# PME 3100 • Mecânica I • Módulo 2.2

## Movimento geral de um corpo rígido
## Campos de velocidades e acelerações
## Composição de movimentos

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

# Campos de velocidades e acelerações de um corpo rígido

Considerando uma base ortonormal positiva $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ *solidária a um corpo rígido*, pode-se afirmar que *existe um único* **vetor rotação** $\vec{\omega}$ tal que as derivadas destes versores em um referencial S podem ser expressas como:

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{\imath} \qquad \frac{d\hat{\jmath}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{\jmath} \qquad \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{k}$$

Dados dois pontos P e Q quaisquer *solidários um mesmo corpo rígido* e sendo conhecidos o **vetor rotação** $\vec{\omega}$ e o **vetor aceleração rotacional** $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ deste corpo em um *referencial* S, as *velocidades e acelerações instantâneas* destes pontos *em* S são relacionadas pelas equações:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (P - Q)$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \vec{\alpha} \wedge (P - Q) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - Q)]$$

# Composição de movimentos

Admitindo conhecidos:

- o movimento que um ponto P ou um corpo rígido B descreve em relação um *referencial auxiliar* A – *movimento relativo*;
- o movimento que corpos ou pontos solidários a A descrevem em relação ao *referencial principal* S – *mov. de arrastamento*;

descrever o movimento do ponto P ou do corpo rígido B em relação ao referencial principal S.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P,arr} + \vec{v}_{P,rel}$$

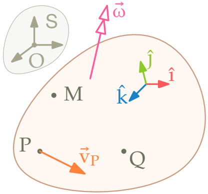
$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,Cor} + \vec{a}_{P,rel} \quad \text{com} \quad \vec{a}_{P,Cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel}$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel}$$

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel}$$

# Movimento geral de um corpo rígido

Para obter uma expressão geral para o *campo de velocidades* em um movimento geral de corpo rígido, adote-se uma base ortonormal positiva $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ *solidária ao corpo*, *não ao referencial* S. Assim, sendo P e Q dois pontos solidários a este corpo rígido:




$$\vec{p} = (P - Q) = (\vec{p} \cdot \hat{\imath})\hat{\imath} + (\vec{p} \cdot \hat{\jmath})\hat{\jmath} + (\vec{p} \cdot \hat{k})\hat{k}$$

Da preservação de ângulos entre direções quaisquer solidárias ao corpo, o ângulo $\varphi_x$ definido entre $\vec{p}$ e $\hat{\imath}$ permanece constante. Ainda, como $|\vec{p}| = l$ (constante) e $|\hat{\imath}| = 1$:

$$\vec{p} \cdot \hat{\imath} = |\vec{p}||\hat{\imath}| \cos \varphi_x = l \cos \varphi_x \implies \frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \hat{\imath}) = 0$$

Demonstra-se, analogamente, que $(\vec{p} \cdot \hat{\jmath})$ e $(\vec{p} \cdot \hat{k})$ são constantes quaisquer sejam os pontos P e Q solidários a esse corpo rígido.

# Vetor rotação e o movimento geral de um corpo rígido

Por outro lado, como a base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ é *solidária ao corpo*, *não ao referencial* S, é necessário calcular as derivadas de cada um dos versores em S. Derivando as relações de ortonormalidade:

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\imath} \cdot \hat{\imath}) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\hat{\imath}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\imath} = 0$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath}) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\hat{\imath}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\jmath} = -\frac{\mathrm{d}\hat{\jmath}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\imath}$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{k} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\imath} \cdot \hat{k}) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}\hat{\imath}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{k} = -\frac{\mathrm{d}\hat{k}}{\mathrm{d}t} \cdot \hat{\imath}$$

se conclui que:

- a componente $\hat{\imath}$ de $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\imath}}{\mathrm{d}t}$ é nula;
- a componente $\hat{\jmath}$ de $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\imath}}{\mathrm{d}t}$ é o oposto da componente $\hat{\imath}$ de $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\jmath}}{\mathrm{d}t}$;
- a componente $\hat{k}$ de $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\imath}}{\mathrm{d}t}$ é o oposto da componente $\hat{\imath}$ de $\dfrac{\mathrm{d}\hat{k}}{\mathrm{d}t}$.

# Vetor rotação e o movimento geral de um corpo rígido

De forma análoga, demonstra-se que:

$$\frac{d\hat{\jmath}}{dt}\cdot\hat{\jmath}=0,\qquad \frac{d\hat{k}}{dt}\cdot\hat{k}=0,\qquad \frac{d\hat{\jmath}}{dt}\cdot\hat{k}=-\frac{d\hat{k}}{dt}\cdot\hat{\jmath}$$

Conclui-se que as derivadas temporais dos versores da base $(\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k})$ podem ser descritas por de três parâmetros independentes $\omega_x$, $\omega_y$ e $\omega_z$:

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt}=\omega_z\hat{\jmath}-\omega_y\hat{k}\qquad \frac{d\hat{\jmath}}{dt}=-\omega_z\hat{\imath}+\omega_x\hat{k}\qquad \frac{d\hat{k}}{dt}=\omega_y\hat{\imath}-\omega_x\hat{\jmath}$$

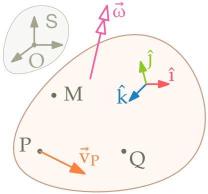
Definindo, portanto, o **vetor rotação** ou **vetor velocidade angular** do corpo rígido em S como:

$$\vec{\omega}=\omega_x\hat{\imath}+\omega_y\hat{\jmath}+\omega_z\hat{k}$$

verifica-se que, para a base $(\hat{\imath},\hat{\jmath},\hat{k})$ *solidária ao corpo rígido*:

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\hat{\imath}\qquad \frac{d\hat{\jmath}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\hat{\jmath}\qquad \frac{d\hat{k}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\hat{k}$$

# Vetor rotação e o movimento geral de um corpo rígido




O vetor rotação é *único* para um dado corpo rígido em um dado instante de tempo. De fato, suponha que exista outro vetor $\vec{\omega}'$ tal que:

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \vec{\omega}' \wedge \hat{\imath} \qquad \frac{d\hat{\jmath}}{dt} = \vec{\omega}' \wedge \hat{\jmath} \qquad \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega}' \wedge \hat{k}$$

Neste caso, teríamos:

$$(\vec{\omega}' - \vec{\omega}) \wedge \hat{\imath} = \vec{0} \qquad (\vec{\omega}' - \vec{\omega}) \wedge \hat{\jmath} = \vec{0} \qquad (\vec{\omega}' - \vec{\omega}) \wedge \hat{k} = \vec{0}$$

Tais equações serão verdadeiras, se e somente se, $\vec{\omega}' - \vec{\omega} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\omega}' = \vec{\omega}$. Dessa forma quaisquer sejam os pontos P e Q solidários ao corpo:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{P/Q} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q = \frac{d}{dt}(P - Q) &= (\vec{p} \cdot \hat{\imath})\frac{d\hat{\imath}}{dt} + (\vec{p} \cdot \hat{\jmath})\frac{d\hat{\jmath}}{dt} + (\vec{p} \cdot \hat{k})\frac{d\hat{k}}{dt} \\
&= (\vec{p} \cdot \hat{\imath})(\vec{\omega} \wedge \hat{\imath}) + (\vec{p} \cdot \hat{\jmath})(\vec{\omega} \wedge \hat{\jmath}) + (\vec{p} \cdot \hat{k})(\vec{\omega} \wedge \hat{k}) \\
&= \vec{\omega} \wedge (P - Q)
\end{aligned}$$

# Campo de velocidades de um corpo rígido – propriedades

Três propriedades fundamentais do **campo de velocidades** de um corpo rígido decorrem imediatamente da equação:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (P - Q)$$

**P1** São idênticas as componentes das velocidades de dois pontos quaisquer do corpo sobre a direção da reta definida por eles:

$$\vec{v}_P \cdot (P - Q) = \vec{v}_Q \cdot (P - Q)$$

**P2** São idênticas as componentes das velocidades de dois pontos quaisquer do corpo sobre a direção definida por seu vetor rotação:

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_Q \cdot \vec{\omega} = i$$

**P3** Retas paralelas ao vetor rotação definem os lugares geométricos de pontos do corpo que têm, instantaneamente, a mesma velocidade:

$$(P - Q) \parallel \vec{\omega} \;\Rightarrow\; \vec{v}_P = \vec{v}_Q$$

# *Eixo helicoidal instantâneo (EHI)

Considere $\vec{\omega} = \omega\hat{e}$, com $\omega \neq 0$ e $\hat{e}$ sendo um versor. A velocidade $\vec{v}_P$ de um ponto qualquer solidário ao corpo pode ser escrita como a soma de duas componentes ortogonais entre si, $\vec{v}_P = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{P,\perp}$, com:

$$\vec{v}_{\parallel} = (\vec{v}_P \cdot \hat{e})\hat{e} = (\vec{v}_P \cdot \vec{\omega})\frac{\vec{\omega}}{\omega^2} = \frac{i}{\omega^2}\vec{\omega}$$

$$\vec{v}_{P,\perp} = -\hat{e} \wedge (\hat{e} \wedge \vec{v}_P) = -\frac{\vec{\omega}}{\omega^2} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P)$$

Note que:

- $\vec{v}_{\parallel}$ tem o mesmo valor para todos os pontos do campo de velocidades deste corpo (independe do ponto P escolhido).
- Apenas a parcela ortogonal a $\vec{\omega}$ da velocidade de P, $\vec{v}_{P,\perp}$, depende da posição deste ponto.

Define-se o **eixo helicoidal instantâneo** (EHI) como sendo o lugar geométrico dos pontos E tais que $\vec{v}_{E,\perp} = \vec{0}$ e, portanto, $\vec{v}_E = \vec{v}_{\parallel}$.

# *Eixo helicoidal instantâneo (EHI)

Seja E um ponto do eixo helicoidal instantâneo:

$$\vec{v}_E = \vec{v}_P + \vec{\omega} \wedge (E - P) = \vec{v}_{\parallel}$$

O vetor posição (E − P) também pode ser decomposto em uma componente paralela a $\vec{\omega}$ e outra a ele ortogonal:

$$(E - P) = -\frac{\vec{\omega}}{\omega^2} \wedge [\vec{\omega} \wedge (E - P)] + \lambda\vec{\omega} = -\frac{\vec{\omega}}{\omega^2} \wedge (\vec{v}_{\parallel} - \vec{v}_P) + \lambda\vec{\omega}$$

o que leva à equação que define o eixo helicoidal instantâneo:

$$E = P + \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_P}{|\vec{\omega}|^2} + \lambda\vec{\omega} \quad \text{para} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, se $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, o movimento instantâneo de um corpo rígido é equivalente a um *movimento helicoidal*, podendo sempre ser descrito pela composição de uma rotação pura em torno do EHI, definida por $\vec{\omega}$, com uma translação paralela ao mesmo, definida por $\vec{v}_{\parallel}$.

# Classes de movimento de corpo rígido

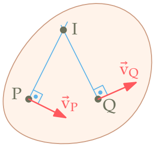
❶ $\vec{\omega} = \vec{0}$ e $\vec{v}_P = \vec{0}$ : corpo instantaneamente em *repouso*.

❷ $\vec{\omega} = \vec{0}$ e $\vec{v}_P \neq \vec{0}$ : movimento instantâneo de *translação*.

❸ $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ e $i = \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0$ : movimento instantâneo de *rotação* em torno do EHI (neste caso, denominado *eixo de rotação instantânea* ou ERI).

❹ $\vec{\omega} \neq \vec{0}$ e $i = \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \neq 0$ : movimento *helicoidal* instantâneo, composto de uma translação na direção do EHI e uma rotação em torno dele.

Em um *movimento plano de corpo rígido*, $\vec{\omega}$ é ortogonal ao plano e, portanto, $i = 0$. Assim, se $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, o movimento plano é equivalente a uma rotação pura. O CIR corresponde, portanto, à intersecção do ERI com o plano de movimento.



# Campo de acelerações de um corpo rígido

O **vetor aceleração angular/rotacional** do corpo rígido em S é:

$$\vec{\alpha} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

Recordando que $\vec{v}_{P/Q} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P - Q) = \vec{\omega} \wedge (P - Q)$:

$$\vec{a}_{P/Q} = \vec{a}_P - \vec{a}_Q = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t}(P - Q) = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \wedge (P - Q) + \vec{\omega} \wedge \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(P - Q)$$

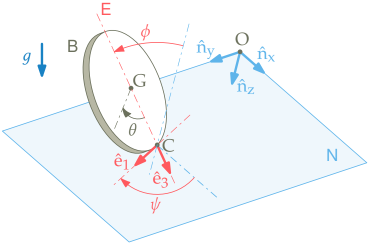
de onde se obtém a equação que descreve o *campo de acelerações de um corpo rígido* em movimento geral:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \vec{\alpha} \wedge (P - Q) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - Q)]$$

No caso particular de um *movimento plano*, $\vec{\omega} \perp (P - Q)$, de onde decorre que $\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - Q)] = -\omega^2 (P - Q)$, com $\omega = |\vec{\omega}|$, como mostrado no módulo 2.1.

# Motivação

Quando a descrição do movimento de um ponto P ou de um corpo B em um referencial S é complexa, é usual a utilização de um *referencial auxiliar* A, *móvel* em S, e com respeito ao qual a descrição do movimento analisado se torna mais simples.



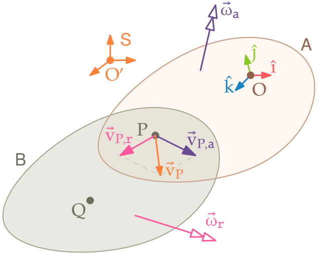

Na versão tridimensional do problema de um disco de bordo fino B que pode *rolar sem escorregar* sobre um plano fixo N, a descrição da orientação de B em si já é um problema complexo, que pode ser simplificado pela definição de um *referencial auxiliar* E, definido pela intersecção de duas retas ortogonais entre si:

- a primeira contida no plano N e tangente ao bordo do disco – direção $\hat{e}_1$;
- a segunda passante pelos pontos C (contato) e G (centro) – direção $\hat{e}_3$.

No referencial E, o movimento do disco é idêntico à versão 2D do problema, sendo parametrizado por um único *ângulo de orientação* $\theta$. Os ângulos $\psi$, entre $\hat{e}_1$ e $\hat{n}_x$, e $\phi$, entre $\hat{e}_3$ e $\hat{n}_z$, definem a *orientação* de E em S.

# Definições

- S: referencial principal;
- A: referencial auxiliar;
- $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$: base de vetores solidária a A;
- $\vec{\omega}_{arr}$: *velocidade angular de arrastamento* – mede a rotação de A com respeito a S;
- O: ponto solidário ao referencial A.




**Problema:** sendo conhecido o movimento de um ponto P em A, obter uma descrição do movimento de P em S.

Como mostrado na seção 2 deste módulo, sabemos que as derivadas temporais dos versores $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ em S são dadas por:

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \hat{\imath} \qquad \frac{d\hat{\jmath}}{dt} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \hat{\jmath} \qquad \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \hat{k}$$

## Composição de velocidades

Considere o vetor posição $\vec{r}_{P/O} = (P - O) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. Tomando sua derivada temporal em S, obtém-se:

$$\vec{v}_{P/O} = \vec{v}_P - \vec{v}_O = \frac{d}{dt}(P - O) = x\frac{d\hat{\imath}}{dt} + y\frac{d\hat{\jmath}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} + \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_O + \vec{\omega}_{arr} \wedge (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})}_{\vec{v}_{P,arr}} + \underbrace{\frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}}_{\vec{v}_{P,rel}}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P,arr} + \vec{v}_{P,rel}$$

- $\vec{v}_{P,arr}$: *velocidade de arrastamento* de P – velocidade, medida em S, que o ponto P *teria caso fosse solidário ao referencial auxiliar* A:

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)$$

- $\vec{v}_{P,rel}$: *velocidade relativa* de P – velocidade de P em relação a A, ou seja, *supondo fixo o referencial auxiliar* A.

# Composição de acelerações

Tomando a derivada temporal em S da identidade:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \underbrace{\vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)}_{①} + \underbrace{\frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}}_{②}$$

obtêm-se para os termos ① e ②:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}① &= \frac{d\vec{\omega}_{arr}}{dt} \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge \frac{d}{dt}(P - O) \\ &= \vec{\alpha}_{arr} \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge \left[\vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O) + \vec{v}_{P,rel}\right] \\ \frac{d}{dt}② &= \frac{dx}{dt}\frac{d\hat{\imath}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\hat{\jmath}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\hat{k}}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \\ &= \vec{\omega}_{arr} \wedge \underbrace{\left(\frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\right)}_{\vec{v}_{P,rel}} + \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}}_{\vec{a}_{P,rel}}\end{aligned}$$

# Composição de acelerações

De onde resulta a lei de composição de acelerações:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,Cor} + \vec{a}_{P,rel}$$

- $\vec{a}_{P,arr}$: *aceleração de arrastamento* de P – aceleração, medida em S, que o ponto P *teria caso fosse solidário ao referencial auxiliar* A:

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_{arr} \wedge (P - O) + \vec{\omega}_{arr} \wedge [\vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O)]$$

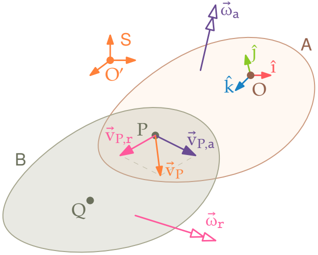
  $\vec{a}_{P,Cor}$: *aceleração complementar ou de Coriolis* de P – termo associado ao efeito da rotação do referencial auxiliar A com respeito a S:

$$\vec{a}_{P,Cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel}$$

- $\vec{a}_{P,rel}$: *aceleração relativa* de P – aceleração de P em relação a A, ou seja, *supondo fixo o referencial auxiliar* A.

# Definições

- S: referencial principal;
- A: referencial auxiliar;
- $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$: base de vetores solidária a A;
- $\vec{\omega}_{arr}$: *velocidade angular de arrastamento* – mede a rotação de A com respeito a S;
- P, Q: pontos solidários ao corpo B.




**Problema:** sendo conhecido movimento que um corpo rígido B descreve em relação a A, incluindo as expressões dos vetores velocidade angular $\vec{\omega}_{rel}$ e aceleração angular $\vec{\alpha}_{rel}$, obter uma descrição do o movimento de B em S.

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \hat{\imath} \qquad \frac{d\hat{\jmath}}{dt} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \hat{\jmath} \qquad \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega}_{arr} \wedge \hat{k}$$

# Composição de velocidades angulares

Das equações de campo de velocidade que descrevem o movimento de B com respeito ao referencial absoluto S e ao referencial auxiliar A:

$$\vec{v}_P - \vec{v}_Q = \vec{\omega} \wedge (P - Q) \quad ❶$$

$$\vec{v}_{P,rel} - \vec{v}_{Q,rel} = \vec{\omega}_{rel} \wedge (P - Q) \quad ❷$$

Além disso, da lei de composição de velocidades para P e Q:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O) + \vec{v}_{P,rel} \quad ❸$$

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_O + \vec{\omega}_{arr} \wedge (Q - O) + \vec{v}_{Q,rel} \quad ❹$$

Da diferença entre as equações ❸ e ❹, substituindo ❶ e ❷, decorre:

$$\vec{\omega} \wedge (P - Q) = \vec{\omega}_{arr} \wedge (P - Q) + \vec{\omega}_{rel} \wedge (P - Q)$$

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}_{arr} - \vec{\omega}_{rel}) \wedge (P - Q) = \vec{0}$$

Sendo a escolha dos pontos P e Q arbitrária, conclui-se que:

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel}}$$

# Derivadas de vetores calculadas em referenciais distintos

- Vimos no módulo 2.1 que *a derivada de um vetor depende do referencial* adotado. Versores somente podem ser tratados como *"constantes"* na diferenciação se a base em questão for *solidária ao referencial*.
- Em todo o texto até aqui, o símbolo $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, quando *aplicado a um vetor*, denotou uma *derivada em* S (referencial principal).
- Em um contexto em que seja necessário realizar derivadas de um vetor $\vec{u}$ com respeito a referenciais distintos, é conveniente usar uma *notação explícita*: $\frac{\mathrm{d}_\mathsf{S}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$ ou $\frac{\mathrm{d}_\mathsf{A}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$.

Considerando a expressão de um vetor genérico $\vec{u} = u_x\hat{\imath} + u_y\hat{\jmath} + u_z\hat{k}$ em termos de suas componentes na base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, solidária a A, temos:

$$\frac{\mathrm{d}_\mathsf{S}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\hat{k} + u_x(\vec{\omega}_{\mathrm{arr}} \wedge \hat{\imath}) + u_y(\vec{\omega}_{\mathrm{arr}} \wedge \hat{\jmath}) + u_z(\vec{\omega}_{\mathrm{arr}} \wedge \hat{k})$$

$$\frac{\mathrm{d}_\mathsf{A}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

# Derivadas de vetores calculadas em referenciais distintos

Obtemos assim, a equação que relaciona as derivadas de um vetor $\vec{u}$ genérico em S (referencial principal) e A (referencial auxiliar):

$$\frac{d_S\vec{u}}{dt} = \frac{d_A\vec{u}}{dt} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{u}$$

Esta equação é particularmente útil para o problema de *composição de acelerações angulares*. Considerando que a *velocidade angular de arrastamento* mede a rotação de A *com respeito a* S e a *velocidade angular relativa* mede a rotação de B *com respeito a* A, as respectivas acelerações angulares são definidas a partir das seguintes derivadas:

$$\vec{\alpha}_{arr} = \frac{d_S\vec{\omega}_{arr}}{dt} \qquad \vec{\alpha}_{rel} = \frac{d_A\vec{\omega}_{rel}}{dt}$$

Assim, tomando a derivada da equação $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel}$ em S:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel}$$

Perguntas?

reorsino@usp.br