PME 3100 ▪ Mecânica I ▪ Módulo 1.2

Sistemas de forças concorrentes e paralelas
Centro de massa e centro de forças paralelas
Binário e momento
Equivalência entre sistemas de forças
Condições necessárias para o equilíbrio

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Sistemas de forças concorrentes e paralelas, centro de massa

Um sistema de *forças concorrentes em um ponto P equivale a uma única força* $(\vec{R}, P)$ aplicada em P.

Um sistema de *forças paralelas* (direção $\hat{u}$) de *resultante não-nula* equivale a *uma única força* $(\vec{R}, C)$ aplicada no *centro de forças paralelas*:

$$\mathcal{F} \sim \{(R\hat{u}, C)\} \quad \Leftrightarrow \quad R = \sum_{k=1}^{n} F_k \neq 0 \quad \text{e} \quad (C - O) = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{n} F_k (P_k - O)$$

Analogamente ao centro de forças paralelas, define-se o **centro de massa** de um sistema material:

$$(G - O) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k (P_k - O), \quad \text{com} \quad m = \sum_{k=1}^{n} m_k$$

Ambas as definições têm propriedades algébricas análogas quanto a *simetria*, *composição/decomposição* e *homogeneidade*.

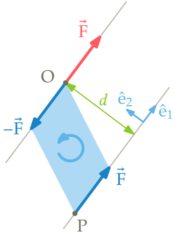
Binário, momento e equivalência entre sistemas de forças

Um *binário*, sistema de *forças paralelas de resultante nula, não é equivalente a uma única força*.
Um vetor *momento* é uma *representação matemática completa de um binário* e de *toda a classe de binários* a ele *equivalentes*.

O *momento de* $(\vec{F}, P)$ *com respeito a um polo* O é o **vetor** $\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$.
O *momento de* $(\vec{F}, P)$ *com respeito a um eixo* Ou é o **escalar** $M_{Ou} = \vec{M}_O \cdot \hat{u}$.

Todo *sistema de forças* $\mathcal{F}$ em que elas possam ser modeladas como *vetores deslizantes* é *equivalente* a um sistema formado por *uma força e um binário*, ou seja, $\mathcal{F} \sim \{(\vec{R}, O), \vec{M}_O\}$ com:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} (P_k - O) \wedge \vec{F}_k$$



Estática: condições necessárias para o equilíbrio

A *condição necessária* para o equilíbrio de um corpo (ou conjunto de corpos) é que o sistema formado por todas as forças sobre ele atuantes, ativas e reativas, seja *equivalente a zero*, ou seja:

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \vec{0}, \text{ para algum polo O}$$

Estas condições resultam em 6 equações de equilíbrio por corpo (conjunto), para problemas 3D, e em 3 equações de equilíbrio por corpo (conjunto) para problemas 2D.

Em um corpo em equilíbrio sob ação exclusiva de *2 forças*, as forças devem ser opostas, de mesma intensidade e mesma linha de ação.

Em um corpo em equilíbrio sob ação exclusiva de *3 forças*, as forças devem ser *coplanares* constituindo um sistema de forças paralelas ou um sistema de forças concorrentes.

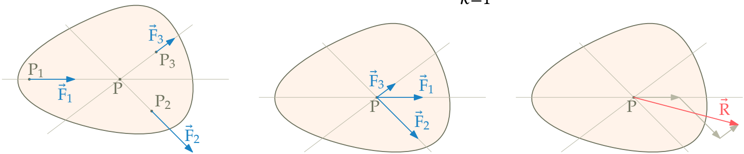
Sistemas de forças concorrentes

Um sistema de forças concorrentes $\mathcal{F}$ é um conjunto de forças cujas linhas de ação são retas que possuem um ponto de concorrência comum:

$$\mathcal{F} = \{(\vec{F}_i, P_i) : i = 1, 2, \ldots, n \mid \exists \lambda_i \in \mathbb{R} : (P_i - P) = \lambda_i \vec{F}_i\}$$

Se todas as forças puderem ser modeladas como *vetores deslizantes*, $\mathcal{F}$ é equivalente a uma única força $(\vec{R}, P)$ com $\vec{R}$ denotando a *resultante do sistema de forças*:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$



Sistemas de forças paralelas

Um sistema de forças paralelas $\mathcal{F}$ é um conjunto de forças cujas linhas de ação são retas paralelas:

$$\mathcal{F} = \{(\vec{\mathrm{F}}_i, \mathrm{P}_i) : i = 1, 2, \ldots, n \mid \exists F_i \in \mathbb{R} : \vec{\mathrm{F}}_i = F_i \hat{\mathrm{u}}\}$$

Caso a *resultante* $\vec{\mathrm{R}} = R\hat{\mathrm{u}}$ do sistema seja *não-nula*, $\mathcal{F}$ equivale a *uma única força* $(\vec{\mathrm{R}}, \mathrm{C})$. A posição do *centro de forças paralelas* C com respeito a uma origem arbitrária O é definida pela média das posições, com respeito à mesma origem, dos pontos P_k de aplicação de forças, ponderadas pelas respectivas componentes de força F_k, ou seja:

$$\mathcal{F} \sim \{(R\hat{\mathrm{u}}, \mathrm{C})\} \quad \Leftrightarrow \quad R = \sum_{k=1}^{n} F_k \neq 0 \quad \mathrm{e} \quad (\mathrm{C} - \mathrm{O}) = \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{n} F_k (\mathrm{P}_k - \mathrm{O})$$

*A demonstração deste resultado é apresentada nos dois slides seguintes para um par de forças paralelas e pode ser estendida por indução para um sistema com n forças concentradas, e via Cálculo para um sistema de forças distribuídas.

*Par de forças paralelas

$$\vec{H} = \mu(P_1 - P_2)$$

$$(P_1 - P) = \lambda_1(F_1\hat{u} + \vec{H})$$

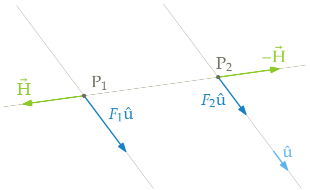
$$(P_2 - P) = \lambda_2(F_2\hat{u} - \vec{H})$$

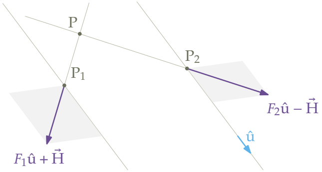
$$(P_1 - P_2) = (\lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2)\hat{u} + (\lambda_1 + \lambda_2)\vec{H}$$

$$[\mu(\lambda_1 + \lambda_2) - 1](P_1 - P_2) + (\lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2)\hat{u} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu(\lambda_1 + \lambda_2) = 1 \\ \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{F_2}{\mu(F_1 + F_2)}$$

$$(P - P_1) = \underbrace{\frac{F_2}{(F_1 + F_2)}(P_2 - P_1)}_{\text{paralelo a } (P_2 - P_1)} \underbrace{- \frac{F_1 F_2}{\mu(F_1 + F_2)}\hat{u}}_{\text{paralelo a } \hat{u}}$$





*Par de forças paralelas

$$(\mathrm{P}-\mathrm{P}_1) = \underbrace{\frac{F_2}{(F_1+F_2)}(\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_1)}_{\text{paralelo a } (\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_1)} - \underbrace{\frac{F_1F_2}{\mu(F_1+F_2)}\hat{u}}_{\text{paralelo a } \hat{u}}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{C}-\mathrm{P}_1) = \frac{F_2}{(F_1+F_2)}(\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_1)$$

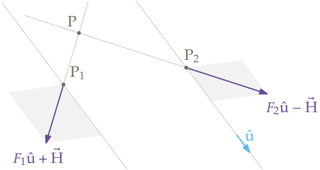
Caso sejam conhecidas as posições de P_1 e P_2 com respeito a uma origem O:

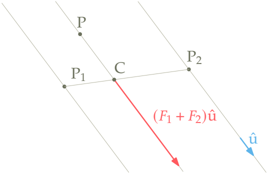
$$(\mathrm{C}-\mathrm{P}_1) = (\mathrm{C}-\mathrm{O}) - (\mathrm{P}_1-\mathrm{O})$$

$$(\mathrm{P}_2-\mathrm{P}_1) = (\mathrm{P}_2-\mathrm{O}) - (\mathrm{P}_1-\mathrm{O})$$

Após simplificação, obtém-se:

$$\boxed{(\mathrm{C}-\mathrm{O}) = \frac{F_1(\mathrm{P}_1-\mathrm{O}) + F_2(\mathrm{P}_2-\mathrm{O})}{(F_1+F_2)}}$$

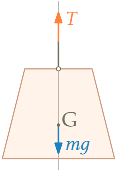




Centro de massa

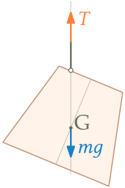
Considere um *sistema material* $\mathcal{M}$ formado por um número finito n de *partículas* P_k de massas m_k, $k = 1, \ldots, n$. O *centro de massa* ou *baricentro* de $\mathcal{M}$ é o ponto G definido a partir da seguinte expressão:

$$(\mathrm{G} - \mathrm{O}) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{n} m_k (\mathrm{P}_k - \mathrm{O}), \quad \text{com} \quad m = \sum_{k=1}^{n} m_k$$



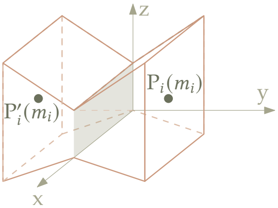
Esta definição pode ser estendida para um sistema material $\mathcal{S}$ de *massas distribuídas* em um meio contínuo:

$$(\mathrm{G} - \mathrm{O}) = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{S}} (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \, \mathrm{d}m, \quad \text{com} \quad m = \int_{\mathcal{S}} \mathrm{d}m$$



Em um campo gravitacional constante, o *centro de massa* de um sistema coincide com o *centro de gravidade* (centro de forças paralelas gravitacionais).

Propriedades



Por serem definidos como médias ponderadas, os conceitos de centro de massa e de centro de forças paralelas herdam todas as propriedades algébricas associadas a médias:

P1 Se houver simetria de uma distribuição de massas com respeito a um plano ou a um eixo, então o centro de massa está contido neste plano ou eixo.

P2 Se um sistema de massas $\mathcal{M}$ pode ser descrito como a união de um número finito s de subsistemas disjuntos:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_s \text{ com } \mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j = \emptyset, i \neq j$$

e são conhecidas as massas m_r e as posições dos centros de massa G_r de cada subsistema $\mathcal{M}_r$, então para $\mathcal{M}$:

$$(\mathrm{G} - \mathrm{O}) = \frac{1}{m} \sum_{r=1}^{s} m_r (\mathrm{G}_r - \mathrm{O}), \quad \text{com} \quad m = \sum_{r=1}^{s} m_r$$

Propriedades

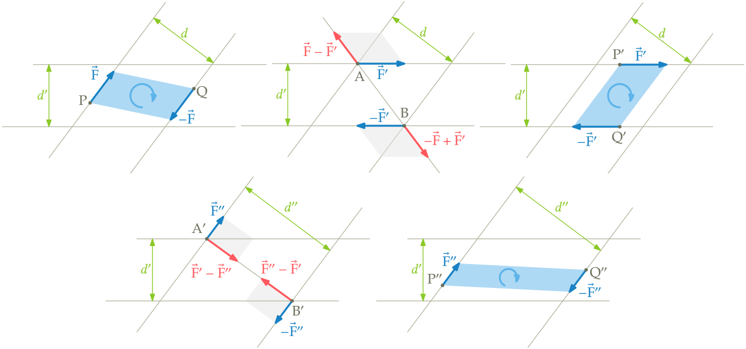
P3 O conjunto de pesos de ponderação utilizados no cálculo da posição de um centro de massa pode ser substituído por qualquer outro conjunto de pesos proporcional sem que isto afete o resultado.

Quando a distribuição de massas em um corpo respeita todas as simetrias de sua geometria, havendo uma proporção constante entre massa de cada porção e seu volume (isto é, há uma densidade de massa ρ constante tal que $m_r = \rho V_r$ para qualquer subsistema material deste corpo), dizemos que tal corpo é *homogêneo*. Neste caso, o centro de massa corresponderá ao *centróide* ou centro geométrico deste corpo, ou seja:

$$(\mathrm{G} - \mathrm{O}) = \frac{1}{V} \sum_{r=1}^{s} V_r (\mathrm{G}_r - \mathrm{O}), \quad \text{com} \quad V = \sum_{r=1}^{s} V_r$$

Binário

Binário é um sistema de forças paralelas, formado por duas forças $(\vec{F}, P)$ e $(-\vec{F}, Q)$ de mesma intensidade e mesma direção porém com orientações opostas e linhas de ação distintas.

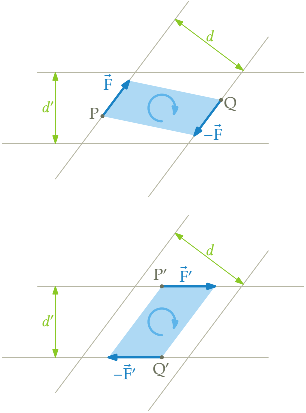


Momento do binário

$$\vec{M} = (P - Q) \wedge \vec{F}$$

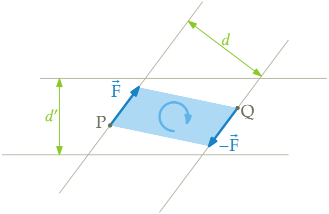
- *Direção*: direção normal ao plano definido pelo binário.
- *Orientação*: dada pela *regra da mão direita*, corresponde ao sentido de rotação induzida pelo binário.
- *Intensidade*: área do paralelogramo definido pelas forças do binário.

$$\left|\vec{M}\right| = \left|(P - Q) \wedge \vec{F}\right| = \left|\vec{F}\right|\left|P - Q\right| \sin\phi = Fd$$
$$d = |P - Q| \sin\phi$$



Momento do binário

Proposição 1: dois binários são *equivalentes* se e somente se têm o *mesmo vetor momento*.

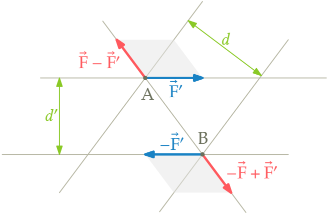


*Notando que ambos (P − A) e (B − Q) são vetores paralelos a $\vec{F}$:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= (P - Q) \wedge \vec{F} \\ &= [(P - A) + (A - B) + (B - Q)] \wedge \vec{F} \\ &= (A - B) \wedge \vec{F}\end{aligned}$$

Ainda, como $\vec{F} - \vec{F}'$ é paralelo a (A − B):

$$\vec{M} = (A - B) \wedge [\vec{F}' + (\vec{F} - \vec{F}')] = (A - B) \wedge \vec{F}'$$

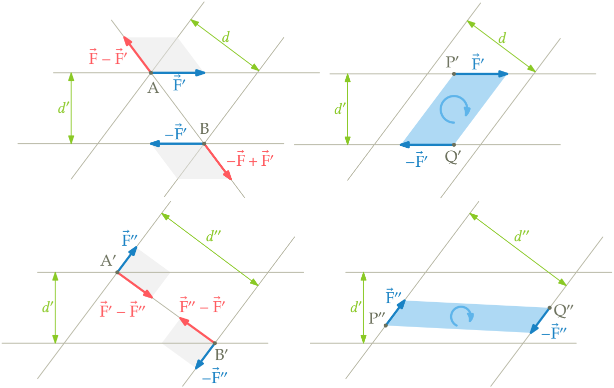


Momento do binário

*Notando que ambos $(A - P')$ e $(Q' - B)$ são vetores paralelos a $\vec{F}'$:

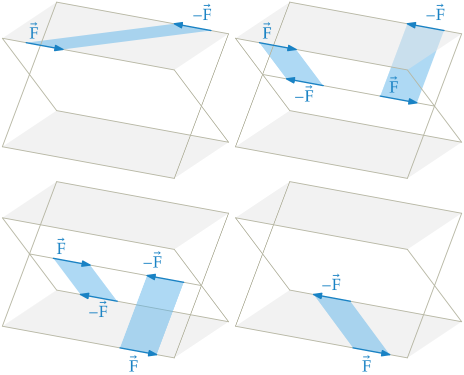
$$\vec{M} = [(A - P') + (P' - Q') + (Q' - B)] \wedge \vec{F}' = (P' - Q') \wedge \vec{F}'$$

Analogamente: $\vec{M} = (A' - B') \wedge \vec{F}' = (A' - B') \wedge \vec{F}'' = (P'' - Q'') \wedge \vec{F}''$.



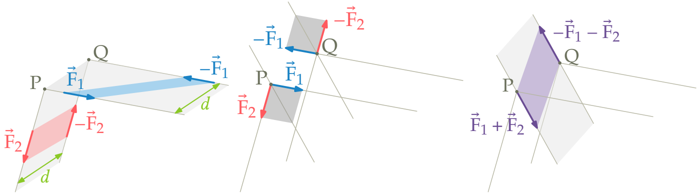
Momento do binário

O momento $\vec{M}$ enquanto *vetor livre* não está associado a nenhum plano específico. Para que dois binários sejam equivalentes é necessário que seus planos sejam paralelos, não que sejam coplanares.



Momento do binário

Proposição 2: um sistema formado por dois ou mais binários é equivalente a um único binário cujo momento é igual à soma dos momentos de cada um dos binários originais.



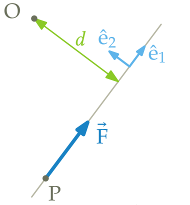
$$\vec{M} = (P - Q) \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = (P - Q) \wedge \vec{F}_1 + (P - Q) \wedge \vec{F}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

Um vetor *momento* é uma *representação matemática completa de um binário* e de *toda a classe de binários* a ele *equivalentes*.

Momento de uma força com respeito a um *polo*

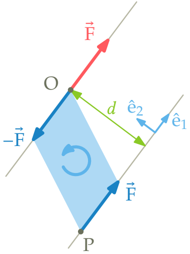
O *momento de uma força* $(\vec{F}, P)$ *com respeito a um polo* O, denotado por $\vec{M}_O$, é a *medida do binário* produzido quando se *transporta a força* de sua linha de ação original, passante por P, para uma *linha de ação paralela passante por* O:

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$$



Dado um polo O arbitrário, qualquer força $(\vec{F}, P)$ que possa ser modelada como *vetor deslizante* equivale a um sistema formado por *uma força* $(\vec{F}, O)$ e *um binário de momento* $\vec{M}_O$:

$$\{(\vec{F}, P)\} \sim \{\underbrace{(\vec{F}, P), (-\vec{F}, O)}_{\text{binário de momento } \vec{M}_O}, (\vec{F}, O)\} \sim \{(\vec{F}, O), \vec{M}_O\}$$



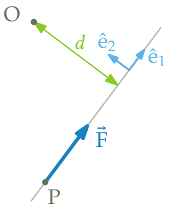
Momento de uma força com respeito a um *polo*

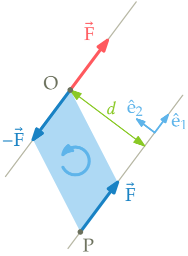
P1 Se o polo O escolhido já pertence à linha de ação da força $(\vec{F}, P)$, então o momento $\vec{M}_O$ é nulo.

P2 Consistentemente com o modelo de força como *vetor deslizante*, o momento de uma força *independe do ponto* de aplicação considerado *ao longo de sua própria linha de ação*. Se Q é um ponto sobre a linha de ação de $(\vec{F}, P)$ então $(P - Q)$ é um vetor paralelo a $\vec{F}$:

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= (P - O) \wedge \vec{F} = [(P - Q) + (Q - O)] \wedge \vec{F} \\ &= (Q - O) \wedge \vec{F}\end{aligned}$$

P3 A intensidade de $\vec{M}_O$ é igual ao produto da intensidade da força pela distância do polo O à sua linha de ação (trata-se, portanto, da *distância de um ponto a uma reta*).

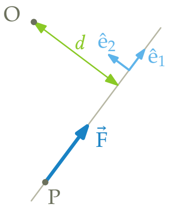




Momento de uma força com respeito a um *eixo*

O *momento de uma força* $(\vec{F}, P)$ *com respeito a um eixo* Ou, passante por um ponto O e orientado por um vetor unitário $\hat{u}$, é o *escalar* M_{Ou} que representa a componente do vetor $\vec{M}_O$ sobre este eixo, ou seja:

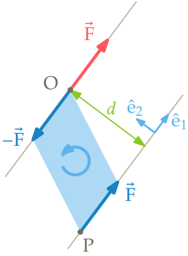
$$M_{Ou} = \vec{M}_O \cdot \hat{u}$$



P1 O momento de uma força com respeito a um eixo independe do polo escolhido sobre este eixo.

P2 o momento de uma força com respeito a um *eixo coplanar* (paralelo ou concorrente) à sua linha de ação é *nulo*.

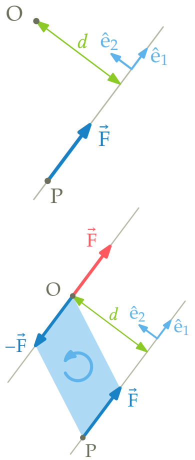
P3 o momento de uma força com respeito a um *eixo reverso* à sua linha de ação é *não-nulo*.



*Momento de uma força com respeito a um *eixo*

Para verificar a propriedade **P1**, considere um ponto A do eixo Ou. Neste caso, (A – O) é paralelo a û e, portanto (A – O) ∧ $\vec{F}$ é ortogonal a û; assim:

$$
\begin{aligned}
M_{\mathrm{Ou}} &= \vec{M}_{\mathrm{O}} \cdot \hat{u} \\
&= \left[(P - O) \wedge \vec{F}\right] \cdot \hat{u} \\
&= \left[\big((P - A) + (A - O)\big) \wedge \vec{F}\right] \cdot \hat{u} \\
&= \left[(P - A) \wedge \vec{F}\right] \cdot \hat{u} + \left[(A - O) \wedge \vec{F}\right] \cdot \hat{u} \\
&= \left[(P - A) \wedge \vec{F}\right] \cdot \hat{u} \\
&= \vec{M}_{\mathrm{A}} \cdot \hat{u}
\end{aligned}
$$

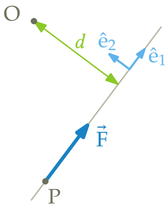


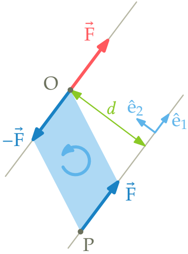
*Momento de uma força com respeito a um *eixo*

Para verificar as propriedades **P2** e **P3** considere os versores $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$ sobre o plano definido por $(\vec{F}, P)$ e O, com $\hat{e}_1 \parallel \vec{F}$, e o versor $\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \wedge \hat{e}_2$ normal a este plano. Existe um escalar λ tal que $(P - O) = \lambda\hat{e}_1 - d\hat{e}_2$; assim:

$$\begin{aligned} M_{Ou} &= \left[(P - O) \wedge \vec{F}\right] \cdot \hat{u} \\ &= \left[(\lambda\hat{e}_1 - d\hat{e}_2) \wedge F\hat{e}_1\right] \cdot \hat{u} \\ &= Fd(\hat{e}_3 \cdot \hat{u}) \end{aligned}$$

Portanto, $M_{Ou} \neq 0$ somente se $\hat{u}$ for não-ortogonal a $\hat{e}_3$. Como $\hat{e}_3$ é normal ao plano definido pela força e pelo polo, tal condição implica que o eixo Ou não pode estar contido neste plano.





Equivalência entre sistemas de força

Considere um sistema de forças genérico em que as forças possam ser modeladas como *vetores deslizantes*. Assuma, em princípio, um sistema de forças concentradas:

$$\mathcal{F} = \{(\vec{F}_i, P_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Escolhendo um polo A, pode-se criar, um sistema equivalente a $\mathcal{F}$ adicionando pares de forças opostas $(\vec{F}_i, A)$ e $(-\vec{F}_i, A)$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, todas aplicadas em A.

$$\mathcal{F} \sim \underbrace{\{(\vec{F}_i, A) : i = 1, 2, \ldots, n\}}_{n \text{ forças aplicadas em A}} \cup \underbrace{\{(\vec{F}_i, P_i), (-\vec{F}_i, A) : i = 1, 2, \ldots, n\}}_{n \text{ binários}}$$

$$\mathcal{F} \sim \{(\vec{R}, A), \vec{M}_A\} \quad \text{com} \quad \vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k \quad \text{e} \quad \vec{M}_A = \sum_{k=1}^{n} (P_i - A) \wedge \vec{F}_i$$

Equivalência entre sistemas de força e mudança de polo de momento

(i) Todo *sistema de forças* em que elas possam ser modeladas como *vetores deslizantes* é *equivalente* a um sistema formado por *no máximo duas forças* ou por *uma força e um binário*.

(ii) Dois sistemas de forças modeladas como vetores deslizantes são equivalentes entre si se, e somente se, suas resultantes de força $\vec{R}$ e de momentos $\vec{M}_O$ são idênticas, qualquer seja o polo O escolhido.

Em particular se, em vez de A quisermos utilizar outro polo B:

$$\mathcal{F} \sim \{(\vec{R}, A), \vec{M}_A\} \sim \{(\vec{R}, B), \underbrace{(-\vec{R}, B), (\vec{R}, A), \vec{M}_A}_{\vec{M}_B}\} \sim \{(\vec{R}, B), \vec{M}_B\}$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + (A - B) \wedge \vec{R}$$

Condição necessária para o equilíbrio

Estática é o estudo das condições necessárias para o *equilíbrio* de corpos materiais e de *estruturas* formadas por múltiplos corpos.

A *condição necessária* para o equilíbrio de um corpo é que o sistema formado por todas as forças sobre ele atuantes, ativas e reativas, seja *equivalente a zero*, ou seja:

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{M}_O = \vec{0}, \text{ para algum polo O}$$

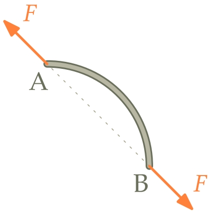
Problemas no espaço (3D)		Problemas no plano (2D)
$M_{Ox} = 0$	$R_x = 0$	$M_{Oz} = 0$
$M_{Oy} = 0$	$R_y = 0$	$R_x = 0$
$M_{Oz} = 0$	$R_z = 0$	$R_y = 0$

Consequentemente, o sistema formado por todas as forças ativas e reativas em uma *estrutura em equilíbrio* também é *equivalente a zero*.

Corpo em equilíbrio sob ação exclusiva de 2 forças

As forças devem ter mesma intensidade, direção e linha de ação, ao passo que suas orientações devem ser opostos.

*De fato, pela condição $\vec{R} = \vec{0}$, os dois vetores de força devem ser opostos. Caso as linhas de ação fossem distintas, tal sistema seria equivalente a um binário, o que tornaria impossível atender à condição $\vec{M}_O = \vec{0}$.
Exemplos típicos deste caso são cabos, fios e barras de treliça ideais.



Corpo em equilíbrio sob ação exclusiva de 3 forças

As três forças devem ser *coplanares* constituindo um sistema de forças paralelas ou um sistema de forças concorrentes.

*Considere o sistema de forças $\{(\vec{F}_1, P_1), (\vec{F}_2, P_2), (\vec{F}_3, P_3)\}$:

- A menos que as três linhas de ação coincidam (o que é um caso consistente com a proposição enunciada), é possível usar o modelo de vetor deslizante para evitar que os pontos de aplicação das três forças sejam colineares, de tal forma que P_1, P_2 e P_3 definam um plano.
- Para garantir a condição de equilíbrio de momentos, é necessário que o momento com respeito a qualquer eixo seja nulo. Com respeito ao eixo P_1P_2, por exemplo, $(\vec{F}_1, P_1)$ e $(\vec{F}_2, P_2)$ não produzem momento. Para haver equilíbrio, a linha de ação de $(\vec{F}_3, P_3)$ deve ser coplanar a P_1P_2e, portanto, contida no plano $P_1P_2P_3$. O mesmo argumento pode ser aplicado às demais forças.
- Sendo coplanares, se não forem paralelas, as linhas de ação de pelo menos duas das forças, digamos $(\vec{F}_1, P_1)$ e $(\vec{F}_2, P_2)$ devem concorrer em um ponto P. Para satisfazer $\vec{M}_P = \vec{0}$, a linha de ação de $(\vec{F}_3, P_3)$ deve passar por P.

Perguntas?

reorsino@usp.br