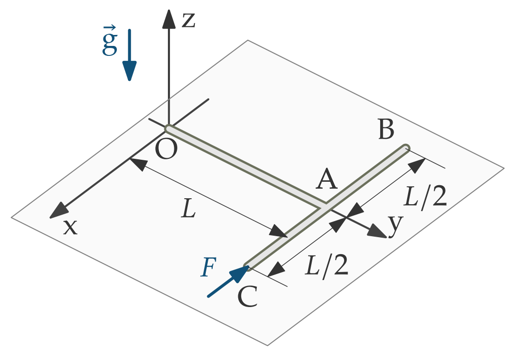
PME 3100 – MECÂNICA I – Reoferecimento 2024 – Prova Substitutiva – 25 de Junho de 2024

Instruções gerais e formulário estão disponíveis na folha de respostas.

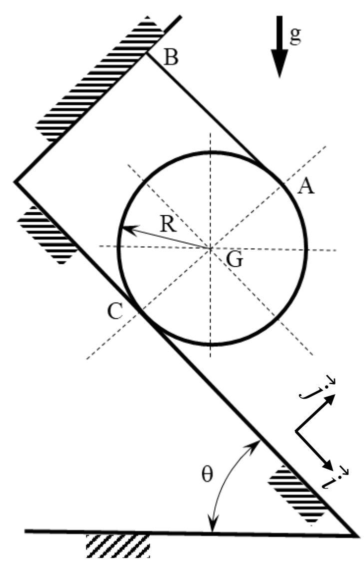
Questão 1 (3,0 pontos). A figura mostra uma peça rígida e homogênea OABC em formato de **T**, composta por duas barras delgadas iguais, de comprimento L e massa m cada, soldadas uma à outra. A peça encontra-se em repouso, apoiada sobre o plano horizontal Oxy, podendo movimentar-se livremente, sem atrito. Em um determinado instante, uma força $\vec{F} = -F\vec{\imath}$ ortogonal à barra e paralela à superfície é aplicada no ponto C. Para o instante imediatamente após a aplicação da força e considerando-se o sistema de coordenadas Oxyz, de versores $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, determine em função dos parâmetros dados:



Dica: para a solução do item (f), utilize o resultado da equação vetorial $\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{v} \Rightarrow \vec{x} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{|\vec{u}|^2}$.

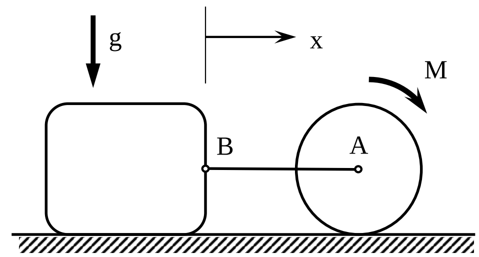
a) (0,5) o diagrama de corpo livre da peça;
b) (0,25) o vetor posição (G – O) do centro de massa G da peça;
c) (0,75) o momento de inércia J_{Gz} e os produtos de inércia J_{Gxz} e J_{Gyz} da peça;
d) (0,5) a aceleração $\vec{a}_G$ do centro de massa G da peça;
e) (0,5) a aceleração angular $\vec{\alpha}$ da peça;
f) (0,5) o vetor posição (P – G) do ponto P da peça para o qual a aceleração é nula no instante considerado.

Questão 2 (3,5 pontos). No sistema ilustrado na figura, um fio flexível ideal foi enrolado no disco de massa m e raio R. O disco está instalado no plano inclinado de um ângulo θ. Ele é liberado a partir do repouso e começa a se mover vencendo o atrito com o plano inclinado, desenrolando o fio. O coeficiente de atrito no contato do disco com o plano é μ. Pede-se:



a) (0,5) desenhar o diagrama de corpo livre do disco;
b) (0,25) determinar a posição do CIR do disco;
c) (0,25) calcular a aceleração do centro de massa do disco supondo conhecida a sua aceleração angular;
d) (1,0) aplicar o Teorema da Resultante (TR) e o Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA) ao disco;
e) (0,5) calcular a aceleração angular do disco;
f) (0,5) calcular a força de tração no fio;
g) (0,5) calcular qual deve ser a inclinação mínima do plano inclinado para que haja movimento, em função do coeficiente de atrito no contato.

Questão 3 (3,5 pontos). O sistema da figura é formado por um disco homogêneo de massa m_A e raio R unido ao bloco de massa m_B por uma barra de massa desprezível bi-articulada. O disco rola sem escorregar. Sobre ele é aplicado um binário M conforme indicado. O coeficiente de atrito entre o bloco e o piso é μ. Sabendo que o sistema parte do repouso, pede-se, para um deslocamento x do bloco:

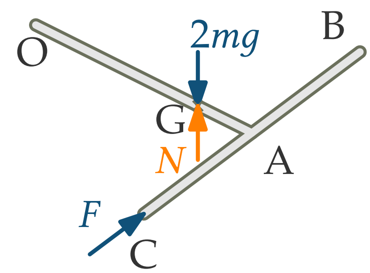


a) (0,5) a energia cinética do sistema em função da velocidade do bloco;
b) (1,0) os DCLs do bloco e do disco;
c) (1,0) o trabalho dos esforços atuantes no sistema em função da posição x do bloco;
d) (0,5) a velocidade do bloco em função da posição x do mesmo;
e) (0,5) a aceleração do bloco.

Resolução comentada

Questão 1 (3,5 pontos)

a) Veja figura ao lado.
(0,5) para o diagrama correto e (0,0) para o diagrama incorreto.



b) Cada barra tem massa m e centros de massa $(G_{OA} - O) = \frac{L}{2}\vec{j}$ e $(G_{BC} - O) = L\vec{j}$. Assim:

$$(G - O) = \frac{m(G_{OA} - O) + m(G_{BC} - O)}{m + m} = \frac{m\left(\frac{L}{2}\vec{j}\right) + m\left(L\vec{j}\right)}{2m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{(G - O) = \frac{3L}{4}\vec{j}}$$

(0,25) para a componente correta.

c) Considerando que a peça é constituída por duas barras rígidas e homogêneas, o momento de inércia J_{Gz} e os produtos de inércia J_{Gxz} e J_{Gyz} da peça são calculados, como segue:

$$J_{Gz} = \left[\frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{4}\right)^2\right] + \left[\frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{4}\right)^2\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Gz} = \frac{7mL^2}{24}}$$

$$J_{Gxz} = \left(0 + m x_{G_{OA}} z_{G_{OA}}\right) + \left(0 + m x_{G_{BC}} z_{G_{BC}}\right) = (0 + m0\,0) + (0 + m0\,0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Gxz} = 0}$$

$$J_{Gyz} = \left(0 + m y_{G_{OA}} z_{G_{OA}}\right) + \left(0 + m y_{G_{BC}} z_{G_{BC}}\right) = (0 + m0\,0) + (0 + m0\,0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{J_{Gyz} = 0}$$

(0,25) por cada resposta correta.

d) Aplicando o TMB à peça:

$$2m\vec{a}_G = -F\vec{i} + (N - 2mg)\vec{k} = 2m(a_{G_x}\vec{i} + a_{G_y}\vec{j}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_{G_x} = \dfrac{-F}{2m} \\ a_{G_y} = 0 \\ N = 2mg \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}_G = \left(\frac{-F}{2m}\right)\vec{i}}$$

(0,3) para a aplicação correta do TMB e (0,2) para o cálculo correto da aceleração do centro de massa.

e) Aplicando o TQMA à peça, com polo em G:

$$\vec{M}_G = (J_{Gz}\alpha)\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{FL}{4}\right)\vec{k} = (J_{Gz}\alpha)\vec{k} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\alpha} = \left(\frac{6F}{7mL}\right)\vec{k}}$$

(0,3) para a aplicação correta do TQMA e (0,2) para o cálculo correto da aceleração angular da peça.

f) Aplicando a expressão do campo de acelerações para a peça, tem-se:

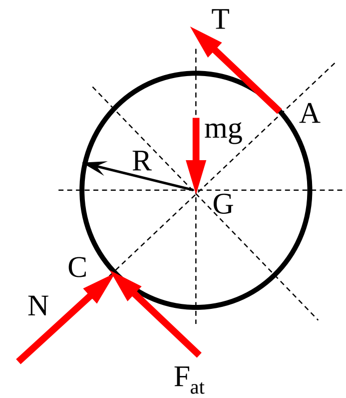
$$\vec{a}_P = \vec{a}_G + \vec{\alpha} \wedge (P - G) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P - G)], \quad \vec{\omega} = \vec{0} \quad \text{(parte do repouso)}$$

$$0 = \left(\frac{-F}{2m}\right)\vec{i} + \left(\frac{6F}{7mL}\right)\vec{k} \wedge (P - G) \quad \Rightarrow \quad \boxed{(P - G) = \left(\frac{-7L}{12}\right)\vec{j}}$$

(0,2) pela aplicação correta da equação do campo de acelerações e (0,3) pela resposta correta.

Questão 2 (3,0 pontos)

a) Veja figura ao lado. (0,5)



b) $\boxed{\text{CIR} \equiv \text{A}}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}_A = \vec{0}$ (0,25)

c) $\vec{v}_G = \vec{v}_A + \omega\vec{k} \wedge (-R\vec{j}) = \omega R\vec{i}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{a}_G = \dot{\omega}R\vec{i}}$ (0,25)

d) Aplicando o TMB ao disco: (0,5)

$$\boxed{m\vec{a}_G = (mg\sin\theta - T - F_{at})\vec{i} + (N - mg\cos\theta)\vec{j}}$$

$$m\dot{\omega}R = mg\sin\theta - T - F_{at}$$
$$0 = N - mg\cos\theta$$

Como o disco escorrega em relação ao piso: $\boxed{F_{at} = \mu N = \mu mg\cos\theta}$

Aplicando o TQMA ao disco, com polo em G: (0,5)

$$\dot{\vec{H}}_G = \vec{M}_G, \quad \vec{H}_G = J_{Gz}\omega\vec{k}, \quad \dot{\vec{H}}_G = \frac{mR^2}{2}\dot{\omega}\vec{k}, \quad \vec{M}_G = (T - F_{at})R\vec{k}$$

$$\frac{mR^2}{2}\dot{\omega}\vec{k} = (TR - \mu mgR\cos\theta) \quad \Rightarrow \quad mR\dot{\omega} = 2T - 2\mu mg\cos\theta$$

e-f) Das expressões acima:

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{2g}{3R}(\sin\theta - 2\mu\cos\theta)} \quad (0,5) \qquad \boxed{T = \frac{mg}{3}(\sin\theta + \mu\cos\theta)} \quad (0,5)$$

g) Condição para que haja movimento: $\dot{\omega} > 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\tan\theta > 2\mu}$ (0,5)

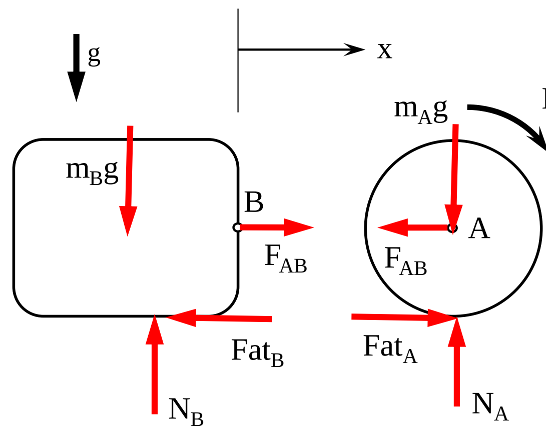
Questão 3 (3,5 pontos)

a) Energia cinética do sistema:

$$T = \frac{m_A v_A^2}{2} + \frac{J_{\mathrm{Az}}}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{m_B v_B^2}{2}$$

$$x = \theta R, \quad J_{\mathrm{Az}} = \frac{m_A R^2}{2}, \quad v_{\mathrm{A}} = v_{\mathrm{B}} = \dot{x} = \dot{\theta} R$$

$$\boxed{T = \frac{1}{4}(3m_{\mathrm{A}} + 2m_{\mathrm{B}})\dot{x}^2} \quad (0{,}5)$$



b) Veja figura ao lado. (0,5 + 0,5)

c) Trabalho dos esforços atuantes no sistema:

$$\boxed{W_{\mathrm{pesoA}} = W_{\mathrm{pesoB}} = W_{\mathrm{normais}} = W_{\mathrm{FatA}} = W_{\mathrm{Finternas}} = 0}$$

Bloco escorrega: $Fat_B = \mu N_B = \mu m_B g$. Portanto:

$$W = M\theta - \mu m_B g x \quad \Rightarrow \quad \boxed{W = (\frac{M}{R} - \mu m_B g)x} \quad (0{,}5 + 0{,}5)$$

d) Aplicando o TEC ao sistema:

$$W = \Delta T \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4}(3m_{\mathrm{A}} + 2m_{\mathrm{B}})\dot{x}^2 = (\frac{M}{R} - \mu m_B g)x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{x} = \sqrt{\frac{4(\frac{M}{R} - \mu m_B g)}{(3m_{\mathrm{A}} + 2m_{\mathrm{B}})}x}} \quad (0{,}5)$$

e) Derivando a expressão de $\dot{x}$ em relação ao tempo:

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{2(\frac{M}{R} - \mu m_B g)}{(3m_{\mathrm{A}} + 2m_{\mathrm{B}})}} \quad (0{,}5)$$