim, a expressão para  $T$  acima equivale à deduzida no Módulo 3.1.



- 1 Resumo do módulo
- 2 Representação matricial
- 3 Matriz de inércia
- 4 Representação vetorial
- 5 Dinâmica de um corpo rígido em movimento geral
- 6 \*Equações de Euler
- 7 \*Rotação em torno de eixo fixo
- 8 \*Momentos de inércia de sólidos homogêneos



## TQMA para um corpo rígido em movimento geral

Particionando o corpo, tomando o produto vetorial de  $\vec{r}_i = (P_i - A)$  pela equação correspondente à segunda lei de Newton para  $P_i$  e somando as equações assim obtidas para todos os pontos ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$\underbrace{\sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{a}_i}_{\mathbf{1}} = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i}_{\vec{M}_A} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \wedge \vec{f}_{ij}}_{\vec{0}}$$

Tomando um *polo A solidário ao corpo rígido* e usando a equação do *campo de acelerações*, o termo **1** se desenvolve em forma matricial como:

$$\sum_i m_i \tilde{r}_i (\mathbf{a}_A + \tilde{\alpha} \mathbf{r}_i + \tilde{\omega}^2 \mathbf{r}_i) = \underbrace{\left( \sum_i m_i \tilde{r}_i \right)}_{m \tilde{\mathbf{r}}_{G/A}} \mathbf{a}_A + \underbrace{\left( - \sum_i m_i \tilde{r}_i^2 \right)}_{\mathbf{J}_A} \boldsymbol{\alpha} + \tilde{\omega} \underbrace{\left( - \sum_i m_i \tilde{r}_i^2 \right)}_{\mathbf{J}_A} \boldsymbol{\omega}$$

Na simplificação acima usamos duas identidades decorrentes de propriedades do produto vetorial:  $\tilde{\alpha} \mathbf{r}_i = -\tilde{r}_i \boldsymbol{\alpha}$  (*anticomutativa*) e  $\tilde{r}_i \tilde{\omega}^2 \mathbf{r}_i = -\tilde{\omega} \tilde{r}_i^2 \boldsymbol{\omega}$ .

## TQMA para um corpo rígido em movimento geral

Assim, a expressão matricial do *teorema da quantidade de movimento angular* (TQMA) para um *corpo rígido*, com *polo A solidário ao corpo*, é:

$$m\tilde{\mathbf{r}}_{G/A} \mathbf{a}_A + \mathbf{J}_A \boldsymbol{\alpha} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{J}_A \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_A$$

ou ainda, adotando a representação vetorial convencional:

$$m(\mathbf{G} - \mathbf{A}) \wedge \vec{\mathbf{a}}_A + \mathbf{J}_A(\vec{\boldsymbol{\alpha}}) + \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{J}_A(\vec{\boldsymbol{\omega}}) = \vec{\mathbf{M}}_A$$

O primeiro termo da equação acima será nulo se  $\mathbf{A} = \mathbf{G}$ , se  $\vec{\mathbf{a}}_A = \vec{\mathbf{0}}$  ou se os vetores  $\vec{\mathbf{a}}_A$  e  $(\mathbf{G} - \mathbf{A})$  forem paralelos.

Cabe notar que para um corpo rígido em *movimento plano* haverá *simetria inercial* com respeito a um plano  $Axy$  ( $J_{Axz} = J_{Ayz} = 0$ ), e ainda,  $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \omega \hat{\mathbf{k}}$  e  $\vec{\boldsymbol{\alpha}} = \alpha \hat{\mathbf{k}}$ . Assim:

$$\mathbf{J}_A(\vec{\boldsymbol{\alpha}}) = J_{Az} \alpha \hat{\mathbf{k}} = J_{Az} \vec{\boldsymbol{\alpha}} \quad \text{e} \quad \vec{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{J}_A(\vec{\boldsymbol{\omega}}) = \omega \hat{\mathbf{k}} \wedge (J_{Az} \omega \hat{\mathbf{k}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

levando à *expressão particular do TQMA para movimento plano* (vide Módulo 3.1):

$$m(\mathbf{G} - \mathbf{A}) \wedge \vec{\mathbf{a}}_A + J_{Az} \vec{\boldsymbol{\alpha}} = \vec{\mathbf{M}}_A$$



## TQMA para um corpo rígido em movimento geral

Alternativamente, pode-se recorrer à expressão do *teorema da quantidade de movimento angular* (TQMA) com respeito ao polo A, válida para *qualquer sistema material*:

$$\frac{d\vec{H}_A}{dt} + \vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G = \vec{M}_A \quad \text{①}$$

A derivada temporal da quantidade de movimento angular  $\vec{H}_A$  de um corpo rígido com respeito a um polo A a ele solidário é então dada por:

$$\frac{d\vec{H}_A}{dt} = \underbrace{m(\vec{v}_G - \vec{v}_A) \wedge \vec{v}_A}_{-\vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G} + m(\vec{G} - \vec{A}) \wedge \vec{a}_A + \frac{d}{dt} \mathbf{J}_A(\vec{\omega}) \quad \text{②}$$

Da substituição de ② em ① decorre uma *expressão alternativa do TQMA para um corpo rígido* com respeito ao polo A a ele solidário:

$$m(\vec{G} - \vec{A}) \wedge \vec{a}_A + \frac{d}{dt} \mathbf{J}_A(\vec{\omega}) = \vec{M}_A$$



## TQMA para um corpo rígido em movimento geral

As duas expressões do TQMA para um corpo rígido em movimento geral aqui deduzidas são *equivalentes entre si*, uma vez que:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{J}_A(\vec{\omega}) = \mathbf{J}_A(\vec{\alpha}) + \vec{\omega} \wedge \mathbf{J}_A(\vec{\omega})$$

\*Para demonstrar tal identidade considere uma *base ortonormal* positiva  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  *solidária* ao corpo rígido, de tal forma que *momentos e produtos de inércia associados aos eixos* do sistema de coordenadas  $Axyz = (A, \hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$  permaneçam *constantes*.

Da cinemática do corpo rígido sabemos que:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha} \quad \frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{i} \quad \frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{j} \quad \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{k}$$

A identidade desejada decorre diretamente da derivada temporal de  $\mathbf{J}_A(\vec{\omega})$  observando sua representação na base  $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{J}_A(\vec{\omega}) &= (+J_{Ax} \dot{\omega}_x - J_{Axy} \dot{\omega}_y - J_{Axz} \dot{\omega}_z) \hat{i} + (-J_{Axy} \dot{\omega}_x + J_{Ay} \dot{\omega}_y - J_{Ayz} \dot{\omega}_z) \hat{j} \\ &+ (-J_{Axz} \dot{\omega}_x - J_{Ayz} \dot{\omega}_y + J_{Az} \dot{\omega}_z) \hat{k} + (+J_{Ax} \omega_x - J_{Axy} \omega_y - J_{Axz} \omega_z) \vec{\omega} \wedge \hat{i} \\ &+ (-J_{Axy} \omega_x + J_{Ay} \omega_y - J_{Ayz} \omega_z) \vec{\omega} \wedge \hat{j} + (-J_{Axz} \omega_x - J_{Ayz} \omega_y + J_{Az} \omega_z) \vec{\omega} \wedge \hat{k} \end{aligned}$$

## \*Relação entre TEC e TR/TQMA para um corpo rígido

Se o sistema mecânico em questão é composto por um único corpo rígido, a *potência e o trabalho das forças internas* são identicamente *nulos*. Tomando a derivada temporal da energia cinética do corpo, temos:

$$\frac{dT}{dt} = m\vec{v}_G \cdot \vec{a}_G + \vec{\omega} \cdot \mathbf{J}_G(\vec{\alpha})$$

Tomando o produto escalar da equação do TR por  $\vec{v}_G$  e somando-a ao produto escalar da equação do TQMA (com polo G) por  $\vec{\omega}$ , obtém-se:

$$\vec{v}_G \cdot (m\vec{a}_G) + \vec{\omega} \cdot [\mathbf{J}_G(\vec{\alpha}) + \vec{\omega} \wedge (\mathbf{J}_G(\vec{\omega}))] = \vec{v}_G \cdot \vec{R} + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_G$$

$$m\vec{v}_G \cdot \vec{a}_G + \vec{\omega} \cdot \mathbf{J}_G(\vec{\alpha}) = \vec{R} \cdot \vec{v}_G + \vec{M}_G \cdot \vec{\omega}$$

$$\frac{dT}{dt} = P$$

A equação obtida pela aplicação do TEC para um corpo rígido é, portanto, uma combinação linear das equações fornecidas pelo TR e pelo TQMA.



- 1 Resumo do módulo
- 2 Representação matricial
- 3 Matriz de inércia
- 4 Representação vetorial
- 5 Dinâmica de um corpo rígido em movimento geral
- 6 \*Equações de Euler
- 7 \*Rotação em torno de eixo fixo
- 8 \*Momentos de inércia de sólidos homogêneos



## Adoção de eixos principais de inércia

Dado um corpo rígido  $C$  que descreve um movimento genérico, adote:

- um polo  $A$  *solidário ao corpo*, que coincida com seu centro de massa  $G$ , ou que tenha  $\vec{a}_A = \vec{0}$  ou com  $\vec{a}_A \parallel (G - A)$ , tal que:

$$\mathbf{J}_A(\vec{\alpha}) + \vec{\omega} \wedge \mathbf{J}_A(\vec{\omega}) = \vec{M}_A$$

- uma base ortonormal positiva  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ , com *versores alinhados aos eixos principais de inércia* de  $C$ , tal que:

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

Adotando  $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$  e  $\vec{\alpha} = \alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3$ , tem-se:

$$\mathbf{J}_A(\vec{\omega}) = J_1 \omega_1 \hat{e}_1 + J_2 \omega_2 \hat{e}_2 + J_3 \omega_3 \hat{e}_3$$

$$\mathbf{J}_A(\vec{\alpha}) = J_1 \alpha_1 \hat{e}_1 + J_2 \alpha_2 \hat{e}_2 + J_3 \alpha_3 \hat{e}_3$$

$$\vec{\omega} \wedge \mathbf{J}_A(\vec{\omega}) = -(J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 \hat{e}_1 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 \hat{e}_2 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 \hat{e}_3$$



## Equações de Euler

As equações fornecidas pelo TQMA para um corpo rígido que descreve um movimento genérico, quando expressas em componentes das direções dos eixos principais de inércia do mesmo, são denominadas *equações de Euler*:

$$\begin{cases} J_1 \alpha_1 - (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 = M_1 \\ J_2 \alpha_2 - (J_3 - J_1) \omega_3 \omega_1 = M_2 \\ J_3 \alpha_3 - (J_1 - J_2) \omega_1 \omega_2 = M_3 \end{cases}$$

com  $\vec{M}_A = M_1 \hat{e}_1 + M_2 \hat{e}_2 + M_3 \hat{e}_3$ .

- As três equações de Euler são idênticas em forma, bastando realizar uma *permutação cíclica dos índices 1, 2, 3* ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ) para obter a segunda e terceira equações a partir da primeira.
- Se a base  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  for *solidária ao corpo C*:  $\alpha_k = \frac{d\omega_k}{dt}$ ,  $k = 1, 2, 3$ .



## Teorema do eixo intermediário (Poincot, 1834)

Considere um corpo rígido  $C$  que possui os três momentos principais de inércia distintos, tal que  $J_1 > J_2 > J_3 > 0$ . A rotação livre ( $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ ) de  $C$  em torno de:

- seu primeiro ou terceiro eixos principais de inércia é *estável*;
- seu segundo eixo principal de inércia é *instável*.

*Demonstração:* considere uma base  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  solidária ao corpo  $C$ , que descreve uma rotação livre em torno do segundo eixo principal de inércia, com pequenas perturbações, ou seja,  $\omega_2 = \Omega$  tem valor finito e  $\omega_1$  e  $\omega_3$  são infinitesimais. O produto  $\omega_1 \omega_3$  é, portanto, desprezível. Assim, da 2ª equação de Euler:  $J_2 \dot{\omega}_2 \approx 0$ , ou seja,  $\Omega$  é praticamente constante. Da 1ª e 3ª equações de Euler:

$$\begin{cases} J_1 \dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3) \Omega \omega_3 \\ J_3 \dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2) \Omega \omega_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_1 = K_2 \omega_3 \\ \dot{\omega}_3 = K_2 \omega_1 \end{cases} \quad \text{com} \quad K_2 = \frac{(J_1 - J_2)(J_2 - J_3) \Omega^2}{J_1 J_3}$$

Para que uma equação diferencial da forma  $\dot{x} = Kx$  tenha soluções limitadas é necessário que  $K < 0$ . No entanto, como  $K_2 > 0$  ( $J_1 - J_2 > 0$ ,  $J_2 - J_3 > 0$ ), os valores de  $\omega_1$  e  $\omega_3$ , mesmo que inicialmente infinitesimais, com o tempo, deixariam de sê-lo.

- 1 Resumo do módulo
- 2 Representação matricial
- 3 Matriz de inércia
- 4 Representação vetorial
- 5 Dinâmica de um corpo rígido em movimento geral
- 6 \*Equações de Euler
- 7 \*Rotação em torno de eixo fixo
- 8 \*Momentos de inércia de sólidos homogêneos



## Rotação em torno de eixo fixo

Sempre que, pela presença de vínculos, um corpo rígido tiver dois pontos A e B fixos, estando livre para descrever uma rotação em torno da linha AB, diz-se que seu movimento é uma *rotação em torno de eixo fixo*. Definindo o eixo Bz passando por A e B, tem-se:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_B(\vec{\omega}) = -J_{xz}\omega \hat{i} - J_{yz}\omega \hat{j} + J_z\omega \hat{k}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J}_B(\vec{\alpha}) = -J_{xz}\alpha \hat{i} - J_{yz}\alpha \hat{j} + J_z\alpha \hat{k}$$

$$\vec{\omega} \wedge \mathbf{J}_B(\vec{\omega}) = \omega \hat{k} \wedge (-J_{xz}\omega \hat{i} - J_{yz}\omega \hat{j} + J_z\omega \hat{k}) = J_{yz}\omega^2 \hat{i} - J_{xz}\omega^2 \hat{j}$$

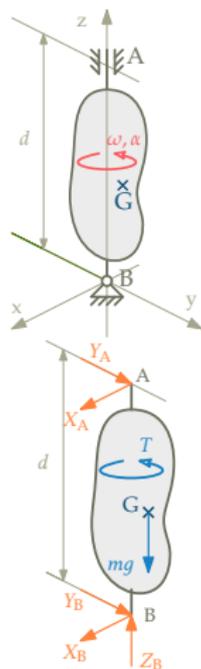
Como B é um ponto fixo ( $\vec{a}_B = \vec{0}$ ), do TQMA com polo B, resulta:

$$\mathbf{J}_B(\vec{\alpha}) + \vec{\omega} \wedge \mathbf{J}_B(\vec{\omega}) = \vec{M}_B$$

$$\begin{cases} -J_{xz}\alpha + J_{yz}\omega^2 = M_{Bx} \\ -J_{yz}\alpha - J_{xz}\omega^2 = M_{By} \\ J_z\alpha = M_{Bz} \end{cases}$$



## Rotação em torno de eixo fixo



Considerando  $G = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ :

$$\begin{aligned}\vec{a}_G &= \vec{a}_B + \vec{\alpha} \wedge (G - B) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - B)] \\ &= (-\omega^2 \bar{x} - \alpha \bar{y}) \hat{i} + (\alpha \bar{x} - \omega^2 \bar{y}) \hat{j}\end{aligned}$$

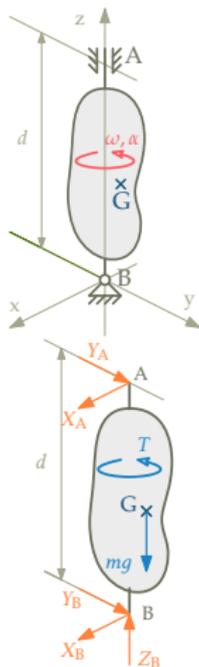
Sistema de esforços externos (ver DCL):

$$\begin{aligned}\vec{R} &= (X_A + X_B) \hat{i} + (Y_A + Y_B) \hat{j} + (Z_B - mg) \hat{k} \\ \vec{M}_B &= (G - B) \wedge (-mg \hat{k}) + (A - B) \wedge (X_A \hat{i} + Y_A \hat{j}) + T \hat{k} \\ &= (-dY_A - mg\bar{y}) \hat{i} + (dX_A + mg\bar{x}) \hat{j} + T \hat{k}\end{aligned}$$

Expressões do TR e do TQMA:

$$\begin{aligned}m\vec{a}_G &= \vec{R} \\ \mathbf{J}_B(\vec{\alpha}) + \vec{\omega} \wedge \mathbf{J}_B(\vec{\omega}) &= \vec{M}_B\end{aligned}$$

## Rotação em torno de eixo fixo



Substituindo as expressões obtidas nas equações dos teoremas, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$m(-\omega^2 \bar{x} - \alpha \bar{y}) = X_A + X_B$$

$$m(\alpha \bar{x} - \omega^2 \bar{y}) = Y_A + Y_B$$

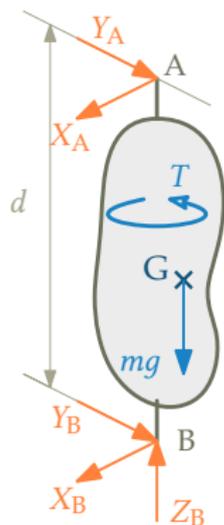
$$0 = Z_B - mg$$

$$-J_{xz}\alpha + J_{yz}\omega^2 = -mg\bar{y} - dY_A$$

$$-J_{yz}\alpha - J_{xz}\omega^2 = mg\bar{x} + dX_A$$

$$J_z\alpha = T$$

## Rotação em torno de eixo fixo



Resolvendo as equações obtidas para os esforços reativos e para o torque ativo  $T$ :

$$X_A = -\frac{gm\bar{x} + \omega^2 J_{xz} + \alpha J_{yz}}{d}$$

$$X_B = \frac{m\bar{x}(g - d\omega^2) - \alpha dm\bar{y} + \omega^2 J_{xz} + \alpha J_{yz}}{d}$$

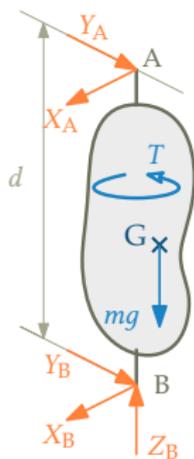
$$Y_A = -\frac{gm\bar{y} - \alpha J_{xz} + \omega^2 J_{yz}}{d}$$

$$Y_B = \frac{m\bar{y}(g - d\omega^2) + \alpha dm\bar{x} - \alpha J_{xz} + \omega^2 J_{yz}}{d}$$

$$Z_B = mg$$

$$T = \alpha J_z$$

## Balanceamento estático



Se o centro de massa está sobre o eixo de rotação  $Bz$ , então  $G = (0, 0, \bar{z})$ , ou seja  $\bar{x} = \bar{y} = 0$ :

$$X_A = -\frac{\omega^2 J_{xz} + \alpha J_{yz}}{d}$$

$$X_B = \frac{\omega^2 J_{xz} + \alpha J_{yz}}{d}$$

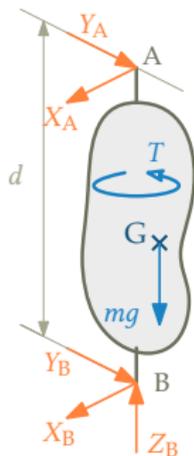
$$Y_A = \frac{\alpha J_{xz} - \omega^2 J_{yz}}{d}$$

$$Y_B = \frac{-\alpha J_{xz} + \omega^2 J_{yz}}{d}$$

$$Z_B = mg$$

$$T = \alpha J_z$$

## Balanceamento dinâmico



Se, adicionalmente,  $J_{xz} = 0$  e  $J_{yz} = 0$ :

$$X_A = X_B = Y_A = Y_B = 0$$

$$Z_B = mg$$

$$T = \alpha J_z$$

Balancar um corpo rígido é tornar seu eixo de rotação um um *eixo central de inércia\**.

\**Eixo central de inércia*: eixo principal de inércia (ortogonal a um plano de simetria inercial) que passa pelo centro de massa G do corpo.

## Balanceamento utilizando 2 pontos materiais

Dado um corpo rígido em que pelo menos uma quantidade dentre  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $J_{xz}$  ou  $J_{yz}$  for não nula, pode-se modificar as propriedades inerciais do corpo pela inclusão de 2 pontos materiais nos pontos:

- Um ponto de massa  $m_1$  em  $P_1 = (r_1 \cos \theta_1, r_1 \sin \theta_1, z_1)$
- Um ponto de massa  $m_2$  em  $P_2 = (r_2 \cos \theta_2, r_2 \sin \theta_2, z_2)$

Após a inclusão das massas passamos a ter:

$$\bar{x}' = \frac{m\bar{x} + m_1 r_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_2}{m + m_1 + m_2}$$

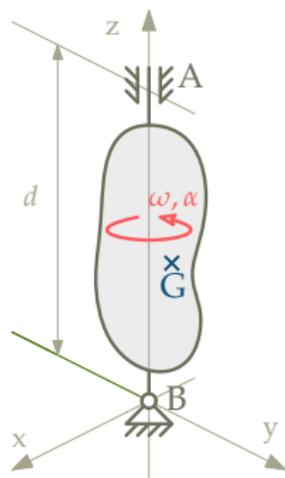
$$\bar{y}' = \frac{m\bar{y} + m_1 r_1 \sin \theta_1 + m_2 r_2 \sin \theta_2}{m + m_1 + m_2}$$

$$J'_{xz} = J_{xz} + m_1 z_1 r_1 \cos \theta_1 + m_2 z_2 r_2 \cos \theta_2$$

$$J'_{yz} = J_{yz} + m_1 z_1 r_1 \sin \theta_1 + m_2 z_2 r_2 \sin \theta_2$$



## Balanceamento utilizando 2 pontos materiais



Para que tenhamos  $\bar{x}' = 0$ ,  $\bar{y}' = 0$ ,  $J'_{xz} = 0$  e  $J'_{yz} = 0$  é necessário que:

$$m_1 r_1 \cos \theta_1 = \frac{m z_2 \bar{x} - J_{xz}}{z_1 - z_2}$$

$$m_1 r_1 \sin \theta_1 = \frac{m z_2 \bar{y} - J_{yz}}{z_1 - z_2}$$

$$m_2 r_2 \cos \theta_2 = \frac{J_{xz} - m z_1 \bar{x}}{z_1 - z_2}$$

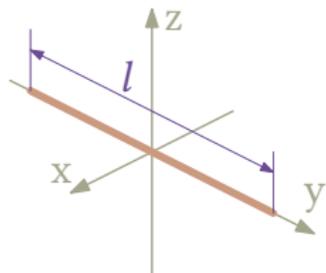
$$m_2 r_2 \sin \theta_2 = \frac{J_{yz} - m z_1 \bar{y}}{z_1 - z_2}$$

Uma vez que  $z_1 \neq z_2$ , conclui-se que, para balancear um corpo rígido, é necessário posicionar os pontos materiais em *duas seções transversais distintas*.

- 1 Resumo do módulo
- 2 Representação matricial
- 3 Matriz de inércia
- 4 Representação vetorial
- 5 Dinâmica de um corpo rígido em movimento geral
- 6 \*Equações de Euler
- 7 \*Rotação em torno de eixo fixo
- 8 \*Momentos de inércia de sólidos homogêneos

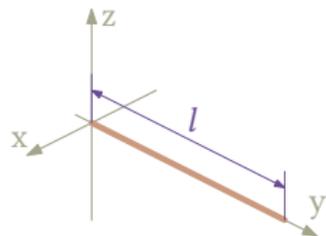


## Momentos de inércia de sólidos homogêneos



Barra esbelta homogênea (*origem no centro*)

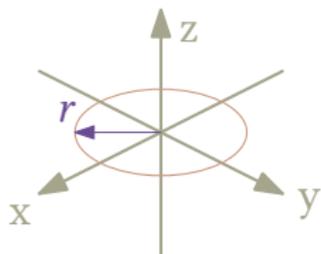
$$J_x = J_z = \frac{1}{12} ml^2 \quad J_y = 0$$



Barra esbelta homogênea (*origem na ponta*)

$$J_x = J_z = \frac{1}{3} ml^2 \quad J_y = 0$$

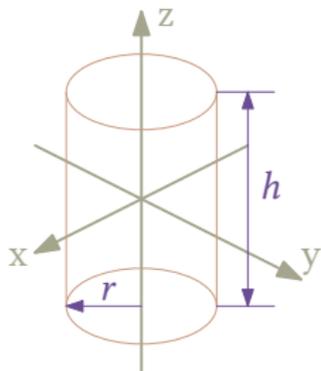
## Momentos de inércia de sólidos homogêneos



Disco homogêneo (maciço)

$$J_x = J_y = \frac{1}{4}mr^2$$

$$J_z = \frac{1}{2}mr^2$$



Anel cilíndrico

$$J_x = J_y = \frac{1}{12}m(6r^2 + h^2)$$

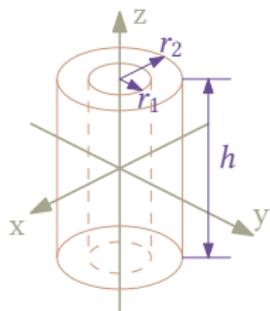
$$J_z = mr^2$$

Cilindro maciço

$$J_x = J_y = \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2)$$

$$J_z = \frac{1}{2}mr^2$$

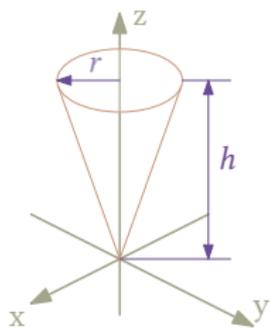
## Momentos de inércia de sólidos homogêneos



Cilindro oco de parede espessa

$$J_x = J_y = \frac{1}{12} m \left( 3(r_1^2 + r_2^2) + h^2 \right)$$

$$J_z = \frac{1}{2} m (r_1^2 + r_2^2)$$

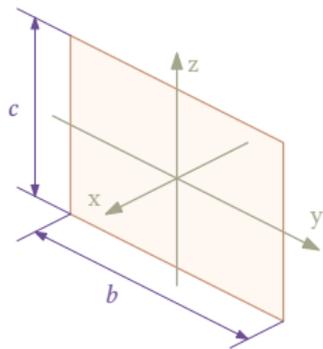


Cone maciço

$$J_x = J_y = m \left( \frac{3}{20} r^2 + \frac{3}{5} h^2 \right)$$

$$J_z = \frac{3}{10} m r^2$$

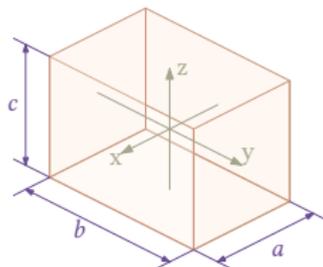
## Momentos de inércia de sólidos homogêneos



Placa retangular

$$J_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$$

$$J_y = \frac{1}{12}mc^2 \quad J_z = \frac{1}{12}mb^2$$

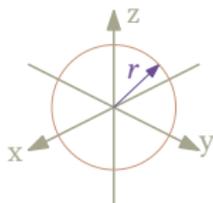


Paralelepípedo

$$J_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$$

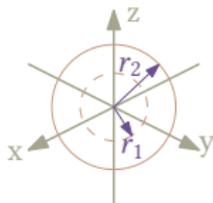
$$J_y = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2) \quad J_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

## Momentos de inércia de sólidos homogêneos



Esfera maciça

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5}mr^2$$



Esfera oca de parede fina

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{3}mr^2$$

Esfera oca de parede espessa

$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5}m \frac{r_2^5 - r_1^5}{r_2^3 - r_1^3}$$

Perguntas?

reorsino@usp.br

