PME 3100 • Mecânica I • Módulo 2.1

Referencial, posição, velocidade, aceleração
Cinemática do ponto: movimento retilíneo e circular
Movimento plano de corpo rígido

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Referencial, posição, velocidade e aceleração

Um **referencial** S é um conjunto de pontos cujas distâncias relativas permanecem *constantes* e que contenha, no mínimo:

- *três pontos não-colineares*, em um problema espacial (3D);
- *dois pontos distintos*, em um problema plano (2D).

A *trajetória de* P *em* S é a curva descrita pelo *vetor posição* $\vec{r}(t)$ em um *sistema de coordenadas solidário* ao referencial S (origem fixa em S).

A definição da *derivada de um vetor depende do referencial* S adotado. Versores somente podem ser tratados como "constantes" na diferenciação se a base em questão for *solidária* a S. Os vetores de **velocidade** e **aceleração** *de um ponto* P *em um referencial* S são:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(P - O) \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(P - O)$$

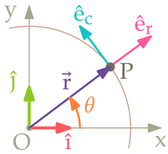
Cinemática do ponto e do corpo rígido

Em um **movimento retilíneo**, tanto a *velocidade* quanto a *aceleração* do ponto são *vetores paralelos* ao versor diretor da reta.

Em um **movimento circular** de centro O e raio r, os vetores *velocidade* e *aceleração* são:

$$\vec{v} = r\omega\hat{e}_c$$

$$\vec{a} = r\alpha\hat{e}_c - r\omega^2\hat{e}_r$$



Um sistema descreve um **movimento de corpo rígido** se *qualquer* par de pontos neste sistema *preservar constante sua distância relativa*. Dados dois pontos P e Q quaisquer solidários a um corpo rígido, os vetores de *posição relativa*, (P−Q), e *velocidade relativa*, $\vec{v}_{P/Q} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q$, são ortogonais entre si, conforme a *equação característica*:

$$\vec{v}_{P/Q} \cdot (P - Q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_P \cdot (P - Q) = \vec{v}_Q \cdot (P - Q)$$

Movimento plano de corpo rígido

Para pontos P e Q *quaisquer*, *solidários a um corpo rígido em movimento plano*, em um *dado instante de tempo*, valem as relações:

$$\vec{v}_{P/Q} = \vec{\omega} \wedge (P - Q) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (P - Q)$$

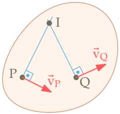
$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \vec{\alpha} \wedge (P - Q) - \omega^2 (P - Q) \quad \text{com} \quad \omega = |\vec{\omega}|$$

na qual os vetores $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$ são *únicos para o corpo* (i.e., independem do par de pontos escolhido) e *ortogonais* ao plano de movimento.

Para um corpo rígido em *movimento plano que não seja uma translação instantânea*, existe um ponto I em seu campo de velocidades, denominado *centro instantâneo de rotação (CIR)*, com $\vec{v}_I = \vec{0}$.

Para um ponto P do corpo, $|\vec{v}_P|$ é *diretamente proporcional* à sua distância ao CIR:

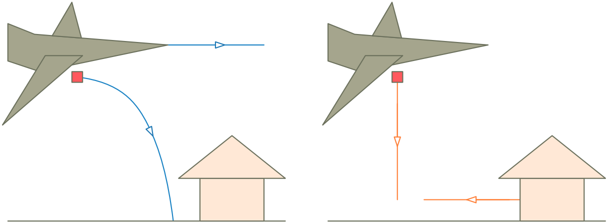
$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - I) \;\Rightarrow\; |\vec{v}_P| = |\vec{\omega}||P - I|$$



Necessidade de se definir um referencial

Toda grandeza associada à descrição de algum movimento deve ser medida com respeito a um *referencial*. A própria identificação da geometria de uma *trajetória depende do referencial adotado*.

Considere, por exemplo, um avião lançando uma caixa de mantimentos próximo ao galpão de uma missão humanitária, como esboçado na figura abaixo. A trajetória do pacote difere quando medida por um observador no galpão e por outro no avião.



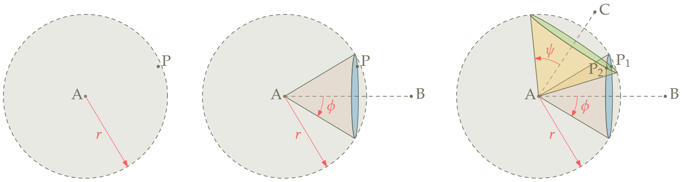
(a) Referencial no galpão (b) Referencial do avião

Definição de um referencial

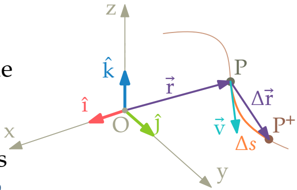
Um **referencial** S é um conjunto de pontos cujas distâncias relativas permanecem *constantes* e que contenha, no mínimo:

- *três pontos não-colineares*, em um problema espacial (3D);
- *dois pontos distintos*, em um problema plano (2D).

Abaixo vemos um exemplo em que se tenta monotorar a posição de um ponto P no espaço a partir de um, dois ou três pontos de observação. Apenas no último cenário, com *três medidas independentes*, é possível detectar variações na posição de P sem qualquer ambiguidade. O trio de pontos A, B e C define um referencial.



Trajetória de um ponto em um referencial



Seja um referencial S munido de um sistema de coordenadas Oxyz, de base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$.
A *posição* de um ponto P genérico no espaço pode ser definida a partir de suas coordenadas cartesianas (x, y, z), *componentes do vetor posição* $\vec{r} = (P - O)$ na base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$:

$$\vec{r}(t) = (P - O) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k} \quad \Leftrightarrow \quad P = (x(t), y(t), z(t))$$

Se as coordenadas (x, y, z) permanecem *constantes* no tempo, P é um *ponto solidário* ao referencial S. *Caso contrário*, P descreve um *movimento* com respeito a este referencial.

A *trajetória de* P *em* S é a curva descrita pela função $\vec{r}(t)$, parametrizada em t.

Derivada de um vetor em um referencial, velocidade e aceleração

A *derivada de um vetor* $\vec{r}$ *em um referencial* S é o vetor cujas componentes em uma base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, *solidária a* S, são respectivamente as derivadas das componentes do próprio $\vec{r}$ nesta base, ou seja:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

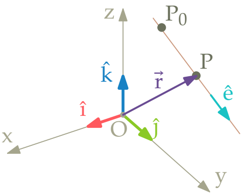
Em outras palavras, *a derivada de um vetor depende do referencial* adotado. Versores somente podem ser tratados como "constantes" na diferenciação se a base em questão for solidária ao referencial.

Os vetores de **velocidade** e **aceleração** *de um ponto* P *em um referencial* S são, respectivamente, a primeira e segunda *derivadas temporais do vetor posição em* S:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(P - O) \qquad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(P - O)$$

Movimento retilíneo

Um ponto P descreve um movimento retilíneo em um dado referencial S se, e somente se, existe um versor $\hat{e}$ tal que sua trajetória possa ser descrita a partir da expressão:



$$\vec{r}(t) = (P - O) = (P_0 - O) + s(t)\hat{e}$$

$$\Leftrightarrow \quad P = (x_0 + e_x s(t), y_0 + e_y s(t), z_0 + e_z s(t))$$

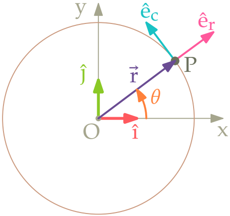
com P_0 sendo uma posição ocupada por P (ou seja, um ponto em sua trajetória).

Em um **movimento retilíneo**, tanto a *velocidade* quanto a *aceleração* são *vetores paralelos ao versor diretor* $\hat{e}$ da trajetória:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\hat{e} \qquad \vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2}\hat{e}$$

Movimento circular

Para a descrição do movimento circular de uma partícula, adotemos, por simplicidade um sistema de coordenadas Oxyz de base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, solidário ao referencial S de interesse, tal que a circunferência tenha centro O e esteja contida no plano Oxy:

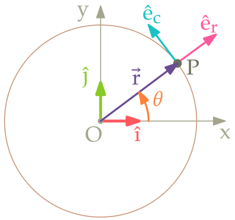


$$\vec{r}(t) = (P - O) = r(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}) = r\hat{e}_r$$

A base $(\hat{e}_r, \hat{e}_c, \hat{k})$ do sistema de coordenadas cilíndrico, *não-solidário a* S, simplifica a descrição das expressões vetoriais. Em particular, note que:

$$\begin{cases} \hat{e}_r = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath} \\ \hat{e}_c = -\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta}(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}) = \dot{\theta}\hat{e}_c = \dot{\theta}\hat{k} \wedge \hat{e}_r \\ \dfrac{d\hat{e}_c}{dt} = \dot{\theta}(-\cos\theta\hat{\imath} - \sin\theta\hat{\jmath}) = -\dot{\theta}\hat{e}_r = \dot{\theta}\hat{k} \wedge \hat{e}_c \end{cases}$$

Movimento circular



Assim, temos:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r) = r\dot{\theta}\hat{e}_c$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}\hat{e}_c) = r\ddot{\theta}\hat{e}_c - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$

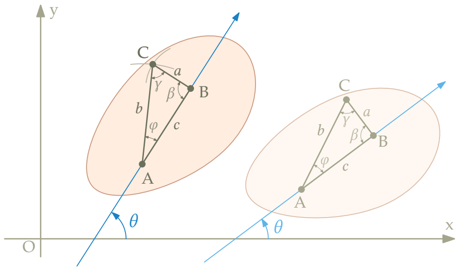
Isto motiva a definição da *velocidade angular* $\omega = \dot{\theta}$ e da *aceleração angular* $\alpha = \ddot{\theta}$.

Em um **movimento circular** de centro O e raio r, o *vetor velocidade* é *tangente à trajetória* e tem intensidade $r|\omega|$. O *vetor aceleração*, por sua vez, possui componente *tangente* de intensidade $r|\alpha|$ e uma componente *normal*, de intensidade $r\omega^2$, apontando para O:

$$\vec{v} = r\omega\hat{e}_c$$

$$\vec{a} = r\alpha\hat{e}_c - r\omega^2\hat{e}_r$$

Definição



Um sistema descreve um **movimento de corpo rígido** se *qualquer* par de pontos neste sistema *preservar constante sua distância relativa*.

Quando se toma um trio arbitrário de pontos em um *corpo rígido*, como corolário da conservação das distâncias relativas entre pontos tomados par a par, decorre a *preservação de ângulos* entre qualquer par de linhas solidárias a este corpo.

Equação característica do movimento de corpo rígido

Dados dois pontos P e Q arbitrários e um referencial S, *a velocidade de* P *relativa a* Q *em* S é a derivada em S do vetor de posição relativa $(P - Q)$:

$$\vec{v}_{P/Q} = \frac{d}{dt}(P - Q) = \frac{d}{dt}\big[(P - O) - (Q - O)\big] = \vec{v}_P - \vec{v}_Q$$

Sejam P e Q dois pontos de um *mesmo corpo rígido*. Neste caso, a distância d entre esses pontos deve permanecer constante:

$$(P - Q) \cdot (P - Q) = |P - Q|^2 = d^2$$

$$\frac{d}{dt}\big[(P - Q) \cdot (P - Q)\big] = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{P/Q} \cdot (P - Q) + (P - Q) \cdot \vec{v}_{P/Q} = 0$$

Em um movimento de corpo rígido os vetores de posição relativa e velocidade relativa correspondentes devem ser ortogonais entre si, resultando na *equação característica do movimento de corpo rígido*:

$$\vec{v}_{P/Q} \cdot (P - Q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_P \cdot (P - Q) = \vec{v}_Q \cdot (P - Q)$$

Descrição de um movimento plano de corpo rígido

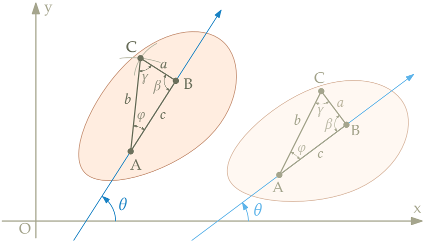
Um corpo rígido descreve um **movimento plano** se for modelado como uma figura plana em movimento em seu próprio plano.

Para descrever a *configuração* de um corpo em mov. plano bastam:

- as coordenadas de um de seus pontos sobre o plano.
- o ângulo que uma *direção qualquer solidária a este corpo* forma com uma *direção fixa ao referencial* adotado.

No exemplo, podemos usar as coordenadas de A(x_A, y_A) e o ângulo θ entre as direções de (B − A) e $\hat{\imath}$ (versor do eixo Ox, fixo ao referencial).

Se monitorarmos 2 pontos do corpo, teremos uma medida redundante.

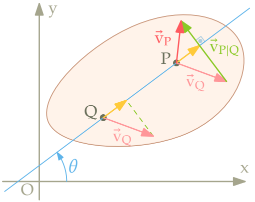


Velocidade relativa no movimento plano de corpo rígido

Seja θ o ângulo entre $(P - Q)$ e a direção do versor $\hat{\imath}$, fixa ao referencial S de interesse. Sabendo que a distância l entre os pontos P e Q do corpo é *constante*:

$$(P - Q) = l(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath})$$

$$\vec{v}_{P/Q} = \frac{d}{dt}(P - Q) = l\dot{\theta}(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath})$$



Como esperado, *equação característica do movimento de corpo rígido* é identicamente satisfeita:

$$\vec{v}_{P/Q} \cdot (P - Q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_P \cdot (P - Q) = \vec{v}_Q \cdot (P - Q)$$

Notando ainda que $\hat{k} \wedge (\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}) = (-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath})$, conclui-se que, *para um corpo rígido em movimento plano*:

$$\boxed{\vec{v}_{P/Q} = \vec{\omega} \wedge (P - Q) \quad \text{com} \quad \vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}}$$

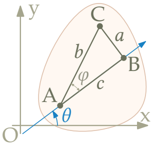
Velocidade angular em um movimento plano de corpo rígido

O **vetor velocidade angular** ou **vetor rotação** de um *corpo rígido em movimento plano* é definido como $\vec{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{n}$ com:

- θ sendo o *ângulo de orientação* adotado para o corpo – entre *uma direção solidária ao corpo* e *uma direção fixa ao referencial*.
- $\hat{n}$ sendo um versor *normal* ao plano de movimento, orientado pela regra da mão direita na *direção crescente* do ângulo θ.

A definição do vetor rotação *independe* do particular par de pontos escolhido no corpo para definir uma direção a ele solidária.

No exemplo, o movimento se dá sobre o plano Oxy e o ângulo de orientação θ escolhido cresce para rotações anti-horárias (sentido $\hat{k}$), logo $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{k}$. Se escolhermos o ângulo $(\theta + \varphi)$ entre $(C - A)$ e o eixo Ox para orientar o corpo, como $\varphi = C\hat{A}B$ é *constante*, então: $\vec{\omega} = (\dot{\theta} + \dot{\varphi})\hat{k} = \dot{\theta}\,\hat{k}$.

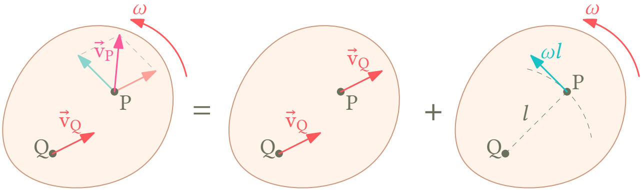


Campo de velocidades em um movimento plano de corpo rígido

Para um corpo rígido em *movimento plano*, escolhidos dois pontos P e Q *quaisquer*, *solidários ao corpo*, a relação em um *dado instante de tempo*, entre os vetores *posição relativa* (P – Q) e *velocidade relativa* $\vec{v}_{P/Q} = \vec{v}_P - \vec{v}_Q$ é:

$$\vec{v}_{P/Q} = \vec{\omega} \wedge (P - Q) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \wedge (P - Q)$$

na qual o *vetor rotação* $\vec{\omega}$ é *único para o corpo* (i.e., independe do par de pontos escolhido) e *ortogonal* ao plano de movimento.



Graficamente, o movimento plano de corpo rígido é a composição de uma translação com velocidade $\vec{v}_Q$ e uma rotação em torno de um ponto Q do corpo.

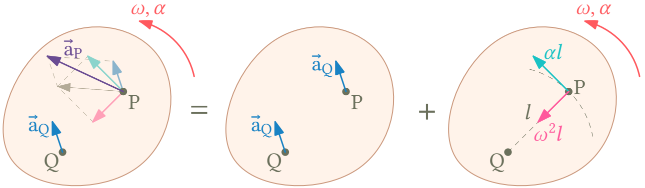
Campo de acelerações em um movimento plano de corpo rígido

Se denotarmos $(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) = l(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath})$, a *aceleração relativa* $\vec{a}_{\mathrm{P}/\mathrm{Q}}$ é:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}/\mathrm{Q}} = \vec{a}_{\mathrm{P}} - \vec{a}_{\mathrm{Q}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) = l\ddot{\theta}(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}) - l\dot{\theta}^2(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath})$$

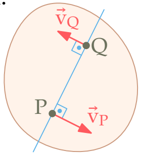
Identificando o **vetor aceleração angular/rotacional** deste *corpo rígido em movimento plano* como $\vec{\alpha} = \ddot{\theta}\,\hat{k}$, obtemos a respectiva equação que relaciona, em um *dado instante de tempo*, $\vec{a}_{\mathrm{P}}$, $\vec{a}_{\mathrm{Q}}$, $\vec{\alpha}$ e $\omega = |\vec{\omega}|$:

$$\vec{a}_{\mathrm{P}} = \vec{a}_{\mathrm{Q}} + \vec{\alpha} \wedge (\mathrm{P}-\mathrm{Q}) - \omega^2(\mathrm{P}-\mathrm{Q})$$



Centro instantâneo de rotação (CIR)

No *campo de velocidades de um movimento plano* de corpo rígido, $\vec{v}_{P/Q}$, $(P - Q)$ e $\vec{\omega}$ constituem um *trio de vetores ortogonais* entre si.



Uma reta ortogonal a $\vec{v}_P$ passando por P é um *lugar geométrico* de pontos solidários ao corpo cujas *velocidades são paralelas* a $\vec{v}_P$. De fato:

$$\vec{v}_P \parallel \vec{v}_Q \Leftrightarrow \vec{v}_P \parallel \vec{v}_{P/Q} \Leftrightarrow \vec{v}_P \perp (P - Q) \perp \vec{\omega}$$

Se um corpo rígido em movimento plano *não estiver em translação*, existe um ponto I em seu campo de velocidades, denominado *centro instantâneo de rotação (CIR)*, cuja velocidade instantânea é nula.

Uma vez que $\vec{0}$ é paralelo a todo vetor, conclui-se que, dado um ponto P qualquer, o CIR pertence à reta ortogonal a $\vec{v}_P$ passando por P. Ainda, $|\vec{v}_P|$ é *diretamente proporcional* à sua distância ao CIR.

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - I) \Rightarrow |\vec{v}_P| = |\vec{\omega}||P - I|$$

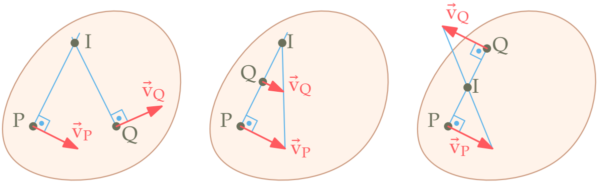
Determinação do centro instantâneo de rotação (CIR)

❶ velocidades de Q e P não-paralelas *(figura à esquerda)*:

- o CIR é a interseção das retas, passantes por Q e P, com direções ortogonais às respectivas velocidades.
- para a construção geométrica é necessário conhecer as posições de Q e P e *apenas as direções* de $\vec{v}_Q$ e $\vec{v}_P$.

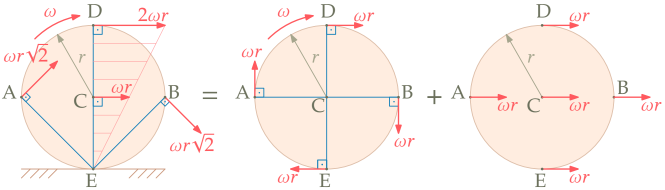
❷ velocidades de Q e P paralelas com $\vec{v}_Q \neq \vec{v}_P$ *(figs. centro e direita)*:

- CIR sobre a reta QP, obtido por interpolação linear.
- para a construção geométrica é necessário conhecer as posições de Q e P e os *vetores (intensidade, direção e orientação)* $\vec{v}_Q$ e $\vec{v}_P$.

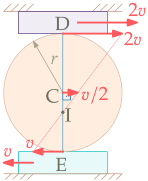


Rolamento sem escorregamento

Se em um cenário com dois corpos rígidos houver *rolamento sem escorregamento*, então os pontos instantaneamente em contato têm *a mesma velocidade* (suas *acelerações*, no entanto, são *distintas*).

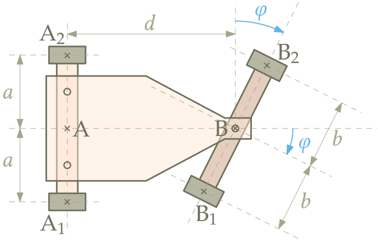


No exemplo acima, vemos um disco que rola sem escorregar sobre uma superfície plana fixa. Neste caso, o ponto E tem *velocidade nula* e é o *CIR* do disco. Note que este movimento pode ser melhor compreendido como a *composição* de uma *rotação em torno do centro* C com uma *translação* da roda.
Já no exemplo ao lado, o CIR do disco é o ponto I indicado.



Determinação do centro instantâneo de rotação (CIR)

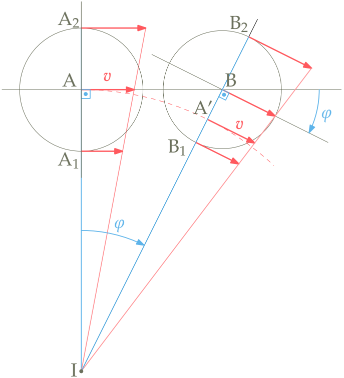
Considere um carrinho de rolimã em que rolamentos radiais de esferas desempenham o papel de rodas, *rolando sem escorregar* sobre uma superfície plana.

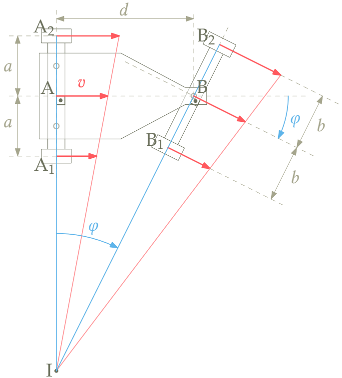


Considerando uma manobra em que o ângulo φ entre os eixos dianteiro e traseiro permanece constante, da condição de *rolamento sem escorregamento* das rodas, seus centros terão velocidades ortogonais às direções dos seus respectivos eixos.

Determinação do centro instantâneo de rotação (CIR)

Sendo a direção da velocidade da extremidade de cada eixo ortogonal ao respectivo eixo, CIR do carrinho de rolimã está na intersecção das retas suporte de seus eixos dianteiro e traseiro.





Perguntas?

reorsino@usp.br