PME 3100 • Mecânica I • Módulo 1.3

Classificação de estruturas
Determinação de esforços reativos
Treliças: método dos nós e das seções
Forças hidrostáticas

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Equilíbrio e classificação das estruturas

Reações são componentes de força (se restringem translações) ou de momentos (se restringem rotações), *a priori incógnitas*, que devem satisfazer às **equações de equilíbrio** – o sistema formado por todas as forças ativas e reativas sobre um corpo em equlíbrio deve ser *equivalente a zero* (i.e., $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$ para algum polo O):

$$M_{Ox} = 0 \quad M_{Oy} = 0 \quad M_{Oz} = 0 \quad R_x = 0 \quad R_y = 0 \quad R_z = 0 \qquad \textbf{[3D]}$$

$$M_{Oz} = 0 \quad R_x = 0 \quad R_y = 0 \qquad \textbf{[2D]}$$

Se há algum movimento de translação ou rotação não restrito pelos vínculos presentes, tem-se uma **estrutura hipostática**.

Se todos os movimentos de translação ou rotação são restritos pelos vínculos presentes, tem-se uma **estrutura isostática** se equações de equilíbrio têm *solução única* para reações. Se houver *infinitas soluções* para as equações de equilíbrio tem-se uma **estrutura hiperestática**.

Determinação de esforços reativos externos e internos

Roteiro de solução para problemas de estática:

1. DCL;
2. escolha do polo O;
3. equações $\vec{M}_O = \vec{0}$;
4. equações $\vec{R} = \vec{0}$;
5. solução do sistema de equações;
6. análise dimensional;
7. interpretação física.

Esforços reativos internos em barras de treliça podem ser evidenciados por meio de *cortes* apropriados que isolem partes da estrutura.

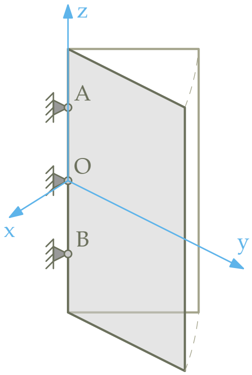
- No **método dos nós**, o conjunto de cortes isola um nó da estrutura, e a condição $\vec{R} = \vec{0}$ é suficiente para que o sistema de forças concorrentes assim obtido seja equivalente a zero.
- No **método das seções**, o conjunto de cortes isola uma parte da estrutura. O número de cortes não deve exceder o número de equações de equilíbrio para a parte isolada.

Classificação das estruturas

Em uma **estrutura hipostática**, os vínculos presentes não são capazes de restringir algum movimento de translação ou rotação.

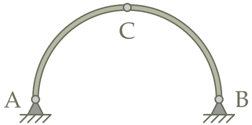
Na figura ao lado, temos o modelo de uma porta, em que há 3 elementos de vínculo do tipo articulação sobre o mesmo eixo vertical Oz.

As três forças de reação, portanto, não produzem momento com respeito ao eixo Oz, sendo assim incapazes de se contrapor à rotação induzida em torno deste eixo por qualquer força cuja linha de ação seja reversa a Oz, aplicada quando abrimos ou fechamos a porta. Por outro lado, sob ação exclusiva do peso próprio da porta (linha de ação paralela a Oz), o equilíbrio é possível.



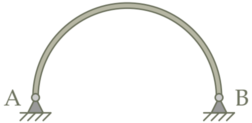
Classificação das estruturas

Em uma **estrutura isostática**, os vínculos presentes são capazes de *restringir todos os movimentos* de translação e rotação e a *solução* do sistema de equações de equilíbrio é *única*: é necessário que o número de componentes de reação (incógnitas) seja igual ao número de equações de equilíbrio.



2 corpos no plano ⇒ 6 equações
3 articulações ⇒ 6 incógnitas

Em uma **estrutura hiperestática**, os vínculos presentes são capazes de *restringir todos os movimentos* de translação e rotação e há *infinitas soluções* para o sistema de equações de equilíbrio.



1 corpo no plano ⇒ 3 equações
2 articulações ⇒ 4 incógnitas

Procedimento para classificação de uma estrutura

❶ Analisar a *natureza dos vínculos* de uma estrutura para verificar se a mesma é *hipostática*.

- ✭ Esta análise *não depende do número* de componentes de reação presentes no problema, mas da capacidade destas reações de se contrapor a quaisquer possíveis esforços ativos.
- ✭ Caso as resultantes de forças e momentos do subsistema formado apenas pelos esforços de reação não sejam capazes de produzir componentes em todas as direções possíveis, a estrutura é hipostática.

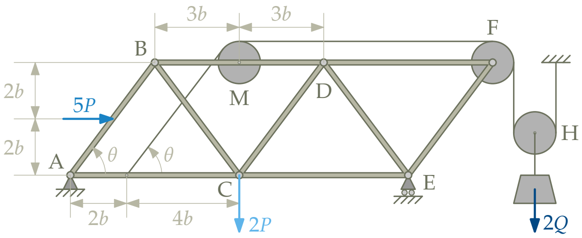
❷ Caso a estrutura não seja hipostática, verifique o número de soluções do sistema formado pelas equações de equilíbrio. Se a *solução* for *única* (note que isto requer que o *número de equações* seja *igual ao número de componentes de reação incógnitas*), o sistema é *isostático*. Se houver *infinitas soluções*[1], o sistema é *hiperestático*.

[1]Note que, por se tratar de um sistema linear, o sistema constituído pelas equações de equlíbrio pode ter nenhuma, somente uma ou infinitas soluções. Não há outra possibilidade com número finito (superior a 1) de soluções admissíveis.

Esforços reativos internos e externos

No escopo desta disciplina, a análise do equilíbrio de uma estrutura dados os esforços ativos externos envolverá a solução de dois tipos de problema:

- determinar os esforços reativos externos, aplicados por elementos idealizados que a vinculam a uma base.
- determinar os esforços reativos internos (que modelam a interação entre partes internas à estrutura) presentes, por exemplo, em uniões articuladas, fios, cabos e barras de treliça ideias.

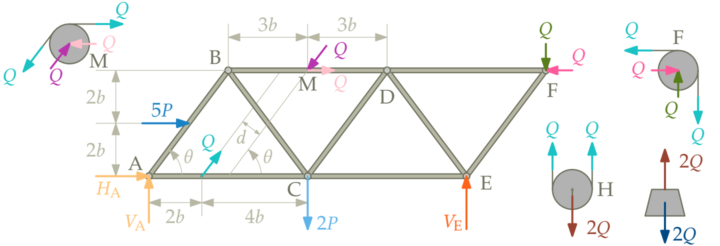


Roteiro recomendado para a solução de problemas de estática

- ✓ Esboce corretamente os diagramas de corpo livre, representando de forma consistente todos os esforços ativos (dados) e reativos (incógnitos). Um problema desenvolvido a partir de DCLs errados terá sua solução invariavelmente comprometida.
- ✓ Escolha como *polo* o ponto em que *concorram o maior número* possível de *linhas de ação* de componentes de *forças reativas*[2].
- ✓ Comece escrevendo as equações de equilíbrio para momentos.
- ✓ Se uma equação tiver uma única incógnita, ela pode ser resolvida de imediato. Caso contrário, enumere-a para utilizar adiante.
- ✓ Com as equações enumeradas, tente formar subsistemas em que o número de equações seja igual ao de incógnitas. Comece sua solução pelos sistemas mais simples (menos incógnitas).
- ✓ Faça *análise dimensional* nas expressões obtidas como resposta.

[2]Em caso de empate, selecione dentre os candidatos o ponto em que concorram o maior número possível de linhas de ação de componentes de forças ativas.

Determinação de esforços reativos externos



$$\underline{M_{Az}=0}:\ -5P(2b)\ \underbrace{-Q\left(\frac{4}{5}b\right)}_{\text{binário } QQ}\ -2P(6b)+V_E(12b)-Q(15b)=0\ \Rightarrow\ \boxed{V_E=\frac{110P+79Q}{60}}$$

$$\underline{R_x=0}:\ H_A+5P=0\ \Rightarrow\ \boxed{H_A=-5P}$$

$$\underline{R_y=0}:\ V_A-2P+V_E-Q=0\ \Rightarrow\ \boxed{V_A=\frac{10P-19Q}{60}}$$

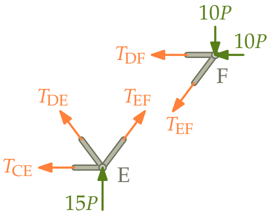
Se, por exemplo, $Q=10P$:

$$\boxed{V_A=-3P}\quad\boxed{V_E=15P}$$

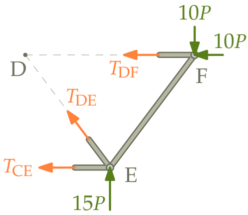
Determinação de esforços reativos internos em barras de treliça

Na estrutura do exemplo, todas as barras são supostas rígidas e de massa desprezível. No entanto, apenas CD, CE, DE, DF e EF são *barras de treliça*, uma vez que estão sujeitas a forças externas aplicadas somente em suas extremidades articuladas.

Pode-se então isolar partes desta estrutura, esboçando DCLs que permitirão determinar as reações internas nestas barras de treliça:



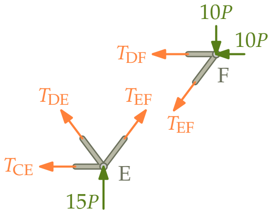
Método dos nós



Método das seções

Método dos nós

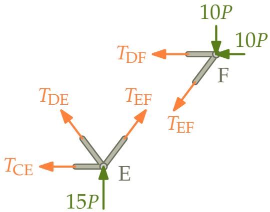
> Isola-se *cada nó* da estrutura por meio de *cortes em todas as barras* de treliça nele articuladas. Em cada corte é representada a respectiva componente de esforço reativo interno.



- Uma vez que os DCLs de cada nó representam sistemas de forças nele *concorrentes*, o equilíbrio de momentos é identicamente satisfeito, restando apenas montar as equações para que $\vec{R} = \vec{0}$.
- Inicia-se o problema por um nó em que o *número de incógnitas* a determinar seja *igual* ao *número de equações de equilíbrio*.
- Na convenção de incógnitas dos DCLs, as componentes incógnitas de forças internas nas barras de treliça "apontam para fora" dos cortes. Assim, se os sinais obtidos na solução das equações de equilíbrio forem *positivos*, as barras estão em *tração*.

Método dos nós

No exemplo, começamos pelo nó F:



$$
\mathrm{F}:\begin{cases} \underline{R_y = 0}: & -\dfrac{4}{5}T_{EF} - 10P = 0 \\[2ex] \underline{R_x = 0}: & -T_{DF} - \dfrac{3}{5}T_{EF} - 10P = 0 \end{cases}
$$

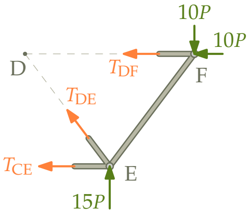
$$
\Rightarrow \quad \boxed{T_{EF} = -\frac{25}{2}P} \quad \boxed{T_{DF} = -\frac{5}{2}P}
$$

Agora, para o nó E:

$$
\mathrm{E}:\begin{cases} \underline{R_y = 0}: & \dfrac{4}{5}T_{EF} + \dfrac{4}{5}T_{DE} + 15P = 0 \Rightarrow \boxed{T_{DE} = -\dfrac{25}{4}P} \\[2ex] \underline{R_x = 0}: & \dfrac{3}{5}T_{EF} - \dfrac{3}{5}T_{DE} - T_{CE} = 0 \Rightarrow \boxed{T_{CE} = -\dfrac{15}{4}P} \end{cases}
$$

Neste caso, todas as barras estão em *compressão* (sinais contrários à convenção adotada como *positiva*, que era de *tração*).

Método das seções



Os *cortes* são feitos para *isolar uma parte* da estrutura. Em cada corte é representada a respectiva componente de esforço reativo interno. O *número de cortes* não deve exceder o de equações de equilíbrio para a parte isolada.

$$\underline{M_{Dz} = 0}: \ -T_{CE}(4b) + 15P(3b) - 10P(6b) = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{T_{CE} = -\frac{15}{4}P}$$

$$\underline{R_y = 0}: \ \frac{4}{5}T_{DE} + 15P - 10P = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{T_{DE} = -\frac{25}{4}P}$$

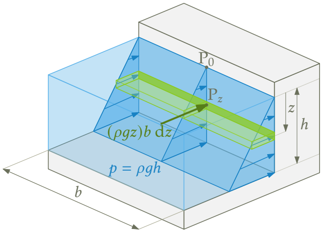
$$\underline{R_x = 0}: \ -T_{CE} - \frac{3}{5}T_{DE} - T_{DF} - 10P = 0 \ \Rightarrow \ \boxed{T_{DF} = -\frac{5}{2}P}$$

Os resultados são idênticos aos obtidos pelo método dos nós.

Sistemas de forças distribuídas paralelas

Um *sistema de forças distribuídas paralelas* $\mathcal{F}$ de *resultante não-nula* é equivalente a uma única força de vetor igual à resultante e aplicada no respectivo *centro de forças paralelas*:

$$\mathcal{F} \sim \{(R\hat{\mathrm{u}}, \mathrm{C})\} \quad \Leftrightarrow \quad R = \int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}F \neq \vec{0} \quad \text{e} \quad (\mathrm{C} - \mathrm{O}) = \frac{1}{R} \int_{\mathcal{F}} (\mathrm{P} - \mathrm{O})\, \mathrm{d}F$$

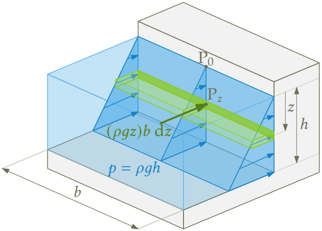


Campo de pressões hidrostáticas sobre uma superfície

Definindo a coordenada z, descendente, com origem na superfície livre, o campo de pressões é descrito pela *lei de Stevin*:

$$p = \rho g z$$

Força resultante $(\mathrm{d}F\hat{\imath}, \mathrm{P}_z)$ sobre uma superfície retangular $b \times \mathrm{d}z$, localizada no entorno da profundidade profundidade z, com $\mathrm{d}F = (\rho g z) b\, \mathrm{d}z$ e $(\mathrm{P}_z - \mathrm{P}_0) = z\hat{k}$. Para o campo completo:



$$R = \int_0^h (\rho g z) b\, \mathrm{d}z = \rho g b \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^h = \frac{1}{2}\rho g h^2 b$$

$$R(\mathrm{C} - \mathrm{P}_0) = \int_0^h (z\hat{k})(\rho g z) b\, \mathrm{d}z = \rho g b \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^h \hat{k} = \frac{1}{3}\rho g h^3 b \hat{k} \Rightarrow (\mathrm{C} - \mathrm{P}_0) = \frac{2}{3} h \hat{k}$$

Perguntas?

reorsino@usp.br