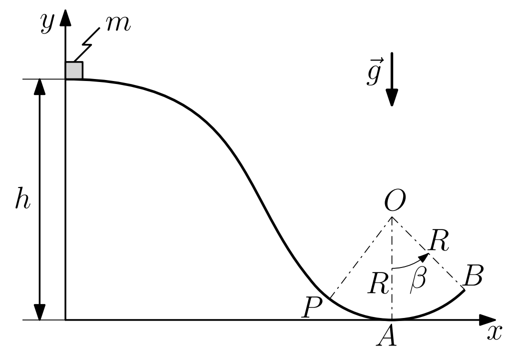
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Prova Substitutiva – 27 de Junho de 2019

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

Questão 1 (3,0 pontos). A figura ao lado ilustra um bloco de massa m que desliza sobre um tobogã, *sem atrito*. O trecho PAB do tobogã tem a forma de um arco de circunferência de centro O e raio R; sabe-se que o ângulo $A\hat{O}B = \beta$. Admitindo que o bloco parte praticamente do repouso, a uma altura h do solo, e que permanece sempre em contato com o tobogã ao longo do seu movimento, pede-se, em função dos parâmetros fornecidos:

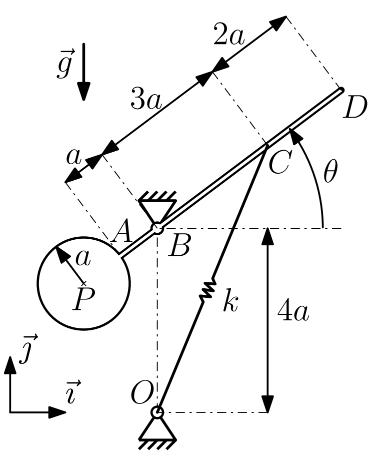


a) o diagrama de corpo livre do bloco para uma posição genérica sobre o tobogã;

b) a força aplicada pelo bloco sobre o tobogã na posição A;

c) a força aplicada pelo bloco sobre o tobogã na posição B;

d) a velocidade $\vec{v}$ e a aceleração $\vec{a}$ do bloco na posição B, expressas em componentes intrínsecas.



Questão 2 (3,5 pontos). A figura ao lado ilustra um corpo rígido *único* de massa total $3m$, composto por um disco homogêneo de centro P, raio a e massa $2m$, soldado a uma barra rígida homogênea AD, de comprimento $6a$ e massa m. Este corpo encontra-se articulado, no ponto B, a uma base fixa. Entre o ponto O da base fixa e o ponto C do corpo é conectada uma mola linear de constante k e comprimento natural $4a$. A coordenada θ mede o ângulo entre a linha PD e a horizontal, conforme indicado. Pede-se:

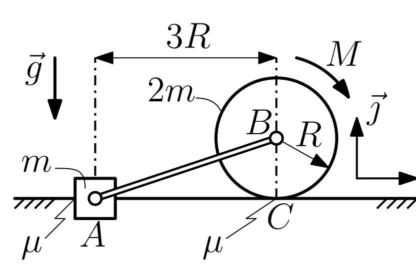
a) o diagrama de corpo livre para uma configuração genérica (como a ilustrada na figura ao lado);

b) o momento de inércia J_{Bz} do corpo;

c) a aceleração angular inicial $\vec{\alpha}$ do corpo, admitindo que o mesmo parta do repouso da posição $\theta = 0$;

d) o maior valor de k para o qual o corpo consegue chegar à posição $\theta = \pi/2$ partindo das mesmas condições iniciais do item anterior.

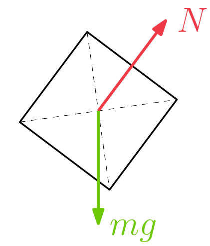
Questão 3 (3,5 pontos). A figura ao lado ilustra um sistema constituído por um bloco rígido homogêneo de centro A e massa m, e por um disco rígido homogêneo de centro B, raio R e massa $2m$. Uma barra rígida AB, de inércia desprezível, tem suas extremidades articuladas a cada um desses corpos. Além disso, o bloco está restrito a deslizar sobre uma guia horizontal enquanto o disco pode rolar apoiado sobre esta mesma guia. Assuma que os coeficientes de atrito cinético nos contatos tanto do bloco quanto do disco com a guia sejam iguais a μ. Considerando a aplicação de um binário $-M\vec{k}$, $M > 0$, sobre o disco, pede-se:



a) os diagramas de corpo livre para o disco e para o bloco;

b) a aceleração $\vec{a}$ do bloco e a aceleração angular $\vec{\alpha}$ do disco, admitindo que *ocorre escorregamento* no contato do disco com a guia.

Resolução da Questão 1 **(3,0 pontos)**



a) O diagrama de corpo livre é indicado na figura ao lado. **(0,4)**

b) Aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento (TQM) para o bloco na posição A, tem-se:

$$\vec{R}^{\text{ext}} = m\vec{a}_A \qquad \text{com} \qquad \vec{a}_A = a_t\,\vec{\tau} + a_n\,\vec{n} = a_t\,\vec{\tau} + \frac{v_A^2}{R}\,\vec{n}$$

$$0\,\vec{\tau} + (N - mg)\,\vec{n} = ma_t\,\vec{\tau} + m\frac{v_A^2}{R}\,\vec{n} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a_t = 0 \\ N_A = m\left(g + \dfrac{v_A^2}{R}\right) \end{cases} \qquad \textbf{(0,5)}$$

Aplicando o Teorema da Energia Cinética (TEC) ao bloco entre a posição inicial e o ponto A, e admitindo a ausência de forças não-conservativas, obtém-se:

$$E_2 - E_1 = W^{\text{ext}} = -\Delta U \quad \Longrightarrow \quad v_A = \sqrt{2gh}$$

Portanto, a força normal atuante no tobogã na posição A é:

$$N_A = mg\left(1 + \frac{2h}{R}\right) \qquad \textbf{(0,5)}$$

c) Aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento (TQM) para o bloco na posição B, tem-se:

$$\vec{R}^{\text{ext}} = m\vec{a}_B \qquad \text{com} \qquad \vec{a}_B = a_t\,\vec{\tau} + a_n\,\vec{n} = a_t\,\vec{\tau} + \frac{v_B^2}{R}\,\vec{n}$$

$$(-mg\sin\beta)\,\vec{\tau} + (N - mg\cos\beta)\,\vec{n} = ma_t\,\vec{\tau} + m\frac{v_B^2}{R}\,\vec{n} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a_t = -g\sin\beta \\ N_B = m\left(g\cos\beta + \dfrac{v_B^2}{R}\right) \end{cases} \qquad \textbf{(0,5)}$$

Aplicando o Teorema da Energia Cinética (TEC) ao bloco entre os pontos A e B, e admitindo a ausência de forças não-conservativas, obtém-se:

$$E_2 - E_1 = W^{\text{ext}} = -\Delta U \quad \Longrightarrow \quad v_B = \sqrt{2g[h - R(1 - \cos\beta)]}$$

Portanto, a força normal atuante no tobogã na posição B é:

$$N_B = mg\left(\frac{2h}{R} + 3\cos\beta - 2\right) \qquad \textbf{(0,5)}$$

d) Considerando a solução do item anterior, sabe-se que, no ponto B:

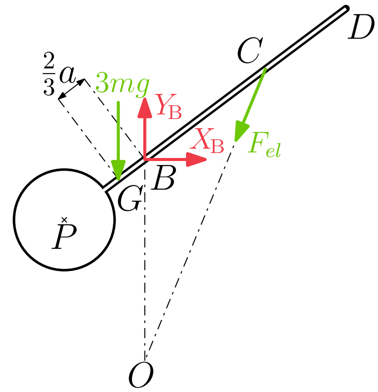
$$\vec{v} = v_B\,\vec{\tau} = \sqrt{2g[h - R(1 - \cos\beta)]}\,\vec{\tau} \qquad \textbf{(0,2)}$$

$$\vec{a} = a_t\,\vec{\tau} + a_n\,\vec{n} = a_t\,\vec{\tau} + \frac{v_B^2}{R}\,\vec{n} = g\left[-\sin\beta\,\vec{\tau} + 2\left(\frac{h}{R} - 1 + \cos\beta\right)\,\vec{n}\right] \qquad \textbf{(0,4)}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução da Questão 2 **(3,5 pontos)**



a) O diagrama de corpo livre é indicado na figura ao lado. **(0,5)**
A posição do centro de massa G do corpo pode ser calculada a partir da posição dos centros de massa do disco G_d e da barra G_b, notando que ambos distam $2a$ do ponto B e que $(G_d - B) = -(G_b - B) = (P - B)$. Assim:

$$(G - B) = \frac{2m(G_d - B) + m(G_b - B)}{3m} = \frac{1}{3}(P - B)$$

b) O momento de inércia J_{Bz} do corpo pode ser obtido a partir da soma das parcelas de momento de inércia associadas à barra J^b_{Bz} e ao disco J^d_{Bz}. Do teorema dos eixos paralelos:

$$\left.\begin{aligned} J^b_{Bz} &= J^b_{G_b z} + m d^2_{G_b z, Bz} = \frac{m(6a)^2}{12} + m(2a)^2 = 7ma^2 \\ J^d_{Bz} &= J^d_{G_d z} + (2m) d^2_{G_d z, Bz} = \frac{(2m)a^2}{2} + (2m)(2a)^2 = 9ma^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ J_{Bz} = J^b_{Bz} + J^d_{Bz} = 16ma^2 \qquad \textbf{(1,0)}$$

c) Notando que o sistema modelado é um corpo rígido em movimento plano e escolhendo como pólo o ponto fixo B deste corpo, a expressão do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento se simplifica para:

$$J_{Bz}\vec{\alpha} = \vec{M}_B$$

Na posição $\theta = 0$, o comprimento total da mola é $\ell = 5a$, estando a mola tracionada, portanto. Assim:

$$\vec{F}_{el} = -k(\ell - \ell_0)\frac{(C - O)}{|C - O|} = -k(5a - 4a)\frac{(3a\vec{\imath} + 4a\vec{\jmath})}{5a} = -\frac{3}{5}ka\vec{\imath} - \frac{4}{5}ka\vec{\jmath}$$

Então:

$$\vec{M}_B = (C - B) \wedge \vec{F}_{el} + (G - B) \wedge \vec{P} = 3a\vec{\imath} \wedge \left(-\frac{3}{5}ka\vec{\imath} - \frac{4}{5}ka\vec{\jmath}\right) - \frac{2}{3}a\vec{\imath} \wedge (-3mg\vec{\jmath}) = \left(2mga - \frac{12}{5}ka^2\right)\vec{k} \quad \textbf{(0,5)}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{\alpha} = \frac{\vec{M}_B}{J_{Bz}} = \left(\frac{g}{8a} - \frac{3k}{20m}\right)\vec{k} \qquad \textbf{(0,5)}$$

d) Observando que o sistema modelado é conservativo, a energia mecânica deve ser conservada entre as configurações $\theta_0 = 0$ e $\theta_1 = \pi/2$. Assim,

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

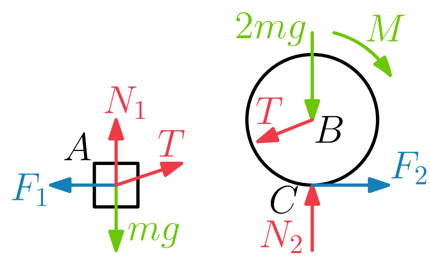
Para que o sistema consiga chegar à posição $\theta_1 = \pi/2$ é condição necessária que $T_1 \geq 0$. Sabe-se que:

$$T_0 = 0, \qquad V_0 = \frac{1}{2}k(5a - 4a)^2 = \frac{1}{2}ka^2 \quad \text{e} \quad V_1 = \frac{1}{2}k(7a - 4a)^2 + (3m)g\left(-\frac{2}{3}a\right) = \frac{9}{2}ka^2 - 2mga \qquad \textbf{(0,5)}$$

Assim:

$$T_1 = \frac{1}{2}ka^2 - \frac{9}{2}ka^2 + 2mga \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad k \leq \frac{mg}{2a} \qquad \textbf{(0,5)}$$

Resolução da Questão 3 **(3,5 pontos)**



a) Os diagramas de corpo livre são indicados na figura ao lado. Por ter inércia desprezível, AB pode ser tratada como barra de treliça. **(0,6)**

b) Devido aos vínculos do sistema, pode-se afirmar que a barra AB descreve um ato de translação pura, de tal forma que:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v} = v\vec{\imath} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a} = a\vec{\imath} \qquad \textbf{(0,2)}$$

Assim, as expressões do Teorema da Resultante para o bloco e para o disco podem ser escritas, respectivamente, como (por simplicidade, adota-se $V = T/\sqrt{10}$):

$$ma\vec{\imath} = (3V - F_1)\vec{\imath} + (N_1 + V - mg)\vec{\jmath} \qquad (3.1) \quad \textbf{(0,5)}$$

$$(2m)a\vec{\imath} = (F_2 - 3V)\vec{\imath} + (N_2 - V - 2mg)\vec{\jmath} \qquad (3.2) \quad \textbf{(0,5)}$$

Ainda, considerando que a aceleração angular do disco pode ser escrita na forma $\vec{\alpha} = \alpha\vec{k}$, a respectiva expressão do Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, considerando pólo em B, é dada por:

$$\frac{(2m)R^2}{2}\alpha\vec{k} = (F_2 R - M)\vec{k} \qquad (3.3) \quad \textbf{(0,5)}$$

Neste caso, considera-se que há deslizamento nos contatos entre o bloco e a guia e entre o disco e a guia, sendo o atrito de natureza cinética em ambos os casos. Assim:

$$F_1 = \mu N_1 \qquad \text{e} \qquad F_2 = \mu N_2 \qquad \textbf{(0,2)}$$

Assim, das equações (3.1) e (3.2), pode-se afirmar que:

$$N_1 = mg - V, \qquad N_2 = 2mg + V \qquad \text{e} \qquad V = \frac{m(\mu g + a)}{3 + \mu} = \frac{2m(\mu g - a)}{3 - \mu}$$

Portanto:

$$V = \frac{4\mu}{9 + \mu}\, mg \qquad \text{e} \qquad \vec{a} = \frac{3(1+\mu)\mu}{9 + \mu}\, g\,\vec{\imath} \qquad \textbf{(0,5)}$$

Finalmente, da equação (3.3):

$$\vec{\alpha} = \frac{2}{m_2 R}\left(F_2 - \frac{M}{R}\right)\vec{k} = -\left[\frac{2M}{m_2 R^2} - \frac{2\mu g}{R}\left(1 + \frac{2\mu}{9 + \mu}\right)\right]\vec{k} \qquad \textbf{(0,5)}$$