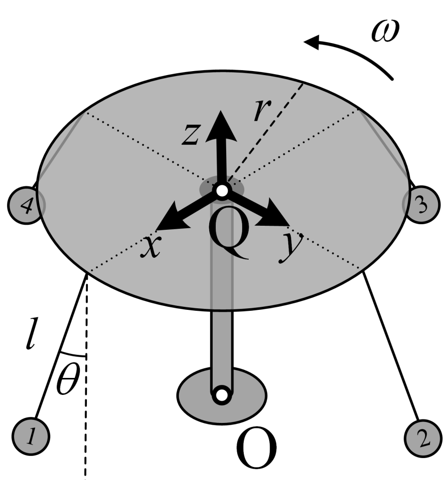
PME 3100 – MECÂNICA I – Atividade E3.2 – Reoferecimento 2023

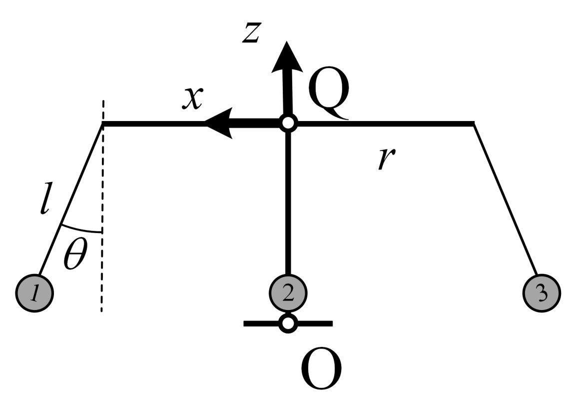
- Esta atividade é composta por 1 questão e deve ser realizada *individualmente*.
- Antes de realizar sua submissão, o aluno deve ler as regras para a realização das atividades remotas.
- Além da pontuação indicada em cada um dos itens, o aluno poderá receber até **0,2 ponto** no quesito "Apresentação e Diagramação", conforme avaliação que receber de seus colegas.

Enunciado

Quatro amigos que estavam no carrinho de montanha russa da atividade anterior resolveram se divertir em um outro brinquedo do mesmo parque de diversões. Nesse caso, o brinquedo escolhido foi uma versão simplificada de um "chapéu mexicano", que pode ser modelado como um disco homogêneo maciço com raio $r = 4b$, massa $M = 12m$ e $J_{Qz} = \frac{1}{2}Mr^2$, que gira com velocidade angular constante, ω, fixo em um eixo vertical. Na borda do disco são penduradas de forma homogeneamente distribuída quatro cadeirinhas com massa m (cada uma), fixas ao disco por correntes que podem ser modeladas como cabos ideais de comprimento $l = 5b$. Com a rotação do disco, as cadeirinhas se afastam de sua posição inicial, descrevendo um ângulo $\theta = \arctan\frac{3}{4}$ com a vertical, que permanece constante ao longo do funcionamento do brinquedo. Abaixo são apresentadas duas figuras que mostram o brinquedo de forma idealizada. Na figura (a) é apresentada uma vista tridimensional do brinquedo e na figura (b) a vista lateral do mesmo brinquedo.



(a)



(b)

Considerando que:

- o ponto O esteja em um referencial inercial;
- os efeitos da inércia do eixo que sustenta o disco possam ser desprezados;
- o ponto Q seja solidário ao disco e seja a origem de um sistema de coordenadas $Q_{xyz} = (Q, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$;

- as dimensões de cada cadeirinha sejam desprezíveis em relação às dimensões do restante do problema;
- o ângulo θ seja igual para todas as cadeirinhas;
- a posição de cada cadeirinha esteja sempre restrita a um mesmo plano, ou seja, as cadeirinhas 1 e 3 sempre estão no plano xz e as cadeirinhas 2 e 4 sempre estão no plano yz,

em função dos parâmetros m, b e ω, determine:

a) (1,2 ponto) A matriz de inércia do brinquedo como um todo no sistema de coordenadas Q_{xyz}.
b) (0,6 ponto) O momento de inércia com respeito ao eixo de simetria do brinquedo (eixo vertical passando pelos pontos O e Q).
c) (1,0 ponto) A posição (G-Q) do centro de massa do brinquedo.
d) (1,0 ponto) A matriz de inércia do brinquedo em relação a seu centro de massa.
e) (1,0 ponto) O valor da energia cinética do brinquedo.

Resolução comentada

(a) A matriz de inércia do brinquedo, $\mathrm{J}_{\mathrm{Q},b}$, é dada pela soma das matrizes de inércia do disco, $\mathrm{J}_{\mathrm{Q},d}$, e das quatro cadeirinhas, $\mathrm{J}_{\mathrm{Q},c}$. Desta forma:

$$\mathrm{J}_{\mathrm{Q},b} = \mathrm{J}_{\mathrm{Q},d} + \mathrm{J}_{\mathrm{Q},c}$$

Sendo conhecido o momento de inércia do disco com respeito ao eixo z, sabe-se que os momentos de inércia em relação aos eixos x e y são dados por: $J_{\mathrm{Q}x} = J_{\mathrm{Q}y} = \frac{1}{2}J_{\mathrm{Q}z}$. Por sua vez, pela simetria do disco, os produtos de inércia são nulos. Desta forma:

$$\mathrm{J}_{\mathrm{Q},d} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}Mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}Mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}Mr^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(12m)(4b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(12m)(4b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(12m)(4b)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 0 & 0 \\ 0 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & 96 \end{bmatrix} mb^2$$

Já matriz de inércia das cadeirinhas, $\mathrm{J}_{\mathrm{Q},c}$, é dada pela seguinte expressão:

$$\mathrm{J}_{\mathrm{Q},c} = \begin{bmatrix} J_{\mathrm{Q}x,c} & -J_{\mathrm{Q}xy,c} & -J_{\mathrm{Q}xz,c} \\ -J_{\mathrm{Q}xy,c} & J_{\mathrm{Q}y,c} & -J_{\mathrm{Q}yz,c} \\ -J_{\mathrm{Q}xz,c} & -J_{\mathrm{Q}yz,c} & J_{\mathrm{Q}z,c} \end{bmatrix}$$

Os momentos e produtos de inércia das cadeirinhas dependem da posição de cada cadeirinha em relação ao ponto Q. Desta forma:

$$(\mathrm{P}_1 - \mathrm{Q}) = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k} = (r + l\sin\theta)\vec{\imath} + (0)\vec{\jmath} + (-l\cos\theta)\vec{k} = (4b + 5b.\frac{3}{5})\vec{\imath} - (5b.\frac{4}{5})\vec{k} = 7b\vec{\imath} - 4b\vec{k}$$

$$(\mathrm{P}_2 - \mathrm{Q}) = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k} = (0)\vec{\imath} + (r + l\sin\theta)\vec{\jmath} + (-l\cos\theta)\vec{k} = (4b + 5b.\frac{3}{5})\vec{\jmath} - (5b.\frac{4}{5})\vec{k} = 7b\vec{\jmath} - 4b\vec{k}$$

$$(\mathrm{P}_3 - \mathrm{Q}) = x_3\vec{\imath} + y_3\vec{\jmath} + z_3\vec{k} = (-r - l\sin\theta)\vec{\imath} + (0)\vec{\jmath} + (-l\cos\theta)\vec{k} = -(4b + 5b.\frac{3}{5})\vec{\imath} - (5b.\frac{4}{5})\vec{k} = -7b\vec{\imath} - 4b\vec{k}$$

$$(\mathrm{P}_4 - \mathrm{Q}) = x_4\vec{\imath} + y_4\vec{\jmath} + z_4\vec{k} = (0)\vec{\imath} + (-r - l\sin\theta)\vec{\jmath} + (-l\cos\theta)\vec{k} = -(4b + 5b.\frac{3}{5})\vec{\jmath} - (5b.\frac{4}{5})\vec{k} = -7b\vec{\jmath} - 4b\vec{k}$$

Considerando as expressões para os momentos de inércia de um sistema de partículas, temos:

$$\begin{aligned}
J_{Qx,c} &= m(y_1^2 + z_1^2) + m(y_2^2 + z_2^2) + m(y_3^2 + z_3^2) + m(y_4^2 + z_4^2)\\
J_{Qx,c} &= m[(0)^2 + (-4b)^2] + m[(7b)^2 + (-4b)^2] + m[(0)^2 + (-4b)^2] + m[(-7b)^2 + (-4b)^2]\\
J_{Qx,c} &= 16mb^2 + 49mb^2 + 16mb^2 + 16mb^2 + 49mb^2 + 16mb^2\\
J_{Qx,c} &= 162mb^2
\end{aligned}$$

Por simetria, $J_{Qy,c} = J_{Qx,c}$. Logo:

$$J_{Qy,c} = 162mb^2$$

E, por fim:

$$\begin{aligned}
J_{Qz,c} &= m(x_1^2 + y_1^2) + m(x_2^2 + y_2^2) + m(x_3^2 + y_3^2) + m(x_4^2 + y_4^2)\\
J_{Qz,c} &= m[(7b)^2 + (0)^2] + m[(0)^2 + (7b)^2] + m[(-7b)^2 + (0)^2] + m[(0)^2 + (-7b)^2]\\
J_{Qz,c} &= 49mb^2 + 49mb^2 + 49mb^2 + 49mb^2\\
J_{Qz,c} &= 196mb^2
\end{aligned}$$

Pela simetria do problema, os produtos de inércia são nulos. Outra forma de demonstrar isso é considerando as expressões dos produtos de inércia para um sistema de partículas. Desta forma, temos:

$$J_{Qxy,c} = m(x_1y_1) + m(x_2y_2) + m(x_3y_3) + m(x_4y_4)$$

Como $y_1 = x_2 = y_3 = x_4 = 0$, $J_{Qxy,c} = 0$. Por outro lado:

$$\begin{aligned}
J_{Qxz,c} &= m(x_1z_1) + m(x_2z_2) + m(x_3z_3) + m(x_4z_4)\\
J_{Qxz,c} &= m(7b)(-4b) + m(0)(-4b) + m(-7b)(-4b) + m(0)(-4b))\\
J_{Qxz,c} &= -28mb^2 + 28mb^2\\
J_{Qxz,c} &= 0
\end{aligned}$$

Como $J_{Qyz,c} = J_{Qxz,c}$, logo $J_{Qyz,c} = 0$. Desta forma, a matriz de inércia das cadeirihas, $\mathrm{J}_{Q,c}$, é dada por:

$$\mathrm{J}_{Q,c} = \begin{bmatrix} 162 & 0 & 0\\ 0 & 162 & 0\\ 0 & 0 & 196 \end{bmatrix} mb^2$$

E, por sua vez, a matriz de inércia do conjunto é dado por:

$$\mathrm{J}_{Q,b} = \begin{bmatrix} 48+162 & 0 & 0\\ 0 & 48+162 & 0\\ 0 & 0 & 96+196 \end{bmatrix} mb^2 = \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0\\ 0 & 210 & 0\\ 0 & 0 & 292 \end{bmatrix} mb^2$$

Ou seja:

$$\boxed{J_{Qx,b} = 210mb^2}$$
$$\boxed{J_{Qy,b} = 210mb^2}$$
$$\boxed{J_{Qz,b} = 292mb^2}$$
$$\boxed{J_{Qxy,b} = 0}$$
$$\boxed{J_{Qxz,b} = 0}$$
$$\boxed{J_{Qyz,b} = 0}$$

Atribua um valor na escala 0/7 a 7/7 para a solução de seu colega sendo 1/7 para cada valor correto da matriz de inércia (emoldurados) e 1/7 para o raciocínio.

(b) O momento de inércia do conjunto em relação a seu eixo de simetria é o momento de inércia do brinquedo em relação ao eixo z, $J_{Qz,b}$, obtido no item anterior. Logo:

$$\boxed{J_{Qz,b} = 292mb^2}$$

Atribua um valor na escala 0/2 a 2/2 para a solução de seu colega respeitando o seguinte critério:

2/2: resposta inteiramente correta.

1/2: raciocínio correto, porém com algum erro de cálculo.

0/2: demais casos.

(c) Devido à simetria do brinquedo, a posição do centro de massa do conjunto, G_b, nas direções x e y são nulas. Por sua vez, na direção z, a posição do centro de massa do brinquedo é dada pela ponderação entre a posição do centro de massa do disco (que é sempre solidária ao ponto Q), G_d, e a posição do centro de massa das cadeirinhas (que varia em função do ângulo θ), G_c, em função da massa total do conjunto e da massa de cada elemento. Logo:

$$(M + 4m)z_{G,b}\vec{k} = Mz_{G,d}\vec{k} + 4mz_{G,c}\vec{k}$$
$$(12m + 4m)z_{G,b}\vec{k} = 12mz_{G,d}\vec{k} + 4mz_{G,c}\vec{k}$$
$$z_{G,b}\vec{k} = \frac{12m(0)\vec{k} + 4m(-l\cos\theta)\vec{k}}{16m}$$
$$z_{G,b}\vec{k} = \frac{4m(-5b.\frac{4}{5})\vec{k}}{16m}$$
$$z_{G,b}\vec{k} = -\frac{16}{16}b\vec{k} = -b\vec{k}$$

Logo:

$$\boxed{(G_b - Q) = -b\vec{k}}$$

Atribua um valor na escala 0/2 a 2/2 para a solução de seu colega respeitando o seguinte critério:

2/2: resposta inteiramente correta.

1/2: raciocínio correto, porém com algum erro de cálculo.

0/2: demais casos.

(d) A matriz de inércia do brinquedo em relação a seu centro de massa, $J_{G,b}$, pode ser obtida a partir do Teorema dos Eixos Paralelos (Teorema de Steiner) da seguinte forma:

$$J_{Q,b} = J_{G,b} + (M+4m)\begin{bmatrix} y_{G,b}^2 + z_{G,b}^2 & -x_{G,b}y_{G,b} & -x_{G,b}z_{G,b} \\ -x_{G,b}y_{G,b} & x_{G,b}^2 + z_{G,b}^2 & -y_{G,b}z_{G,b} \\ -x_{G,b}z_{G,b} & -y_{G,b}z_{G,b} & x_{G,b}^2 + y_{G,b}^2 \end{bmatrix}$$

$$J_{G,b} = J_{Q,b} - (M+4m)\begin{bmatrix} y_{G,b}^2 + z_{G,b}^2 & -x_{G,b}y_{G,b} & -x_{G,b}z_{G,b} \\ -x_{G,b}y_{G,b} & x_{G,b}^2 + z_{G,b}^2 & -y_{G,b}z_{G,b} \\ -x_{G,b}z_{G,b} & -y_{G,b}z_{G,b} & x_{G,b}^2 + y_{G,b}^2 \end{bmatrix}$$

Como:

$$(G_b - Q) = -b\vec{k}$$

Temos:

$$J_{G,b} = J_{Q,b} - (12m+4m)\begin{bmatrix} (-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{G,b} = J_{Q,b} - \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} mb^2$$

Como $J_{Q,b}$ é conhecido, obtido no item (a), chega-se a:

$$J_{G,b} = \begin{bmatrix} 210 & 0 & 0 \\ 0 & 210 & 0 \\ 0 & 0 & 292 \end{bmatrix} mb^2 - \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} mb^2 = \begin{bmatrix} 194 & 0 & 0 \\ 0 & 194 & 0 \\ 0 & 0 & 292 \end{bmatrix} mb^2$$

Ou seja:

$$\boxed{J_{Gx,b} = 194mb^2}$$
$$\boxed{J_{Gy,b} = 194mb^2}$$
$$\boxed{J_{Gz,b} = 292mb^2}$$
$$\boxed{J_{Gxy,b} = 0}$$
$$\boxed{J_{Gxz,b} = 0}$$
$$\boxed{J_{Gyz,b} = 0}$$

Atribua um valor na escala 0/7 a 7/7 para a solução de seu colega sendo 1/7 para cada valor correto da matriz de inércia (emoldurados) e 1/7 para o raciocínio. Note que com a resposta deste item depende da resposta do item (a). Desta forma, não considere como erro de cálculo neste item erros que já tenham sido considerados no item (a).

(e) A energia cinética do brinquedo, T_b, é dada pela seguinte expressão:

$$T_b = \frac{1}{2}m|\vec{v}_{G,b}|^2 + \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\,.\mathrm{J}_{G,b}.\,\vec{\omega}$$

Como o centro de massa do brinquedo não sofre translações, o módulo de sua velocidade, $|\vec{v}_{G,b}|$, é nulo. Logo:

$$T_b = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\,.\mathrm{J}_{G,b}.\,\vec{\omega}$$

Por sua vez, a velocidade angular do brinquedo é igual a:

$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

Logo:

$$T_b = \frac{1}{2}J_{Gz,b}.\omega^2 = \frac{1}{2}(292mb^2)\omega^2$$
$$\boxed{T_b = 146mb^2\omega^2}$$

Atribua um valor na escala 0/2 a 2/2 para a solução de seu colega considerando um valor de 1/2 para o valor correto da energia cinética e 1/2 para o raciocínio correto.