PME 3100 • Mecânica I • Módulo 1.4

Momento mínimo e eixo central
Redução de sistemas de forças (4 classes)
Atrito de escorregamento (Coulomb)

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Equivalência entre sistemas de forças

A transformação matemática de *mudança de polo* tem como *invariantes* o valor do *escalar* $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$ e da componente vetorial $\vec{M}_O$ na direção paralela a $\vec{R}$, denominada *momento mínimo*, pois $|\vec{M}_O| \geq |\vec{M}_{\|}|$:

$$\vec{M}_{min} = \vec{M}_{\|} = \frac{I}{|\vec{R}|^2}\vec{R}$$

O **eixo central** de um sistema de forças é o *lugar geométrico dos polos* com respeito aos quais o *momento resultante* deste sistema é *mínimo*:

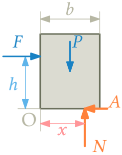
$$E = O + \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \lambda\vec{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

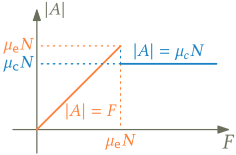
Um sistema de forças de *resultante não-nula* será redutível a *uma única força* $(\vec{R}, E)$, cuja linha de ação é o *eixo central* do sistema *se, e somente se, o invariante escalar* $I = 0$.

Contato com atrito de escorregamento

Quando a força equivalente em um contato entre sólidos não é ortogonal à superfície de contato, identificamos como **atrito** a respectiva componente da força tangente a esta superfície.

- O atrito atua como *reação (incógnita independente)* se impedir o escorregamento relativo entre os corpos no contato. Para tal, *após resolver o problema de estática* deve-se verificar a *condição de não-escorregamento* $|A| \leq \mu_e N$.
- Ocorrendo *escorregamento*, o atrito passa a ser uma *força ativa* de sentido oposto à velocidade relativa de escorregamento e intensidade praticamente constante $|A| = \mu_c N$.





Mudança de polo e invariante escalar do sistema de forças

- Seja um sistema de forças modeladas como vetores deslizantes *não equivalente a um binário*, ou seja, com $\vec{R} \neq \vec{0}$.
- Neste caso, a *resultante de momentos do sistema dependerá da particular escolha de polo*, conforme descrito pela equação:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + (A - B) \wedge \vec{R}$$

- O produto escalar entre os vetores resultantes de força e de momento *independe do polo escolhido*. De fato:

$$I = \vec{M}_B \cdot \vec{R} = \vec{M}_A \cdot \vec{R} + (A - B) \wedge \vec{R} \cdot \vec{R} = \vec{M}_A \cdot \vec{R}$$

Dessa forma, o valor de $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$ (o mesmo para qualquer polo O escolhido) representa o *invariante escalar* do sistema de forças.

- Em outras palavras, a transformação matemática de *mudança de polo* tem como característica *preservar o valor de* $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$.

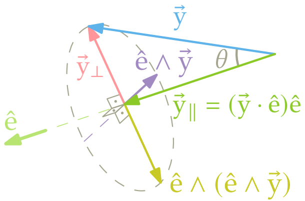
Decomposição de um vetor em componentes ortogonais

Dados dois vetores não-nulos $\vec{x}$ e $\vec{y}$, sempre será possível realizar a decomposição $\vec{y} = \vec{y}_{\parallel} + \vec{y}_{\perp}$, com a parcela $\vec{y}_{\parallel}$ sendo paralela a $\vec{x}$ e a parcela $\vec{y}_{\perp}$ sendo ortogonal a $\vec{x}$. Em particular:

$$\vec{y}_{\parallel} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2}\,\vec{x} \qquad \vec{y}_{\perp} = -\frac{\vec{x} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{y})}{|\vec{x}|^2}$$

A figura ao lado ilustra o resultado do teorema considerando um versor $\hat{e}$ e um vetor $\vec{y}$. Para o caso de dois vetores não-nulos genéricos $\vec{x}$ e $\vec{y}$, basta tomar:

$$\hat{e} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$



Momento mínimo

- A componente do vetor $\vec{M}_O$ sobre a direção de $\vec{R}$ independe do polo escolhido:

$$\vec{M}_{O\parallel} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^2}\,\vec{R} = \frac{I}{|\vec{R}|^2}\,\vec{R}$$

Portanto, a transformação de *mudança de polo afeta* exclusivamente a *componente do momento resultante* que é *ortogonal a* $\vec{R}$.

- Notando que $\vec{M}_{O\parallel}$ e $\vec{M}_{O\perp}$ são *componentes ortogonais* de $\vec{M}_O$:

$$|\vec{M}_O| = \sqrt{|\vec{M}_{O\parallel}|^2 + |\vec{M}_{O\perp}|^2} = \sqrt{\frac{I^2}{|\vec{R}|^2} + |\vec{M}_{O\perp}|^2} \geq \frac{|I|}{|\vec{R}|}$$

- Pode-se buscar um polo E para o qual o momento resultante seja *mínimo* (em módulo):

$$\vec{M}_E = \vec{M}_{E\parallel} = \frac{I}{|\vec{R}|^2}\,\vec{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_{E\perp} = \vec{0}$$

Eixo central

- O mesmo momento mínimo será medido se o polo E′ escolhido estiver em uma reta passante por E e que tenha a direção de $\vec{R}$ uma vez que, neste caso, $(E - E') \parallel \vec{R}$ e:

$$\vec{M}_{E'} = \vec{M}_E + (E - E') \wedge \vec{R} = \vec{M}_E$$

- Tal reta é denominada *eixo central* do sistema de forças e representa o *lugar geométrico dos polos* com respeito aos quais o *momento resultante* deste sistema é *mínimo*.
- Aplicando a expressão da mudança de polo entre O e E, o primeiro sendo o polo com relação ao qual medimos $\vec{M}_O$ e o segundo um ponto do eixo central:

$$\vec{M}_O = \vec{M}_E + (E - O) \wedge \vec{R} = \frac{I}{|\vec{R}|^2}\vec{R} - \vec{R} \wedge (E - O)$$

$$\Rightarrow \vec{R} \wedge \vec{M}_O = \frac{I}{|\vec{R}|^2}\vec{R} \wedge \vec{R} - \vec{R} \wedge \left(\vec{R} \wedge (E - O)\right) = -\vec{R} \wedge \left(\vec{R} \wedge (E - O)\right)$$

Eixo central

- Pode-se decompor $(E - O) = (E - O)_{\|} + (E - O)_{\perp}$, em que a primeira parcela é paralela a $\vec{R}$ e a segunda é ortogonal a $\vec{R}$:

$$(E - O) = \lambda \vec{R} - \frac{\vec{R} \wedge \left(\vec{R} \wedge (E - O)\right)}{|\vec{R}|^2}$$

$$(E - O) = \lambda \vec{R} + \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} \quad \Leftrightarrow \quad E = O + \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}_O}{|\vec{R}|^2} + \lambda \vec{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Se λ puder assumir *qualquer valor real*, esta equação descreverá uma *reta* que tem a direção de $\vec{R}$; em outras, palavras, esta é a *equação do eixo central do sistema de forças*.
- Em particular, se $I = 0$, o eixo central é o lugar geométrico dos polos com respeito aos quais o momento é nulo.

Classes de redução de sistemas de forças

❶ $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$: o sistema é **equivalente a zero** (ou seja, equivale à aplicação de nenhum esforço, condição de equilíbrio estático).

❷ $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O \neq \vec{0}$: o sistema é **equivalente a um binário**.

❸ $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$: o sistema é **equivalente a uma única força** $(\vec{R}, E)$, cuja linha de ação é o eixo central do sistema.

❹ $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} \neq 0$: o sistema é **equivalente a duas forças** ou **a uma força e um binário**, sendo este último mínimo se o polo escolhido estiver sobre o eixo central.

Sistemas redutíveis a uma única força – $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R} = 0$

Dois casos notáveis discutidos anteriormente são sistemas redutíveis a uma única força:

- Em um *sistema de forças concorrentes* em P, o eixo central é a reta que tem a direção de $\vec{R}$ e passa pelo ponto P.
- Em um *sistema de forças paralelas de $\vec{R} \neq \vec{0}$*, o eixo central é a reta que tem a direção de $\vec{R}$ e passa pelo *centro de forças paralelas* C.

Sistemas de forças *coplanares* de *resultantes não-nulas* são *redutíveis a uma única força* uma vez que $\vec{R}$ e $\vec{M}_O$ são ortogonais entre si ($I = 0$).

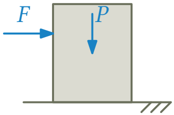
* De fato, considerando uma base ortonormal $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$, com $\hat{k}$ normal ao plano em questão, e um polo O sobre este plano:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\hat{\imath} + \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)\hat{\jmath}$$

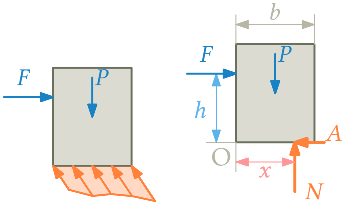
$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} (x_k\hat{\imath} + y_k\hat{\jmath}) \wedge (X_k\hat{\imath} + Y_k\hat{\jmath}) = \left[\sum_{k=1}^{n} (x_k Y_k - y_k X_k)\right]\hat{k}$$

Contato com atrito de escorregamento

Considere o exemplo de um bloco de peso P apoiado sobre uma superfície plana horizontal. Aplica-se uma força horizontal de intensidade F, porém a presença de atrito no contato entre o bloco e o plano impede qualquer movimentação do bloco, mantendo-o em equilíbrio.



A interação existente no contato pode ser modelada como um sistema de forças reativas distribuídas na superfície de contato. Como o modelo é 2D, tal sistema de forças é redutível a uma única força de reação.

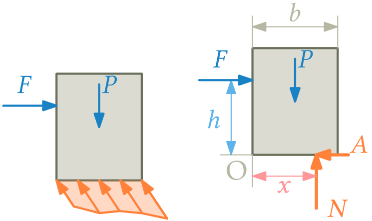


Contato com atrito de escorregamento

O sistema de forças completo (considerando forças ativas e reativas), por sua vez, deve ser equivalente a zero, uma vez que o bloco permanece em equilíbrio. Dessa forma:

$$\vec{\mathrm{R}} = (F - A)\hat{\imath} + (N - P)\hat{\jmath} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = F \\ N = P \end{cases}$$

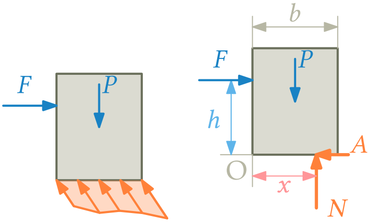
$$\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}} = \left(Nx - P\frac{b}{2} - Fh\right)\hat{\mathrm{k}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b}{2} + \frac{F}{P}h$$



Não-tombamento

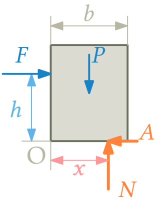
Note que a presença da força horizontal faz com que o ponto de aplicação da força de contato equivalente seja deslocado da posição central da superfície. A condição para que o contato permaneça e o bloco não tombe é:

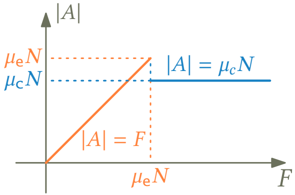
$$x \leq b \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{2} + \frac{F}{P}h \leq b \quad \Rightarrow \quad F \leq P\frac{b}{2h}$$



Não-escorregamento: modelo de Coulomb

O atrito (componente tangente à superfície da força de contato equivalente) é uma *reação não-ideal*, uma vez que apenas é capaz de restringir o escorregamento entre as superfícies caso a razão entre seu módulo e o valor da normal (componente normal à superfície da força de contato equivalente) não exceda um limite, definido pelo *coeficiente de atrito estático* μ_e (determinando experimentalmente, em função da natureza das superfícies em contato):





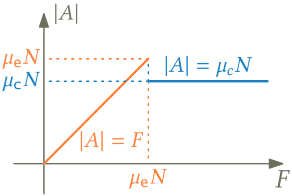
$$\boxed{\frac{|A|}{N} \leq \mu_e}$$

Condição de não-escorregamento

Para o exemplo do bloco, a condição de não-escorregamento é satisfeita se, e somente se: $F \leq \mu_e P$.

Atrito de escorregamento: modelo de Coulomb

Caso a condição de não-escorregamento não seja satisfeita, o atrito deixa de ser uma componente de força de reação e passa a ser uma *força ativa* de sentido oposto à velocidade relativa de escorregamento e intensidade praticamente constante igual a $\mu_c N$, com μ_c sendo o *coeficiente de atrito cinético*.



* Versões da condição de não-escorregamento em problemas 3D:

- Bloco em contato com uma superfície: $\sqrt{A_1^2 + A_2^2} \leq \mu_e N$.
- Bloco vinculado a uma curva no espaço: $|A| \leq \mu_e \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$.

Perguntas?

reorsino@usp.br