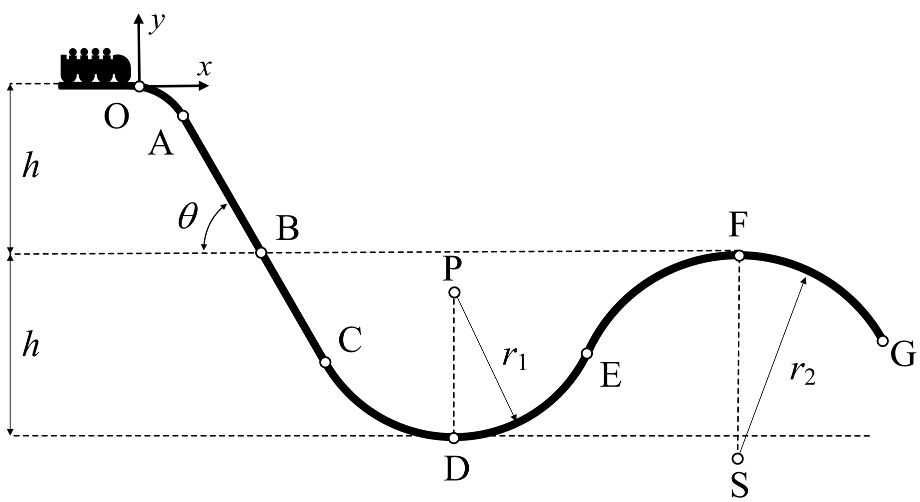
PME 3100 – MECÂNICA I – Atividade E3.1 – Reoferecimento 2023

- Esta atividade é composta por 1 questão e deve ser realizada *individualmente*.
- Antes de realizar sua submissão, o aluno deve ler as regras para a realização das atividades remotas.
- Além da pontuação indicada em cada um dos itens, o aluno poderá receber até **0,2 ponto** no quesito "Apresentação e Diagramação", conforme avaliação que receber de seus colegas.

Enunciado

Um carrinho de montanha russa com massa m parte do repouso do ponto O, onde está definida uma base fixa $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, e percorre a trajetória dada pelos pontos OABCDEFG, conforme mostra a figura abaixo.

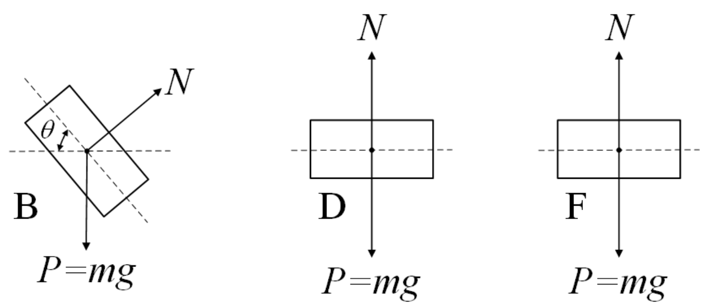


Após uma leve curvatura formada pelo arco de circunferência OA, o carrinho percorre uma seção reta formada pelos pontos ABC, cuja inclinação com o plano horizontal é dada pelo ângulo θ. Após a seção reta, o carrinho passa pela curva formada pelo arco de circunferência CDE, com raio r_1 e centro em P. Em seguida, o carrinho percorre o trecho final da trajetória formado pelo arco de circunferência EFG com raio r_2 e centro em S. A distância entre os pontos de menor e maior elevação da trajetória do carrinho é $2h$. Considerando que as dimensões do carrinho sejam muito menores do que a distância percorrida em sua trajetória e que o sistema seja conservativo, pede-se:

a) **(0,9)** Os Diagramas de Corpo Livre (DCLs) do carrinho nas posições B, D e F.
b) **(0,8)** O valor da velocidade escalar do carrinho nos pontos B, D e F.
c) **(1,0)** As expressões, em função dos dados fornecidos no problema, dos vetores de aceleração ($\vec{a}_B$, $\vec{a}_D$ e $\vec{a}_F$) do carrinho nas posições B, D e F tanto em relação ao referencial inercial apresentado na figura quanto em referências intrínsecas.
d) **(0,8)** A força de contato entre a pista e o carrinho nos pontos B, D e F.
e) **(0,8)** O valor mínimo do raio r_2 para que o carrinho não perca o contato com a pista no ponto F.
f) **(0,5)** A relação entre o ângulo θ e a velocidade do carrinho no ponto D. Justifique sua resposta.

Resolução comentada

(a) Os Diagramas de Corpo Livre (DCLs) do carrinho em cada uma das posições solicitadas (pontos B, D e F) são dados a seguir:



Atribua um valor na escala 0/3 a 3/3 para a solução de seu colega sendo 1/3 atribuído para **cada DCL correto**.

(b) O princípio do trabalho e energia pode ser usado para se determinar a velocidade escalar do carrinho em cada uma das posições definidas. Considerando o referencial inercial com origem no ponto O, tanto a energia cinética (T) quanto a energia potencial (U) do carrinho são nulas em sua posição inicial. Como o sistema é dito conservativo, a variação da energia mecânica, ΔE é zero, e a seguinte igualdade é válida:

$$T_\text{O} + U_\text{O} = T_\text{B} + U_\text{B} = T_\text{D} + U_\text{D} = T_\text{F} + U_\text{F} = 0$$

Desta forma, para o ponto B temos:

$$\begin{aligned}
&T_\text{B} = -U_\text{B} \\
&\frac{1}{2} m v_\text{B}^2 = -mg(h_\text{B} - h_\text{O}) \\
&v_\text{B}^2 = -2g(-h - 0) \\
&\boxed{v_\text{B} = \sqrt{2hg}}
\end{aligned}$$

Analogamente, para o ponto D:

$$\begin{aligned}
&T_\text{D} = -U_\text{D} \\
&\frac{1}{2} m v_\text{D}^2 = -mg(h_\text{D} - h_\text{O}) \\
&v_\text{D}^2 = -2g(-2h - 0) \\
&\boxed{v_\text{D} = 2\sqrt{hg}}
\end{aligned}$$

Por fim, para o ponto F:

$$T_F = -U_F$$
$$\frac{1}{2}mv_F^2 = -mg(h_F - h_O)$$
$$v_F^2 = -2g(-h - 0)$$
$$\boxed{v_F = \sqrt{2hg}}$$

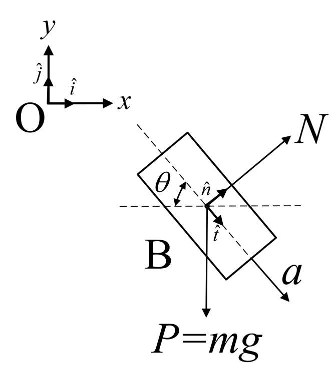
Considerando que cada uma das respostas corretas vale até 2/6, atribua um valor na escala 0/6 a 6/6 para a solução de seu colega respeitando o seguinte critério:

2/6: resposta inteiramente correta;

1/6: raciocínio correto, porém com algum erro de cálculo.

0/6: demais casos.

(c) Para a solução deste item, pode ser adotado o teorema da resultante. Considerando primeiramente o referencial com componentes intrínsecas que acompanha o carrinho em sua trajetória, para a posição B, a qual faz parte de uma trajetória retilínea, apenas a aceleração tangencial, paralela à velocidade, está presente.



Desta forma, chega-se à:

$$mg\cos(90° - \theta) = ma_B$$
$$a_B = g\sin\theta$$

Lembrando que:

$$sin(90° - \theta) = \cos(\theta)$$
$$cos(90° - \theta) = \sin(\theta)$$

Como a direção da aceleração na posição B é paralela à pista e seu sentido para baixo, o vetor aceleração do carrinho nesta posição, em coordenadas intrínsecas, é dado por:

$$\boxed{\vec{a}_B = g\sin\theta\vec{t}}$$

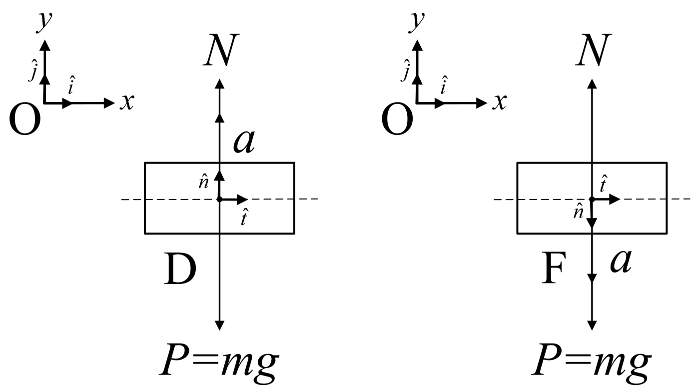
Considerando a direção tangente (intrínseca) nas coordenadas do referencial inercial:

$$\vec{t} = \cos\theta\vec{\imath} - \sin\theta\vec{\jmath}$$

Chega-se ao vetor aceleração na posição B nas coordenadas do referencial inercial:

$$\vec{a}_B = g\sin\theta(\cos\theta\vec{\imath} - \sin\theta\vec{\jmath})$$
$$\boxed{\vec{a}_B = g(\sin\theta\cos\theta\vec{\imath} - \sin^2\theta\vec{\jmath})}$$

Para os pontos D e F, por outro lado, considerando primeiramente o referencial intrínseco, a resultante das forças externas que atuam sobre o carrinho encontra-se apenas na direção normal.



Desta forma, não há aceleração tangencial e aceleração normal pode ser obtida diretamente a partir do valor da velocidade e do raio de curvatura em cada posição. Logo:

$$a_D = \frac{v_D^2}{r_1} = \frac{(2\sqrt{hg})^2}{r_1}$$
$$a_D = \frac{4hg}{r_1}$$

$$a_F = \frac{v_F^2}{r_2} = \frac{(\sqrt{2hg})^2}{r_2}$$
$$a_F = \frac{2hg}{r_2}$$

Para ambas as posições, a aceleração está na direção normal do referencial intrínseco, $\vec{n}$, sempre apontando para o centro do raio de curvatura. Logo:

$$\boxed{\vec{a}_D = \frac{4hg}{r_1}\vec{n}}$$

$$\boxed{\vec{a}_F = \frac{2hg}{r_2}\vec{n}}$$

Passando para as coordenadas do referencial inercial na posição D:

$$\vec{n} = \vec{j}$$

E na posição F:

$$\vec{n} = -\vec{j}$$

Logo, os vetores aceleração nas posições D e F são dados por:

$$\boxed{\vec{a}_D = \frac{4hg}{r_1}\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{a}_F = -\frac{2hg}{r_2}\vec{j}}$$

Considerando que a resposta obtida para cada aceleração de forma correta vale até 2/12 (em um total de 6 respostas - emolduradas - sendo 3 acelerações considerando 2 referenciais), atribua um valor na escala 0/12 a 12/12 para a solução de seu colega respeitando o seguinte critério:

2/12: resposta inteiramente correta;

1/12: raciocínio correto, porém com algum erro de cálculo.

0/12: demais casos.

(d) Novamente, considerando o teorema da resultante, é possível se obter a força de contato entre a pista e o carrinho (força normal). Para todos os casos, a partir do equilíbrio de forças na direção vertical $\vec{j}$, o resultado já pode ser obtido. Desta forma, na posição B:

$$N_B\vec{j} - mg\cos\theta\vec{j} = 0\vec{j}$$
$$\boxed{N_B = mg\cos\theta}$$

Para a posição D, por sua vez:

$$N_D\vec{j} - mg\vec{j} = ma_D\vec{j}$$
$$N_D = mg + m\frac{4hg}{r_1}$$
$$\boxed{N_D = mg(1 + \frac{4h}{r_1})}$$

E, finalmente, para a posição F:

$$-N_F\vec{n} + mg\vec{n} = ma_F\vec{n}$$
$$N_F = mg - m\frac{2hg}{r_2}$$
$$\boxed{N_F = mg(1 - \frac{2h}{r_2})}$$

Considerando que cada uma das respostas corretas vale até 2/6, atribua um valor na escala 0/6 a 6/6 para a solução de seu colega respeitando o seguinte critério:

2/6: resposta inteiramente correta;

1/6: raciocínio correto, porém com algum erro de cálculo.

0/6: demais casos.

(e) O valor limite para o raio r_2 é obtido quando a força normal no ponto F tende a zero. Logo, para que o carrinho não deixe de ter contato com a pista, o valor da força normal deve ser sempre maior do que zero. Desta forma, a partir da resposta do item anterior:

$$N_F = mg(1 - \frac{2h}{r_2}) > 0$$
$$1 - \frac{2h}{r_2} > 0$$
$$\boxed{r_2 > 2h}$$

Atribua um valor na escala 0/2 a 2/2 para a solução de seu colega considerando 1/2 para o raciocínio correto e 1/2 para o cálculo correto.

(f) Não há relação entre o ângulo θ e a velocidade do carrinho no ponto B pois, o trabalho total entre dois pontos não depende da trajetória percorrida pela partícula, mas apenas das posições inicial e final ocupadas.

Atribua um valor na escala 0/1 a 1/1 para a solução de seu colega considerando 1/1 para a resposta correta e 0/1 para respostas incorretas.