PME 3100 • Mecânica I • Módulo 3.1

Energia cinética de um corpo rígido
Momento de inércia – definição e propriedades
Dinâmica de um corpo rígido em movimento plano

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Energia cinética de um corpo rígido

A **energia cinética** de um *corpo rígido*, dado um *ponto* A a ele *solidário* e o *momento de inércia* J_{Au} com respeito ao *eixo* Au*, passante por* A *e paralelo a* $\vec{\omega}$, é dada pela expressão, *cujo valor independe do* A *escolhido*:

$$T = \frac{1}{2} m \left|\vec{v}_A\right|^2 + \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \wedge m(G - A) + \frac{1}{2} J_{Au} \left|\vec{\omega}\right|^2$$

O segundo termo se cancela identicamente se tomarmos A = G.

Caso exista ponto A *solidário ao corpo* com $\vec{v}_A = \vec{0}$: $T = \frac{1}{2} J_{Au} \left|\vec{\omega}\right|^2$.

A **potência** de um sistema de forças aplicado a um corpo rígido, considerando um *ponto* A a ele *solidário* é dada pela expressão:

$$P = \vec{R} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}$$

em que $\vec{R}$ é a *resultante de forças externas* e $\vec{M}_A$ é o *momento resultante, com respeito ao polo* A*, dos esforços externos* atuantes sobre o corpo.

Momento de inércia – definição e propriedades

O **momento de inércia** de um *sistema de pontos materiais* com respeito ao eixo Az, orientado pelo versor $\hat{k}$, é definido como:

$$J_{Az} = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

com $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ representando o quadrado da *distância da partícula material* P_i *ao eixo* Az. Define-se ainda o **raio de giração** r_{Az} como a medida de distância equivalente que satisfaz à relação: $J_{Az} = m r_{Az}^2$.

O momento de inércia satisfaz a propriedades de *composição* e *decomposição* decorrentes de sua definição.

Dado um eixo Az e um segundo eixo Gz, a ele *paralelo*, passante pelo *centro de massa* G *do corpo*, vale a relação (*teorema de Steiner*):

$$J_{Az} = J_{Gz} + md^2$$

com d sendo a distância entre estes *eixos paralelos*.

Dinâmica de um corpo rígido em movimento plano

Um corpo rígido descreve um **movimento plano** se tiver um *plano Oxy de simetria inercial* que permaneça *fixo a um referencial inercial* e que permita modelar o corpo como uma *figura plana em movimento sobre o plano Oxy*.

O **trabalho** de um sistema de forças atuantes sobre um *corpo rígido em movimento plano* é dado por:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} R_{\mathrm{x}}\,\mathrm{d}x_{\mathrm{A}} + \int_{y_1}^{y_2} R_{\mathrm{y}}\,\mathrm{d}y_{\mathrm{A}} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_{\mathrm{Az}}\,\mathrm{d}\theta$$

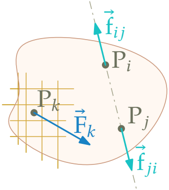
Se R_{x}, R_{y} e M_{Az} forem constantes: $W = R_{\mathrm{x}}\Delta x_{\mathrm{A}} + R_{\mathrm{y}}\Delta y_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{Az}}\Delta\theta$.

A expressão do *teorema da quantidade de movimento angular* para um *corpo rígido em movimento plano* com *polo A solidário ao corpo* é:

$$m(\mathrm{G}-\mathrm{A}) \wedge \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{A}} + J_{\mathrm{Az}}\vec{\alpha} = \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{A}}$$

Particionamento de um corpo em um sistema de pontos materiais

Considere um *particionamento* de um corpo C de massa m, tal que cada uma das n partes seja aproximada como um ponto material P_k que concentra a massa m_k da parte. Assim, $\sum_{k=1}^{n} m_k = m$ e para qualquer função integrável $\phi(P)$, escalar ou vetorial:



$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m_k\to 0}} \sum_{k=1}^{n} m_k \phi(P_k) = \int_{\mathsf{C}} \phi(P)\,\mathrm{d}m$$

Para todo ponto material desta partição, pela Segunda Lei de Newton:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

com $\vec{F}_i$ representando a *resultante de forças externas* ao sistema agindo sobre a partícula P_i e $\vec{f}_{ij}$ sendo a *força interna* aplicada pela sobre a partícula P_i pela partícula P_j.
Assim, as deduções dos *teoremas* (TR, TQMA e TEC) apresentadas no Módulo 2.4 são igualmente válidas para *qualquer corpo material extenso*.

Energia cinética de um corpo rígido

Particionando um corpo rígido como um sistema de pontos materiais e considerando um *ponto* A a ele *solidário* de tal forma que, para cada partícula material P_i, $\vec{\mathrm{v}}_i = \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{A} + \vec{\omega} \wedge (\mathrm{P}_i - \mathrm{A})$:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{\mathrm{v}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{A} + \vec{\omega} \wedge (\mathrm{P}_i - \mathrm{A})\right] \cdot \left[\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{A} + \vec{\omega} \wedge (\mathrm{P}_i - \mathrm{A})\right]$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\left[\sum_i m_i\right]}_{m} |\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{A}|^2 + \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{A} \cdot \vec{\omega} \wedge \underbrace{\left[\sum_i m_i (\mathrm{P}_i - \mathrm{A})\right]}_{m(\mathrm{G}-\mathrm{A})} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i |\vec{\omega} \wedge (\mathrm{P}_i - \mathrm{A})|^2}_{❸}$$

Para simplificar o termo ❸, defina o versor $\hat{\mathrm{u}} = \vec{\omega}/|\vec{\omega}|$:

$$❸ = \sum_i m_i \left||\vec{\omega}| \hat{\mathrm{u}} \wedge (\mathrm{P}_i - \mathrm{A})\right|^2 = \underbrace{\left[\sum_i m_i |\hat{\mathrm{u}} \wedge (\mathrm{P}_i - \mathrm{A})|^2\right]}_{J_{\mathrm{Au}}} |\vec{\omega}|^2$$

Energia cinética de um corpo rígido

Assim, dado um corpo rígido e um *ponto* A a ele *solidário*, a expressão de sua energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2} m \left|\vec{v}_A\right|^2 + \vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \wedge m(G - A) + \frac{1}{2} J_{Au} \left|\vec{\omega}\right|^2$$

O termo identificado como J_{Au} é o *momento de inércia* do corpo com respeito ao *eixo Au, passante pelo ponto A e de direção paralela a* $\vec{\omega}$.
O valor da energia cinética T *independe do ponto A escolhido*, no entanto há escolhas para A que podem simplificar o cálculo de T:

(a) se escolhermos A coincidente com o centro de massa G do corpo:

$$T = \frac{1}{2} m \left|\vec{v}_G\right|^2 + \frac{1}{2} J_{Gu} \left|\vec{\omega}\right|^2$$

(b) caso haja um ponto A solidário ao corpo de velocidade nula:

$$T = \frac{1}{2} J_{Au} \left|\vec{\omega}\right|^2, \quad \text{se} \quad \vec{v}_A = \vec{0}$$

Potência de um sistema de forças aplicado a um corpo rígido

Considerando a definição de potência, adotando um *ponto A solidário ao corpo rígido*, e aplicando a equação de *campo de velocidades*:

$$P = \sum_k \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k = \sum_k \vec{F}_k \cdot \left[\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (P_k - A)\right]$$

$$= \underbrace{\left[\sum_k \vec{F}_k\right]}_{\vec{R}} \cdot \vec{v}_A + \underbrace{\left[\sum_k (P_k - A) \wedge \vec{F}_k\right]}_{\vec{M}_A} \cdot \vec{\omega}$$

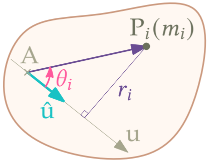
Na simplificação da última parcela foi utilizada a identidade de permutação cíclica do produto misto: $(\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{y} \wedge \vec{z}) \cdot \vec{x}$. Assim:

$$P = \vec{R} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}$$

Note que $\vec{R}$ é a *resultante de forças externas* e $\vec{M}_A$ é o *momento resultante, com respeito ao polo A, dos esforços externos* atuantes sobre o corpo.

Momento de inércia – definição

O **momento de inércia** de um *sistema de pontos materiais* $\{P_k | k = 1, \dots, n\}$ com respeito ao eixo Au, orientado pelo versor û, é definido como:



$$J_{Au} = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \left| \hat{u} \wedge (P_i - A) \right|^2$$

com $r_i = |P_i - A| \sin\theta_i = |\hat{u} \wedge (P_i - A)|$ representando a *distância da partícula material* P_i *ao eixo* Au.

Para definir o **momento de inércia** de um *corpo rígido* C, pode-se considerar um *particionamento* deste corpo como um sistema de n pontos materiais, de tal forma que, no limite $n \to \infty$, $\max m_k \to 0$:

$$J_{Au} = \int_C r^2 \, \mathrm{d}m = \int_C \left| \hat{u} \wedge (P - A) \right|^2 \mathrm{d}m$$

Momento de inércia e raio de giração

A contribuição de uma dada porção de massa a um momento de inércia depende apenas de sua distância em relação ao respectivo eixo.

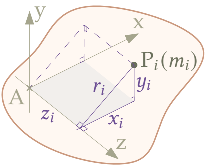
Os quatro sistemas ilustrados acima terão mesmo momento de inércia $J_{\mathrm{Au}} = mr^2$, se admitirmos que a massa total de cada um deles for m. Assim, para um anel esbelto de massa m e raio r, $J_{\mathrm{Au}} = mr^2$ com respeito ao seu eixo de revolução Au.

Define-se o **raio de giração** de um corpo de massa m com respeito ao eixo Au como o raio que um *anel esbelto equivalente* de centro A e massa m deveria ter para que seu J_{Au} fosse o mesmo desse corpo:

$$r_{\mathrm{Au}} = \sqrt{\frac{J_{\mathrm{Au}}}{m}} \quad \Leftrightarrow \quad J_{\mathrm{Au}} = mr_{\mathrm{Au}}^2$$

Momento de inércia e raio de giração

Em particular o momento de inércia de um *sistema de pontos materiais* $\{\mathrm{P}_k | k = 1, \ldots, n\}$ com respeito ao eixo coordenado Az, é dado por:



$$J_{\mathrm{Az}} = \sum_i m_i \left| \hat{\mathrm{k}} \wedge (x_i \hat{\imath} + y_i \hat{\jmath} + z_i \hat{\mathrm{k}}) \right|^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Assim, o raio de giração r_{Az} é definido como:

$$r_{\mathrm{Az}} = \sqrt{\frac{J_{\mathrm{Az}}}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)}$$

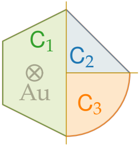
Para um *corpo rígido* C, por sua vez:

$$J_{\mathrm{Az}} = \int_{\mathsf{C}} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}m \quad \text{e} \quad r_{\mathrm{Az}} = \sqrt{\frac{1}{m} \int_{\mathsf{C}} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}m}$$

Não é do escopo de Mecânica I o cálculo de momentos de inércia de corpos rígidos via integração. Apenas exploraremos as propriedades desta definição.

Momento de inércia – composição/decomposição

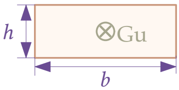
Concebendo um corpo C como uma *partição finita de corpos* $\left\{ \mathsf{C}_j \,\middle|\, \bigcup_k \mathsf{C}_k = \mathsf{C} \text{ e } \mathsf{C}_i \cap \mathsf{C}_j = \emptyset, i \neq j \right\}$, o momento de inércia pode ser calculado como:



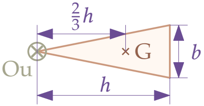
$$J_{\mathrm{Au}}^{\mathsf{C}} = \int_{\mathsf{C}} r^2\,\mathrm{d}m = \sum_j \int_{\mathsf{C}_j} r^2\,\mathrm{d}m = \sum_j J_{\mathrm{Au}}^{\mathsf{C}_j}$$

Por outro lado, sendo possível conceber o corpo C como parte de um corpo D tal que D = B ∪ C e B ∩ C = ∅:

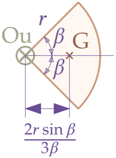
$$J_{\mathrm{Au}}^{\mathsf{C}} = J_{\mathrm{Au}}^{\mathsf{D}} - J_{\mathrm{X}}^{\mathsf{B}}$$

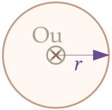


$$J_{\mathrm{Gu}} = \frac{m(b^2 + h^2)}{12}$$



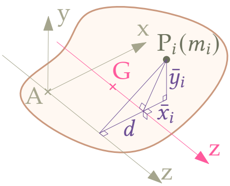
$$J_{\mathrm{Ou}} = \frac{m(b^2 + 12h^2)}{24}$$





$$J_{\mathrm{Ou}} = \frac{1}{2} m r^2$$

Translação de eixos para momentos de inércia



Deseja-se relacionar os momentos de inércia de um sistema material medidos com respeito aos eixos Az e Gz, o último *paralelo a Az e passante pelo centro de massa G do sistema*.

Seja d a distância entre estes eixos.

Sem perda de generalidade, defina o eixo Ax que intercepta ambos Az e Gz, tal que $(\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) = x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k}$ e $(\mathrm{P}_i - \mathrm{G}) = \bar{x}_i\hat{\imath} + \bar{y}_i\hat{\jmath} + \bar{z}_i\hat{k}$, com $x_i = d + \bar{x}_i$ e $y_i = \bar{y}_i$:

$$J_{\mathrm{Az}} = \sum_{i=1}^{n} m_i[(d+\bar{x}_i)^2 + \bar{y}_i^2] = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i(\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2)}_{J_{\mathrm{Gz}}} + d^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i}_{m} + 2d \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i\bar{x}_i}_{m\bar{x}_{\mathrm{G}} = 0}$$

de onde resulta a identidade de translação de eixos (*teorema de Steiner*):

$$J_{\mathrm{Az}} = J_{\mathrm{Gz}} + md^2$$

Movimento plano de corpo rígido

Um corpo rígido descreve um **movimento plano** se tiver um *plano de simetria inercial* que esteja *fixo a um referencial inercial* e tal que:

- os vetores velocidade angular e aceleração angular permaneçam *ortogonais* a este plano;
- os vetores de velocidades e acelerações permaneçam *paralelos* a este plano.

Tais propriedades tornam possível modelar o corpo como uma *figura plana em movimento em seu próprio plano*.

Do TR, $m\vec{a}_G = \vec{R}$, e do TQMA, $\dfrac{d\vec{H}_A}{dt} + \vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G = \vec{M}_A$, decorre que:

- a *resultante* $\vec{R}$ *das forças externas* a um corpo em *movimento plano* é *paralela* a este plano.
- o *momento* $\vec{M}_A$*, com respeito a um polo* A*, das forças externas* a um corpo em *movimento plano* é *ortogonal* a este plano.

Trabalho de um sistema de forças – corpo rígido em movimento plano

Para um corpo rígido em movimento no plano Oxy:

$$\vec{v}_A = \frac{dx_A}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy_A}{dt}\hat{\jmath} \qquad \vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{R} = R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} \qquad \vec{M}_A = M_{Az}\hat{k}$$

Assim, o trabalho do sistema de forças sobre este corpo é dado por:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} [\vec{R} \cdot \vec{v}_A + \vec{M}_A \cdot \vec{\omega}]dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[R_x \frac{dx_A}{dt} + R_y \frac{dy_A}{dt} + M_{Az}\frac{d\theta}{dt}\right]dt$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} R_x \, dx_A + \int_{y_1}^{y_2} R_y \, dy_A + \int_{\theta_1}^{\theta_2} M_{Az} \, d\theta$$

Em particular, se R_x, R_y e M_{Az} forem constantes:

$$W = R_x \Delta x_A + R_y \Delta y_A + M_{Az} \Delta\theta$$

TQMA para um corpo rígido em movimento plano

Particionando o corpo rígido, tomando o produto vetorial de $(P_i - A)$ pela equação correspondente à segunda lei de Newton para P_i e somando as equações assim obtidas para todos os pontos ($i = 1, \ldots, n$):

$$\underbrace{\sum_i (P_i - A) \wedge m_i \vec{a}_i}_{❶} = \underbrace{\sum_i (P_i - A) \wedge \vec{F}_i}_{\vec{M}_A} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} (P_i - A) \wedge \vec{f}_{ij}}_{\vec{0}}$$

Tomando um *polo A solidário ao corpo rígido* e usando a equação do *campo de acelerações* para *movimento plano*, o termo ❶ se simplifica para:

$$❶ = \sum_i (P_i - A) \wedge m_i \left[\vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge (P_i - A) - \omega^2 (P_i - A)\right]$$

$$= \underbrace{\left[\sum_i m_i (P_i - A)\right]}_{m(G - A)} \wedge \vec{a}_A + \underbrace{\sum_i m_i (P_i - A) \wedge [\vec{\alpha} \wedge (P_i - A)]}_{❷}$$

TQMA para um corpo rígido em movimento plano

Para simplificar o termo ❷, convém adotar as representações na base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ para os vetores $(P_i - A) = (x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath})$ e $\vec{\alpha} = \alpha\hat{k}$, resultando em:

$$❷ = \sum_i m_i(x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath}) \wedge \left[\alpha\hat{k} \wedge (x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath})\right] = \underbrace{\left[\sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)\right]}_{J_{Az}}\alpha\hat{k}$$

O termo identificado como J_{Az} é o *momento de inércia* do corpo com respeito ao eixo Az, passante pelo polo e *ortogonal ao plano de movimento*.

Assim, a expressão do *teorema da quantidade de movimento angular* para um *corpo rígido em movimento plano* com *polo A solidário ao corpo* é:

$$m(G - A) \wedge \vec{a}_A + J_{Az}\vec{\alpha} = \vec{M}_A$$

O primeiro termo da equação acima será nulo se $A = G$, se $\vec{a}_A = \vec{0}$ ou se os vetores $\vec{a}_A$ e $(G - A)$ forem paralelos.

Quantidade de movimento angular – corpo rígido em movimento plano

A própria expressão da quantidade de movimento angular de um *corpo rígido em movimento plano* pode ser simplificada adotando um *polo A solidário ao corpo* e usando a equação do *campo de velocidades*:

$$\vec{H}_A = \sum_i (P_i - A) \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i (P_i - A) \wedge \left[\vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (P_i - A)\right]$$

$$= \underbrace{\left[\sum_i m_i (P_i - A)\right]}_{m(G-A)} \wedge \vec{v}_A + \underbrace{\sum_i m_i (P_i - A) \wedge [\vec{\omega} \wedge (P_i - A)]}_{J_{Az}\vec{\omega}}$$

$$\vec{H}_A = m(G - A) \wedge \vec{v}_A + J_{Az}\vec{\omega}$$

Assim, escolhido *polo A solidário ao corpo*, as *propriedades inerciais* de um *corpo rígido em movimento plano* são caracterizadas por sua massa m, pela posição $(G - A)$ do seu centro de massa, e pelo *momento de inércia* J_{Az}.

Perguntas?

reorsino@usp.br