PME 3100 • Mecânica I • Módulo 2.3

Movimento curvilíneo geral de um ponto
Triedro de Frenet

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Movimento curvilíneo geral de um ponto

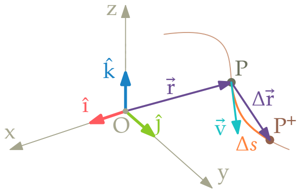
No *movimento curvilíneo de um ponto*, sempre que $\vec{v} \wedge \vec{a} \neq \vec{0}$, é possível definir um sistema de coordenadas local, com origem na posição instantânea P e base ortonormal $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$, que permite identificar *características intrínsecas* da trajetória como a posição do *centro de curvatura local* Q, o *raio de curvatura local* ρ e a *curvatura local* $\kappa = 1/\rho$.

Os vetores velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$ podem ser expressos como:

$$\begin{cases} \vec{v} = v\hat{t} \\ \vec{a} = a_t\hat{t} + a_n\hat{n} \end{cases} \quad \text{com} \quad a_t = \frac{dv}{dt} \quad \text{e} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = v^2\kappa \geq 0$$

Em um *movimento retilíneo*, $\vec{v}$ e $\vec{a}$ são paralelos ($a_n = 0$ e $\vec{v} \wedge \vec{a} = \vec{0}$). Caso $\vec{v} \wedge \vec{a} \neq \vec{0}$, o plano passante por P, definido pelas direções de $\vec{v}$ e $\vec{a}$ (ou seja, ortogonal a $\hat{b}$) é denominado *plano osculador*. Próximo a P a trajetória se aproxima de um arco de circunferência de centro Q e raio ρ contido no plano osculador.

Coordenada de comprimento de arco



A *coordenada de comprimento de arco s* para a trajetória de um ponto *em um referencial* S é definida em forma diferencial como:

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}| = \sqrt{\mathrm{d}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$$

Se $\vec{r}(t)$ for *diferenciável por trechos*, escolhendo um instante $t = t_0$ para corresponder à origem $s = 0$ da coordenada de comprimento de arco:

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

A variação Δs entre duas posições P e P^+ descreve a *distância percorrida* pela partícula em seu movimento neste trecho da trajetória, com:

$$\Delta s \geq |\Delta\vec{r}|$$

havendo *igualdade* apenas em trechos em que a trajetória seja *retilínea*.

Vetor velocidade, velocidade escalar e versor tangente

Definida a coordenada de comprimento de arco s, pode-se aplicar a *regra da cadeia* para o cálculo da velocidade da partícula em S:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{r}}{ds} = v\,\hat{t} \qquad \text{com} \qquad v = \frac{ds}{dt} \quad \text{e} \quad \hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

de onde se identificam as expressões:

- da *velocidade escalar v* do ponto P com respeito a S;
- do *versor tangente* $\hat{t}$ à trajetória de P em S.

Note que $\hat{t}$ é um versor uma vez que $|\hat{t}| = \dfrac{|d\vec{r}|}{ds} = 1$, da definição de s.

O *vetor velocidade* de uma partícula em um referencial S, quando não-nulo, será *tangente à trajetória* descrita pela partícula em S.

O *módulo da velocidade*, denominado *velocidade escalar*, corresponde à derivada temporal da respectiva *coordenada de comprimento de arco*.

Plano osculador, centro de curvatura e raio de curvatura

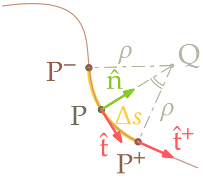
Tome três posições P, P^+ e P^- sobre a trajetória do ponto, tais que:

$$(P - O) = \vec{r}(s), \qquad (P^+ - O) = \vec{r}(s + \Delta s) \quad \text{e} \quad (P^- - O) = \vec{r}(s - \Delta s)$$

Considere que, para algum $\varepsilon > 0$, os pontos P, P^+ e P^- permanecem *não-colineares sempre que* $0 < \Delta s < \varepsilon$. Sendo P, P^+ e P^- não-colineares, *existe um único arco de circunferência* que contém estes três pontos.

No limite $\Delta s \to 0$, identificam-se:

- o *plano osculador local* associado à posição P como limite do plano definido por P^-, P e P^+;
- o *centro de curvatura local* Q como a posição limite do centro do arco de circunferência P^-PP^+;
- o *raio de curvatura local* ρ como a valor limite do raio do arco de circunferência P^-PP^+;
- a *curvatura local*: $\kappa = \dfrac{1}{\rho}$.



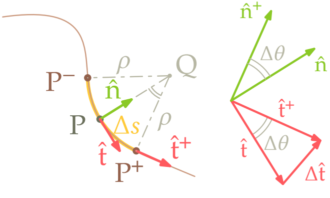
Versor normal e a derivada do versor tangente

Também no limite $\Delta s \to 0$, observa-se que:

- o arco de circunferência P^-PP^+ aproxima localmente a trajetória;
- os versores $\hat{t}$ e $\hat{t}^+$, respectivamente tangentes à trajetória em P e P^+, se tornam também tangentes a este arco de circunferência;
- o ângulo $P\hat{Q}P^+$ se aproxima do ângulo formado entre $\hat{t}$ e $\hat{t}^+$;

Da semelhança entre o triângulo PQP^+ e o triângulo que define a subtração vetorial $\Delta\hat{t} = \hat{t}^+ - \hat{t}$, no limite $\Delta s \to 0$:

$$\left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta\hat{t}|}{\Delta s} = \frac{|\hat{t}|}{\rho} = \frac{1}{\rho} = \kappa$$



de onde se conclui que:

$$\boxed{\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{n} = \kappa\hat{n}}$$

em que o *versor normal* $\hat{n}$ é definido pela direção da linha que une a posição P ao centro de curvatura local Q, i.e., $(Q - P) = \rho\hat{n}$.

Vetor aceleração e suas componentes instrínsecas

Aplicando a *regra do produto* e a *regra da cadeia* na diferenciação de $\vec{v} = v\hat{t}$, obtém-se a seguinte expressão para aceleração da partícula em S:

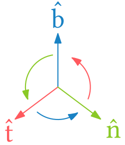
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{t}) = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{ds}{dt}\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}$$

Identificam-se, assim, as *componentes intrínsecas* do vetor aceleração:

- a *aceleração tangente* $a_t = \frac{dv}{dt}$ mede a variação da intensidade do vetor velocidade (é a derivada temporal da velocidade escalar v);
- a *aceleração normal* $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$ mede a variação temporal da direção do vetor velocidade.

Em trechos em que a trajetória for localmente retilínea, definimos uma curvatura local $\kappa = 0$, de tal forma que $a_n = 0$, garantindo que o vetor aceleração seja paralelo ao vetor velocidade. Em outras palavras, uma partícula descreve um *movimento localmente retilíneo* se, e somente se, $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \parallel \vec{a}$.

Versor binormal



O *versor binormal* $\hat{b}$ da trajetória de um ponto é o *versor ortogonal ao plano osculador local*, definido como:

$$\hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n}$$

A partir desta definição, observa-se que:

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = v\hat{t} \wedge \left(a_t\hat{t} + a_n\hat{n}\right) = v a_n \hat{b} = \frac{v^3}{\rho}\hat{b}$$

de onde se obtêm as seguintes expressões para o cálculo do *versor binormal* $\hat{b}$, da aceleração normal a_n e do raio de curvatura local ρ:

$$\hat{b} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{a}}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}, \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}{|\vec{v}|} \qquad \text{e} \qquad \rho = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}$$

Conclui-se portanto que, a base $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ e o plano osculador *existem* se, e somente se, $\vec{v} \wedge \vec{a} \neq \vec{0}$.

Movimento curvilíneo plano

Uma partícula descreve um *movimento curvilíneo plano* se sua trajetória em um dado referencial S estiver contida em um único plano.

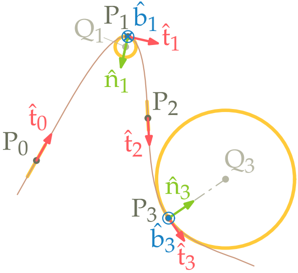
Neste caso, quando for possível definir o plano osculador local, ele coincidirá com o plano que contém a trajetória.

P_0 : está em um trecho retilíneo da trajetória, de tal forma que $\vec{v}$ e $\vec{a}$ são paralelos, não sendo possível definir $\hat{n}_0$, $\hat{b}_0$ e o plano osculador.

P_1 : localiza-se em um trecho de elevada curvatura (pequeno raio de curvatura); a orientação de $\hat{b}_1$ é para "dentro" do plano.

P_2 : ponto de *inflexão*, em que $\vec{v} \wedge \vec{a} = \vec{0}$, não sendo possível definir $\hat{n}_2$, $\hat{b}_2$ e o plano osculador.

P_3 : localiza-se em um trecho de baixa curvatura; a orientação de $\hat{b}_3$ é para "fora" do plano.

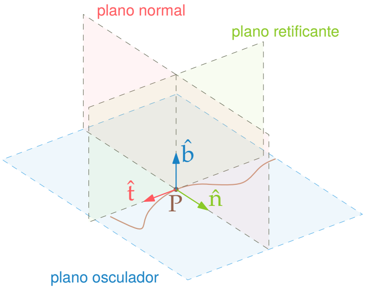


Triedro de Frenet

O **triedro de Frenet** (*Jean Frédéric Frenet, 1816 – 1900*) associado à posição P de um ponto sobre sua trajetória é definido a partir da base ortornormal positiva $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ constituída pelos versores tangente, normal e binormal locais.

Três planos mutualmente ortogonais, que se interceptam em P caracterizam o triedro de Frenet associado a esta posição:

- *Plano osculador:* definido pelos eixos $P\hat{t}$ e $P\hat{n}$, ortogonal a $\hat{b}$.
- *Plano normal:* definido pelos eixos $P\hat{n}$ e $P\hat{b}$, ortogonal a $\hat{t}$.
- *Plano retificante:* definido pelos eixos $P\hat{b}$ e $P\hat{t}$, ortogonal a $\hat{n}$.



Obtenção da base $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ e das componentes intrínsecas de $\vec{v}$ e $\vec{a}$

Sendo conhecidos, em uma dada posição P, os vetores velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$ de uma partícula, expressos em uma base qualquer, a base $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ local e as respectivas componentes intrínsecas de $\vec{v}$ e $\vec{a}$ podem ser obtidas via:

PROCEDIMENTO A

① $v = |\vec{v}|$

② $\hat{t} = \dfrac{\vec{v}}{v}$

③ $a_t = \vec{a} \cdot \hat{t}$

④ $a_n = |\vec{a} - a_t\hat{t}|$

⑤ $\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$

⑥ $\hat{n} = \dfrac{\vec{a} - a_t\hat{t}}{a_n}$

⑦ $\hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n}$

PROCEDIMENTO B

① $v = |\vec{v}|$

② $\hat{t} = \dfrac{\vec{v}}{v}$

③ $\hat{b} = \dfrac{\vec{v} \wedge \vec{a}}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}$

④ $\hat{n} = \hat{b} \wedge \hat{t}$

⑤ $a_t = \vec{a} \cdot \hat{t}$

⑥ $a_n = \vec{a} \cdot \hat{n}$

⑦ $\rho = \dfrac{v^2}{a_n}$

Fórmulas de Frenet-Serret

Objetivo: obter as expressões de $\hat{t}'$, $\hat{n}'$ e $\hat{b}'$, com $(\cdot)' = \dfrac{d(\cdot)}{ds}$, em termos de suas componentes intrínsecas, expressas na própria base $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$.
A primeira relação, que fornece $\hat{t}'$ já é conhecida:

$$\hat{t}' = \frac{1}{\rho}\,\hat{n} = \kappa\,\hat{n}$$

Note que $\hat{t}'$ é, portanto, ortogonal a $\hat{t}$. De forma mais geral, *qualquer versor $\hat{u}$ é ortogonal à sua derivada*:

$$\hat{u}\cdot\hat{u} = 1 \quad\Rightarrow\quad \hat{u}'\cdot\hat{u} + \hat{u}\cdot\hat{u}' = 0 \quad\Rightarrow\quad \hat{u}'\cdot\hat{u} = 0$$

Assim, $\hat{t}'$, $\hat{n}'$ e $\hat{b}'$ devem ser ortogonais a $\hat{t}$, $\hat{n}$ e $\hat{b}$, respectivamente.
Além disso, considerando que $\hat{t}$ é ortogonal tanto a $\hat{n}$ quanto a $\hat{b}$:

$$\hat{t}\cdot\hat{n} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{t}'\cdot\hat{n} + \hat{t}\cdot\hat{n}' = 0 \;\Rightarrow\; \kappa\hat{n}\cdot\hat{n} + \hat{t}\cdot\hat{n}' = 0 \;\Rightarrow\; \hat{n}'\cdot\hat{t} = -\kappa$$

$$\hat{t}\cdot\hat{b} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{t}'\cdot\hat{b} + \hat{t}\cdot\hat{b}' = 0 \;\Rightarrow\; \kappa\hat{n}\cdot\hat{b} + \hat{t}\cdot\hat{b}' = 0 \;\Rightarrow\; \hat{b}'\cdot\hat{t} = 0$$

Fórmulas de Frenet-Serret

Sendo $\hat{b}'$ mutualmente ortogonal a $\hat{t}$ e $\hat{b}$, conclui-se que este vetor deve ser paralelo a $\hat{n}$. De fato, existe uma constante τ, denominada *torção* local da trajetória de P tal que:

$$\hat{b}' = -\tau\,\hat{n}$$

Também:

$$\hat{b} \cdot \hat{n} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{b}' \cdot \hat{n} + \hat{b} \cdot \hat{n}' = 0 \;\Rightarrow\; -\tau\hat{n} \cdot \hat{n} + \hat{b} \cdot \hat{n}' = 0 \;\Rightarrow\; \hat{n}' \cdot \hat{b} = \tau$$

Assim, as *fórmulas de Frenet-Serret* podem ser escritas como se segue:

$$\begin{cases} \hat{t}' = \kappa\,\hat{n} \\ \hat{n}' = -\kappa\,\hat{t} + \tau\,\hat{b} \\ \hat{b}' = -\tau\,\hat{n} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} \hat{t}' \\ \hat{n}' \\ \hat{b}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t} \\ \hat{n} \\ \hat{b} \end{bmatrix}$$

De forma compacta, é possível definir um único vetor $\vec{\xi}$ tal que:

$$\vec{\xi} = \tau\,\hat{t} + \kappa\,\hat{b} \quad\Rightarrow\quad \hat{t}' = \vec{\xi} \wedge \hat{t}, \quad \hat{n}' = \vec{\xi} \wedge \hat{n}, \quad \hat{b}' = \vec{\xi} \wedge \hat{b}$$

Perguntas?

reorsino@usp.br