PME 3100 • Mecânica I • Módulo 2.4

Leis de Newton

Introdução aos teoremas da dinâmica

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Teoremas da dinâmica

Da aplicação das *Leis de Newton*, obtêm-se 3 teoremas gerais válidos para um sistema material $\mathcal{M}$ qualquer:

TR	$m\vec{a}_G = \vec{R}$
TQMA	$\dfrac{d\vec{H}_A}{dt} + \vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G = \vec{M}_A$
TEC	$\Delta T = W^{ext} + W^{int}$

- m: massa total de $\mathcal{M}$;
- G: centro de massa de $\mathcal{M}$;
- $\vec{R}$ e $\vec{M}_A$: resultante e momento com respeito a um polo A do sistema de forças *externas* atuantes sobre $\mathcal{M}$;
- $\vec{H}_A$: quantidade de movimento angular de $\mathcal{M}$, polo A;
- T: energia cinética de $\mathcal{M}$;
- $W^{ext} + W^{int}$: trabalho de forças *externas* e *internas* sobre $\mathcal{M}$.

Teoremas da dinâmica

Quantidade de movimento angular de $\mathcal{M}$ com respeito ao polo A:

$$\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{A}} = \sum_i (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge m_i \vec{\mathrm{v}}_i$$

Energia cinética de $\mathcal{M}$:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{\mathrm{v}}_i|^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{\mathrm{v}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i$$

Potência de uma força $\vec{\mathrm{F}}$ aplicada em um ponto material P com velocidade $\vec{\mathrm{v}}$ e o **trabalho** de $\vec{\mathrm{F}}$ em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$:

$$P = \vec{\mathrm{F}} \cdot \vec{\mathrm{v}}$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathrm{F}} \cdot \vec{\mathrm{v}} \, \mathrm{d}t$$

Leis de Newton

Enunciados originais, em latim, introduzidos por Isaac Newton em seu tratado *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* ("Princípios Matemáticos da Filosofia Natural" ou, simplesmente, *Principia*):

Lex I: *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*
Lex II: *Mutationem motis proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*
Lex III: *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sine corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

Estes enunciados se baseiam em conceitos de tempo e espaço absolutos (i.e., idênticos qualquer seja o referencial). A palavra *corpo*, por sua vez, deve ser entendida como *partícula material* (i.e., um corpo de dimensões desprezíveis para o problema modelado).

Primeira Lei de Newton e o conceito de referencial inercial

Todo *corpo* continua em seu estado de *repouso* ou de *movimento uniforme em uma linha reta*, a menos que seja compelido a mudar aquele estado por *forças* aplicadas sobre ele.

Sabendo que a *geometria da trajetória* descrita por um ponto *depende do referencial escolhido*, a Primeira Lei distingue uma classe especial de referenciais, denominados **referenciais inerciais**, para os quais um corpo, na ausência de forças aplicadas sobre ele, permanece em *repouso* ou descreve um *movimento retilíneo e uniforme (MRU)*.

Um corpo está em um **estado de equilíbrio** se *permanece em repouso* ou se *descreve um MRU* em um *referencial inercial*.

Princípio da Relatividade de Galileu: as leis de movimento de Newton são as mesmas em *todos os referenciais inerciais*.

Segunda Lei de Newton e quantidade de movimento

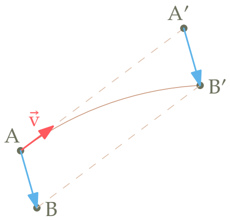
A *mudança de movimento* é *proporcional à força motora* impressa, e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é aplicada.

De acordo com Primeira Lei, se o vetor velocidade $\vec{v}$ *permanece constante* em um referencial inercial N, o estado do corpo é de *equilíbrio*.

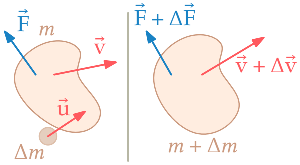
Assim, uma *mudança de movimento* deve ser entendida como uma *variação* $\Delta\vec{v}$*, em* N*, que independe do valor inicial de* $\vec{v}$.

Usando conceitos atuais, este enunciado é consistente com o princípio da *variação da quantidade de movimento* $\vec{p}$:

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{F}\,\mathrm{d}t$$



Segunda Lei de Newton e quantidade de movimento



Considere o sistema formado por uma partícula de massa m finita, à qual adere uma porção material de massa Δm em um intervalo de tempo de duração Δt.
No instante de tempo inicial t_0:

- a partícula tem velocidade $\vec{v}$;
- a porção material que adere à partícula tem velocidade $\vec{u}$;
- atua sobre a partícula uma força $\vec{F}$ de intensidade finita.

No instante de tempo $t_0 + \Delta t$ há uma única partícula material de massa $m + \Delta m$ com velocidade $\vec{v} + \Delta\vec{v}$.
Assuma que todas as variações no intervalo $[t_0, t_0 + \Delta t]$ sejam de *ordem de grandeza infinitesimal* Δ, da aplicação do princípio da variação da quantidade de movimento, resulta:

$$[(m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) - (m\,\vec{v} + \Delta m\,\vec{u})] = \vec{F}\,\Delta t + \vec{O}[\Delta^2]$$

$$m\,\Delta\vec{v} + \Delta m(\vec{v} - \vec{u}) + \vec{O}[\Delta^2] = \vec{F}\,\Delta t + \vec{O}[\Delta^2]$$

Segunda Lei de Newton e quantidade de movimento

Dividindo a expressão da última equação por Δt e tomando o limite $\Delta t \to 0$, obtém-se a denominada *Equação de Meshchersky*:

$$m\vec{a} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\vec{v} - \vec{u}) = \vec{F} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \vec{F} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\vec{u}$$

Esta equação corresponde a uma *forma mais geral* para a Segunda Lei de Newton, por tratar de forma consistente a dinâmica de uma partícula de *massa variável*.

Somente no caso de *partículas de massa constante*, ou seja, com $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 0$, a Segunda Lei de Newton se reduz às conhecidas equações:

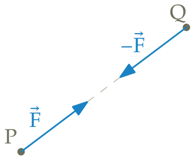
$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}) = \vec{F}$$

Segundo registros históricos, estas equações nunca foram escritas por Newton. O primeiro cientista a interpretar a Segunda Lei como sendo equivalente a estas equações foi Euler.

Terceira Lei de Newton: o Princípio da Ação e Reação

A toda *ação* há sempre uma *reação oposta e de igual intensidade*: as *ações mútuas de dois corpos um sobre o outro* são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos.

À luz da terminologia atual, a interação mútua entre dois corpos um sobre outro deve ser representada por forças opostas, de mesma intensidade e definidas sobre *a mesma linha de ação*.



*Cabe notar que, duas forças opostas sobre linhas de ação paralelas (não-coincidentes) constituem um binário. Caso a interação mútua entre duas partículas isoladas correspondesse a um binário, seria possível transformar este sistema em um *moto-contínuo*, o que violaria outras leis da Física.

Dinâmica da partícula: procedimento de modelagem

① Desenhe o *diagrama de corpo livre (DCL)* com todas as forças atuantes sobre a partícula P (ativas e reativas).

② Parametrize a descrição do movimento de P.

③ Escolha 3 direções distintas para a decomposição dos vetores de força e do vetor aceleração da partícula.

④ Monte as equações usando a Segunda Lei de Newton.

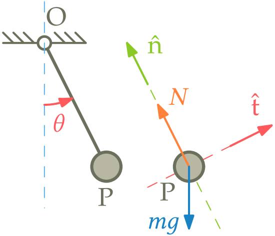
Para uma partícula P de massa m constante, usando uma base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$:

$$m\vec{a} = \vec{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad ma_x = R_x, \qquad ma_y = R_y \quad \text{e} \quad ma_z = R_z$$

Se P descreve uma trajetória curvilínea, de geometria previamente conhecida, e for possível a definição da base intrínseca $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$:

$$m\vec{a} = \vec{R} \qquad \Leftrightarrow \qquad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R_t, \qquad m\frac{v^2}{\rho} = R_n \quad \text{e} \quad 0 = R_b$$

Pêndulo simples



Um *pêndulo simples* é modelado como uma partícula P de massa m constante restrita a descrever uma trajetória circular de centro O e raio r, contida de um plano vertical. Notando que a força reativa (vínculo imposto pela barra) tem direção normal:

$$\vec{R} = N\hat{n} - mg(\sin\theta\hat{t} + \cos\theta\hat{n})$$

Considerando a coordenada θ que mede o ângulo que a direção OP forma com a vertical, de tal forma que:

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\,\hat{t} \quad \text{e} \quad \vec{a} = r\ddot{\theta}\,\hat{t} + r\dot{\theta}^2\,\hat{n}$$

Da Segunda Lei de Newton:

$$m\vec{a} = \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} mr\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \\ mr\dot{\theta}^2 = N - mg\cos\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{\theta} = -\dfrac{g}{r}\sin\theta \\ N = m(r\dot{\theta}^2 + g\cos\theta) \end{cases}$$

Sistema de pontos materiais

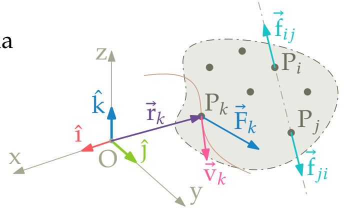
Seja $\mathcal{M} = \{P_k | k = 1, \ldots, n\}$ um sistema de pontos materiais e $(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ um sistema de coordenadas fixo a um *referencial inercial* N.

- m_k: massa da partícula P_k.
- $\vec{r}_k = \vec{r}_{P_k/O} = (P_k - O)$: vetor posição da partícula material P_k:

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt}, \quad \vec{a}_k = \frac{d\vec{v}_k}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_k}{dt^2}$$

- $\vec{F}_k$: *resultante de forças externas* ao sistema agindo sobre a partícula P_k.
- $\vec{f}_{ij}$: *força interna* aplicada pela sobre a partícula P_i pela partícula P_j.

$$\vec{f}_{ij} = \lambda_{ij}(P_i - P_j) = -\lambda_{ji}(P_i - P_j) = -\vec{f}_{ji}$$



Centro de massa

A posição do *centro de massa* G do sistema $\mathcal{M}$ é dada por:

$$\vec{r}_G = (G - O) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i(P_i - O) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i \quad \text{com} \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Desta definição decorrem as seguintes identidades:

$$\sum_i m_i\vec{r}_i = m\vec{r}_G \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_G \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i\vec{a}_i = m\vec{a}_G$$

Adicionalmente, adotando:

$$\vec{r}_{P_i/G} = (P_i - G) = \vec{r}_i - \vec{r}_G, \qquad \vec{v}_{P_i/G} = \vec{v}_i - \vec{v}_G \quad \text{e} \quad \vec{a}_{P_i/G} = \vec{a}_i - \vec{a}_G$$

as identidades acima podem ser reescritas na forma:

$$\sum_i m_i\vec{r}_{P_i/G} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i\vec{v}_{P_i/G} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i\vec{a}_{P_i/G} = \vec{0}$$

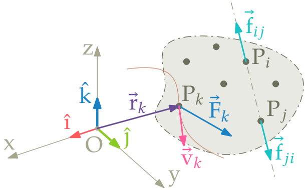
Teorema da Resultante (TR)

Da equação da Segunda Lei de Newton para cada partícula P_i:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \qquad (i = 1, \dots, n)$$

Somando as equações obtidas para todas as partículas do sistema:

$$\underbrace{\sum_i m_i \vec{a}_i}_{m\vec{a}_G} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i}_{\vec{R}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}}_{\dots + \vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} + \dots = \vec{0}}$$



obtemos a expressão do *Teorema da Resultante (TR)*:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}$$

Quantidade de movimento angular

A **quantidade de movimento angular** (ou **momento da quantidade de movimento**) do sistema $\mathcal{M}$ com respeito ao pólo A é definida como:

$$\vec{\mathrm{H}}_\mathrm{A} = \sum_i (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge m_i \vec{\mathrm{v}}_i$$

Tomando a derivada temporal de $\vec{\mathrm{H}}_\mathrm{A}$ no referencial inercial N:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{H}}_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \left[(\vec{\mathrm{v}}_i - \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{A}) \wedge m_i \vec{\mathrm{v}}_i + (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge m_i \vec{\mathrm{a}}_i\right] \\ &= -\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{A} \wedge \sum_i m_i \vec{\mathrm{v}}_i + \sum_i (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge m_i \vec{\mathrm{a}}_i\end{aligned}$$

de onde decorre a identidade:

$$\sum_i (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge m_i \vec{\mathrm{a}}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{H}}_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t} + \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{A} \wedge m \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{G}$$

Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

Da Segunda Lei de Newton para cada partícula P_i, sabe-se que:

$$(P_i - A) \wedge m_i \vec{a}_i = (P_i - A) \wedge \vec{F}_i + (P_i - A) \wedge \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Somando as equações obtidas para todas as partículas do sistema:

$$\underbrace{\sum_i (P_i - A) \wedge m_i \vec{a}_i}_{\frac{d\vec{H}_A}{dt} + \vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G} = \underbrace{\sum_i (P_i - A) \wedge \vec{F}_i}_{\vec{M}_A} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} (P_i - A) \wedge \vec{f}_{ij}}_{\ldots + \underbrace{(P_i - A) \wedge \vec{f}_{ij} + (P_j - A) \wedge \vec{f}_{ji}}_{\ldots + (P_i - P_j) \wedge \vec{f}_{ij} + \ldots = \vec{0}} + \ldots}$$

obtemos a expressão do *Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)* ou *Teorema do Momento da Quantidade de Movimento*:

$$\boxed{\frac{d\vec{H}_A}{dt} + \vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G = \vec{M}_A}$$

Potência, trabalho e energia potencial

Potência de uma força $\vec{\mathrm{F}}$ aplicada em um ponto material P com velocidade $\vec{\mathrm{v}}$ medida em um referencial inercial N:

$$P = \vec{\mathrm{F}} \cdot \vec{\mathrm{v}}$$

O **trabalho** de $\vec{\mathrm{F}}$ em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ neste contexto é definido a partir da integral:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\mathrm{F}} \cdot \vec{\mathrm{v}} \, \mathrm{d}t$$

Uma força $\vec{\mathrm{F}}$ é dita *conservativa* se existe uma função escalar V, tal que $\vec{\mathrm{F}} = -\nabla V$. A função V é denominada **energia potencial** e, a partir dela, o *trabalho da força conservativa* $\vec{\mathrm{F}}$ pode ser calculado como:

$$W = -\left[V\left(\vec{\mathrm{r}}(t_2)\right) - V\left(\vec{\mathrm{r}}(t_1)\right)\right] = -\Delta V$$

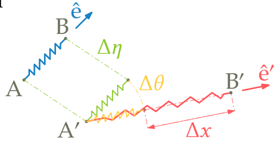
Energia potencial

Para o sistema de pontos $\mathcal{M} = \{P_k | k = 1, \ldots, n\}$, assumindo constante a aceleração da gravidade $\vec{g} = -g\,\hat{n}$, a *energia potencial gravitacional* é dada pela expressão:

$$V_g = \sum_i m_i g h_i = \sum_i m_i(\vec{r}_i \cdot \hat{n})g = m(\vec{r}_G \cdot \hat{n})\vec{g} \quad \Rightarrow \quad V_g = mgh_G$$

Para uma mola elástica linear de constante k, a *energia potencial elástica* é dada pela expressão:

$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$



onde:

- l é o comprimento instantâneo da mola;
- l_0 é o comprimento natural da mola relaxada (na ausência de forças sobre a mesma).
- $x = l - l_0$ é a elongação da mola.

Energia cinética

A **energia cinética** do sistema de pontos materiais $\mathcal{M}$ é definida como:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{\mathrm{v}}_i|^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{\mathrm{v}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i$$

A energia cinética satisfaz a seguinte identidade (*teorema de König*):

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{G}|^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{P}_i/\mathrm{G}}|^2$$

*De fato, como $\vec{\mathrm{v}}_i = \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{G} + \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{P}_i/\mathrm{G}}$, então:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{\mathrm{v}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right) \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{G} \cdot \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{G} + \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{G} \cdot \left(\sum_i m_i \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{P}_i/\mathrm{G}}\right) + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{P}_i/\mathrm{G}} \cdot \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{P}_i/\mathrm{G}}$$

Derivada temporal da energia cinética no referencial inercial N:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \vec{\mathrm{a}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i + \frac{1}{2} m_i \vec{\mathrm{v}}_i \cdot \vec{\mathrm{a}}_i\right) = \sum_i m_i \vec{\mathrm{a}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i$$

Teorema da Energia Cinética (TEC)

Da Segunda Lei de Newton para cada partícula P_i, sabe-se que:

$$m_i\vec{\mathrm{a}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i = \vec{\mathrm{F}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i + \sum_{j\neq i} \vec{\mathrm{f}}_{ij} \cdot \vec{\mathrm{v}}_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Somando as equações obtidas para todas as partículas do sistema:

$$\underbrace{\sum_i m_i\vec{\mathrm{a}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i}_{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}} = \underbrace{\sum_i \vec{\mathrm{F}}_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i}_{P^{\mathrm{ext}}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{\mathrm{f}}_{ij} \cdot \vec{\mathrm{v}}_i}_{\ldots + \underbrace{\vec{\mathrm{f}}_{ij} \cdot \vec{\mathrm{v}}_i + \vec{\mathrm{f}}_{ji} \cdot \vec{\mathrm{v}}_j}_{\ldots + \vec{\mathrm{f}}_{ij} \cdot (\vec{\mathrm{v}}_i - \vec{\mathrm{v}}_j) + \ldots = P^{\mathrm{int}}} + \ldots}$$

obtemos a expressão do *Teorema da Energia Cinética (TEC)*:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P^{\mathrm{ext}} + P^{\mathrm{int}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta T = W^{\mathrm{ext}} + W^{\mathrm{int}}$$

Em particular, se o sistema material $\mathcal{M}$ é um único corpo rígido, então $\forall \mathrm{P}_i, \mathrm{P}_j$:
$(\vec{\mathrm{v}}_i - \vec{\mathrm{v}}_j) \perp (\mathrm{P}_i - \mathrm{P}_j) \Rightarrow (\vec{\mathrm{v}}_i - \vec{\mathrm{v}}_j) \perp \vec{\mathrm{f}}_{ij}$ e, portanto, $P^{\mathrm{int}} = 0 \Rightarrow W^{\mathrm{int}} = 0$.

Energia mecânica: sistemas conservativos e não-conservativos

Há duas formas de expressar o trabalho total exercido sobre um sistema mecânico como uma soma de duas parcelas:

$$W = \underbrace{W^{\text{ext}}}_{\text{externos}} + \underbrace{W^{\text{int}}}_{\text{internos}} = \underbrace{-\Delta V}_{\text{conservativos}} + \underbrace{\tilde{W}}_{\text{não-conservativos}}$$

Adotando a classificação que separa os esforços em conservativos ou não-conservativos, o TEC pode ser reescrito como:

$$\Delta T = -\Delta V + \tilde{W} \quad \Rightarrow \quad \Delta T + \Delta V = \tilde{W} \quad \Rightarrow \quad \Delta E = \tilde{W}$$

onde a *energia mecânica E* do sistema é definida como:

$$E = T + V$$

Na ausência de esforços não-conservativos, tem-se um *sistema conservativo* para o qual vale:

$$\Delta E = 0$$

Perguntas?

reorsino@usp.br