PME 3100 • Mecânica I • Módulo 1.1

Modelos para sistemas de forças
Vínculos ideais e reações
Diagrama de corpo livre (DCL)
Resultante e momento de sistemas de forças

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Objetivos e competências a serem desenvolvidas

Objetivos (ementa): revisar conceitos de mecânica clássica e desenvolver a compreensão da mecânica de corpos rígidos, com ênfase na cinemática e dinâmica de corpos rígidos.

O aluno deve desenvolver as competências básicas para a *modelagem matemática* de sistemas mecânicos, considerando de forma consistente:

- as leis físicas que regem o comportamento de sistemas materiais;
- os modelos físicos constitutivos propostos para os corpos envolvidos, em particular para a descrição de interações e movimentos;
- as hipóteses simplificadoras adotadas;
- as propriedades algébricas da geometria analítica vetorial.

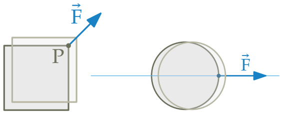
Ambiente Moodle

- Avisos (sobre aulas, atividades, provas e divulgação de notas)
- Registro de presença (durante as aulas presenciais)
- Programa completo da disciplina
- Provas anteriores resolvidas
- Listas de exercícios
- Formulário da disciplina
- Regulamentos e critérios de aprovação
- Bibliografia
- Slides de aula
- Atividades remotas (submissão e correção)
- Material didático extra

Modelos para sistemas de forças, vínculos ideais e reações

Enunciar e discutir as **Leis de Newton** dando particular enforque à terceira, o **princípio da ação e reação**.

Introduzir os **modelos de força** como **vetor aplicado** e como **vetor deslizante** e estabelecer condições de **equivalência** para cada um destes modelos.



Identificar 6 tipos de **vínculos ideais** e as respectivas **forças de reação** associadas às respectivas restrições de movimento impostas:

(a) articulação;
(b) anel (ou guia);
(c) apoio bilateral;
(d) polias e cabos ideais;
(e) barra de treliça;
(f) contatos pontuais sem atrito.

Diagrama de corpo livre, cálculo de resultante e momento

Introduzir o conceito de **diagrama de corpo livre** em que se **isola um corpo** (ou parte de uma estrutura) e se representa graficamente todos os **esforços externos** sobre ele atuantes, **substituindo o símbolo de cada elemento de vínculo** recortado pelas respectivas **componentes de reação** a ele associadas.

Para um sistema de forças concentradas $\mathcal{F} = \{(\vec{F}_i, P_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$, definir o vetor **resultante do sistema de forças** ($\vec{R}$) e o vetor **momento do sistema de forças com respeito ao um polo** O ($\vec{M}_O$):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} (P_k - O) \wedge \vec{F}_k$$

Leis de Newton

I: Todo *corpo* continua em seu estado de *repouso* ou de *movimento uniforme em uma linha reta*, a menos que seja compelido a mudar aquele estado por *forças* aplicadas sobre ele.

II: A *mudança de movimento* é *proporcional à força motora* impressa, e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é aplicada.

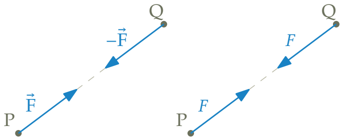
III: A toda *ação* há sempre uma *reação oposta e de igual intensidade*: as *ações mútuas de dois corpos um sobre o outro* são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos.

São válidas as notações com:

(a) símbolos dos *vetores opostos* $\vec{F}$, $-\vec{F}$

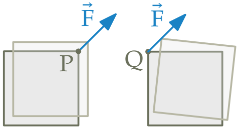
(b) o símbolo da *intensidade comum* F

ao lado de cada segmento orientado que representa *o par ação e reação*.



Modelo de força como vetor aplicado

Força: modelo para a descrição qualitativa e quantitativa das interações entre dois corpos materiais.



A partir de observações experimentais, para obter uma descrição consistente e unívoca de uma força, é necessário especificar:

✓ Sua *intensidade*: $F = |\vec{F}|$
  - ✯ número real positivo
  - ✯ unidade de medida (no SI: N)

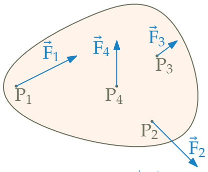
✓ Sua *direção* e *orientação*:
  - ✯ versor $\hat{u} = \dfrac{\vec{F}}{F}$, adimensional e de intensidade 1.

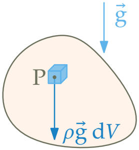
✓ Seu *ponto de aplicação* P.

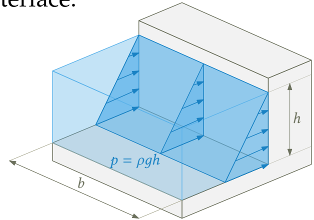
Modelo de vetor aplicado: força representada por um par ordenado $(\vec{F}, P)$.

Sistemas de forças

- Sistemas de *forças concentradas* – conjunto finito de vetores aplicados.
- Sistemas de *forças distribuídas volumétricas* – interação distribuída ao longo do volume do corpo.
- Sistemas de *forças distribuídas superficiais* – interações que se distribuem ao longo de superfícies de interface.



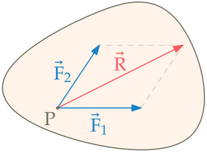




Equivalência entre forças aplicadas em um mesmo ponto

Postulado: a aplicação *simultânea* de duas forças $(\vec{F}_1, P)$ e $(\vec{F}_2, P)$ é *equivalente* à aplicação de uma única força $(\vec{R}, P)$ se, e somente se:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



O postulado estabelece *equivalência* por meio da *composição* (soma) ou *decomposição* de vetores apenas se forem consideradas forças aplicadas de forma *simultânea* em um *mesmo ponto*.

Por indução, estende-se tal regra de *equivalência* ($\sim$) para um sistema de múltiplas forças aplicadas em um mesmo ponto P:

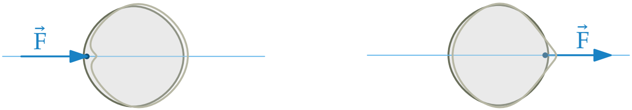
$$\{(\vec{F}_1, P), (\vec{F}_2, P), \ldots, (\vec{F}_n, P)\} \sim \{(\vec{R}, P)\} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

Linha de ação de uma força

A **linha de ação** de uma força $(\vec{F}, P)$ é definida como a reta passante por P e que tem a direção do vetor $\vec{F}$.

Se X é um ponto da linha de ação da força $(\vec{F}, P)$, existe um escalar real λ tal que:

$$(X - P) = \lambda\vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad X = P + \lambda\vec{F}$$



Efeitos da aplicação de duas forças de *mesmas intensidade, direção, orientação e linha de ação*, porém em pontos distintos de um *corpo deformável*.

Modelo de força como vetor deslizante

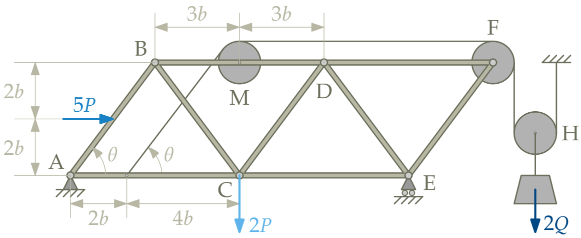
São *equivalentes* duas forças que têm *mesmas intensidade, direção, orientação e linha de ação* se aplicadas sobre um *mesmo corpo rígido*, ou seja:

$$(\vec{F}, P) \sim (\vec{F}, Q) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} : \ (P - Q) = \lambda \vec{F}$$

Efeitos da aplicação de duas forças de *mesmas intensidade, direção, orientação e linha de ação*, porém em pontos distintos de um *corpo rígido*.

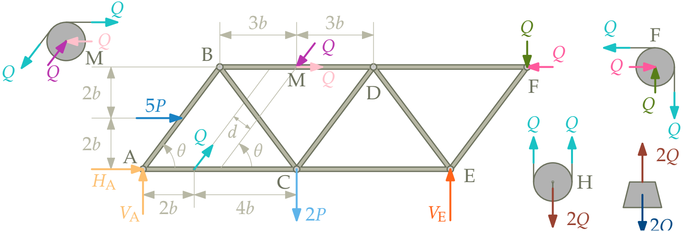
Vínculos ideais e reações

- Modelos idealizados para elementos de vinculação usados para restringir alguns movimento de um corpo.
- Reações – esforços, *a priori incógnitos*, associados às restrições de movimento impostas pelos vínculos.
- Em um primeiro momento, iremos focar em elementos de vínculo idealizados cujo efeito pode ser modelado com um par de ação e reação de forças concentradas.



Vínculos ideais e reações

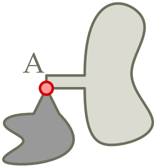
- Basicamente, se um vínculo restringe o movimento de um ponto A em uma dada direção, há uma componente de força de reação aplicada em A nesta direção.
- Por outro lado, se não há qualquer restrição ao movimento de A em uma dada direção, o elemento de vínculo idealizado não terá componente de força nesta direção.
- Na concepção idealizada uma componente de reação terá o valor que for necessário para impedir o movimento em questão.

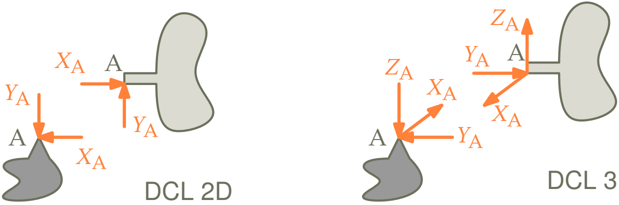


(a) Articulação

Vincula um ponto A de um corpo a um ponto A de outro corpo, garantindo que eles sempre tenham uma posição comum. Fornece uma reação de:

- ✘ direção desconhecida;
- ✘ orientação desconhecida;
- ✘ intensidade desconhecida.





Diagramas de corpo livre para elementos de articulação em problemas 2D e 3D.

(b) Anel (ou guia)

Vincula um ponto A de um corpo a um eixo definido em outro corpo. Fornece uma reação de:

- direção normal ao eixo;
- orientação desconhecida;
- intensidade desconhecida.

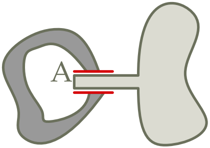
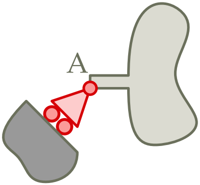


Diagrama de corpo livre para um elemento de anel em problemas 2D e 3D.

(c) Apoio bilateral

Vincula um ponto A de um corpo a uma superfície definida em outro corpo. Fornece uma reação de:

- ✓ direção normal à superfície;
- ✗ orientação desconhecida;
- ✗ intensidade desconhecida.



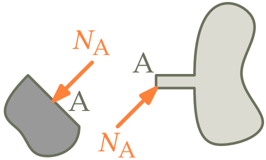
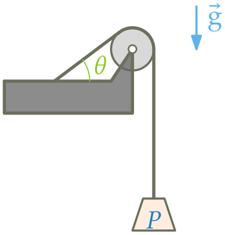
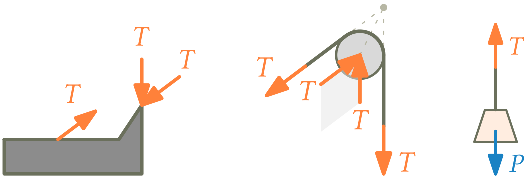


Diagrama de corpo livre para elementos de apoio bilateral sem atrito em problemas 2D e 3D.

(d) Polias e cabos ideais

- Cabo inextensível e de massa desprezível.
- Polia rígida, de massa desprezível, que pode girar livremente, sem atrito em torno de seu centro.
- Tração T no cabo se mantém **constante** ao longo de seu comprimento.
- As reações aplicadas à polia pela articulação devem ser exatamente opostas às componentes de tração aplicadas ao cabo nos cortes.

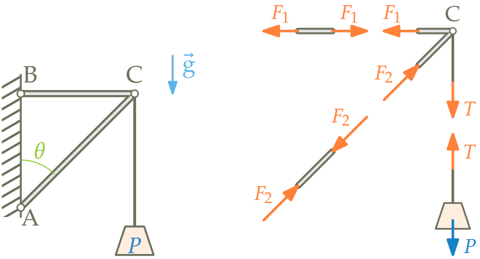




DCLs

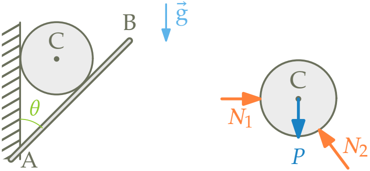
(e) Barra de treliça

- Barra rígida, de massa desprezível, cujas extremidades são montadas em articulações ideais.
- Interações desta barra com os demais corpos se dá **exclusivamente** por meio de forças aplicadas em suas extremidades.
- Considerando cortes que isolem qualquer porção material da barra, tal porção estará em equilíbrio sujeita a um par de forças opostas aplicadas sobre a linha definida por seu eixo longitudinal.



(f) Contatos pontuais sem atrito entre sólidos

- Contatos sem atrito entre sólidos podem ser modelados por meio de forças aplicadas nos pontos de contato, ortogonais às respectivas superfícies.
- Diferentemente dos apoios bilaterais, estas reações devem ser obrigatoriamente orientadas no sentido de afastamento das superfícies.



Nota: o modelo de Coulomb para contato com atrito será tratado no Módulo 1.3.

1 Introdução ao curso
2 Resumo do módulo
3 Modelos para sistemas de forças
4 Vínculos ideais e reações
5 Diagrama de corpo livre (DCL)
6 Sistemas de forças: resultante e momento

Diagrama de corpo livre (DCL)

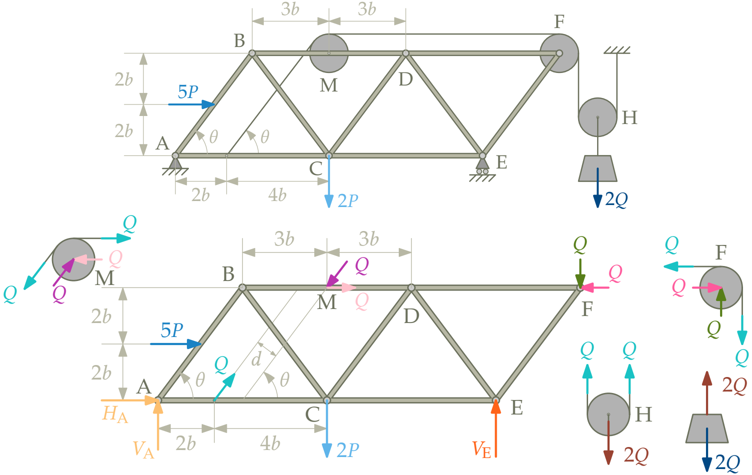


Diagrama de corpo livre (DCL)

Ao isolarmos um corpo ou uma parte de uma estrutura para esboçar um **diagrama de corpo livre (DCL)**, devemos substituir o símbolo do elemento de cada vínculo recortado pelas respectivas componentes de reações a ele associadas.

No caso de **vínculos internos**, a representação das componentes de reação deve ser consistente com o **princípio da ação e reação**.

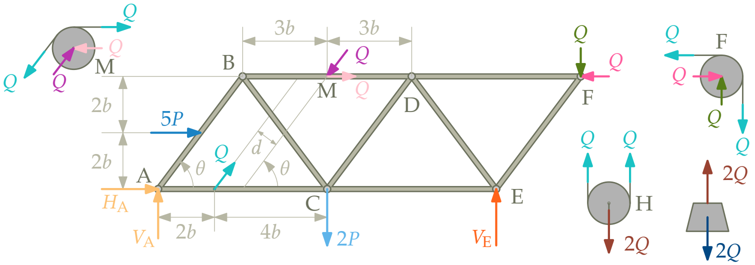


Diagrama de corpo livre (DCL)

- ✓ Para elementos simples como polias ideais e blocos sustentados por fios, por exemplo, temos casos elementares de equilíbrio, sendo trivial a determinação dos valores das componentes de reações. Tais valores, portanto, podem ser representados diretamente no DCL.
- ✓ Para reações cuja determinação é não trivial, indique o nome da respectiva incógnita ao lado do símbolo da componente.
- ✓ No caso de vínculos bilaterais, não é necessário saber *a priori* a orientação da componente (adote a convenção de sua preferência).

Resultante e momento de um sistema de forças concentradas

Considere um sistema de forças concentradas:

$$\mathcal{F} = \{(\vec{F}_i, P_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

O vetor **resultante do sistema de forças** é definido pela expressão:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

O vetor **momento do sistema de forças com respeito ao um polo** O é definido pela expressão:

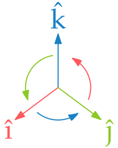
$$\vec{M}_O = \sum_{k=1}^{n} (P_k - O) \wedge \vec{F}_k$$

Produto vetorial

O *produto vetorial* $\vec{a} \wedge \vec{b}$ entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ definidos em um espaço euclidiano tridimensional e que formam entre si um ângulo $\theta \in [0, \pi]$ é:

- um vetor nulo, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos ($\theta = 0$ ou $\theta = \pi$);
- um vetor de intensidade $|\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$, direção mutuamente ortogonal a $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e orientação definida pela *regra da mão direita*, se $0 < \theta < \pi$.

Exemplo – cálculo de uma parcela genérica do vetor momento usando a propriedade distributiva:



$$(\mathrm{P}_r - \mathrm{O}) = x_r\hat{\imath} + y_r\hat{\jmath} + z_r\hat{k}$$

$$\vec{F}_r = X_r\hat{\imath} + Y_r\hat{\jmath} + Z_r\hat{k}$$

$$(\mathrm{P}_r - \mathrm{O}) \wedge \vec{F}_r = (y_r Z_r - z_r Y_r)\hat{\imath} + (z_r X_r - x_r Z_r)\hat{\jmath} + (x_r Y_r - y_r X_r)\hat{k}$$

Perguntas?

reorsino@usp.br