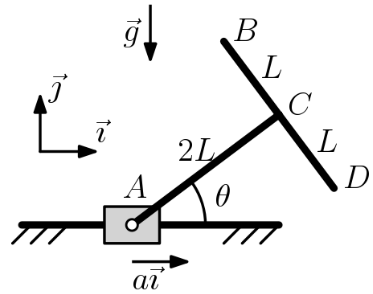
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Prova Substitutiva – 05 de Julho de 2018

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

Questão 1 (3,0 pontos). Um corpo rígido de massa m é formado por duas barras, AC e BD, soldadas perpendicularmente em C (ponto médio de BD), conforme ilustrado na figura. Estas barras são homogêneas, esbeltas e têm comprimento $2L$ cada. A extremidade A do corpo rígido encontra-se articulada a um bloco que desliza sobre uma guia horizontal com uma aceleração $a\vec{\imath}$, conhecida. Pede-se:

a) O vetor posição $(G - A)$ do centro de massa G do corpo rígido formado pelas barras AC e BD.
b) O momento de inércia J_{Az} do corpo rígido com respeito ao eixo Az.
c) O diagrama de corpo livre do corpo rígido.
d) O valor do ângulo θ para o qual a aceleração angular do corpo rígido é nula.



Dado: o momento de inércia de uma barra homogênea e esbelta de massa m e comprimento L com respeito a um eixo perpendicular passante por seu centro de massa é igual a $mL^2/12$.

(a) Por homogeneidade, cada uma das barras AC e BD tem massa $m/2$. Além disso, o centro de massa de BD é o ponto C e o centro de massa de AC é o ponto médio M do segmento AC. Assim:

$$(C - A) = 2L(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) \tag{1}$$

$$(M - A) = L(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) \tag{2}$$

$$(G - A) = \frac{\frac{m}{2}(C - A) + \frac{m}{2}(M - A)}{m} = \frac{3L}{2}(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) \tag{3}$$

(b) A partir do dado no enunciado, pode-se afirmar que o momento de inércia da barra BD com respeito ao eixo Cz, $J_{Cz}^{(BD)}$, e o momento de inércia da barra AC com respeito ao eixo Mz, $J_{Mz}^{(AC)}$ são dados por:

$$J_{Cz}^{(BD)} = J_{Mz}^{(AC)} = \frac{1}{12}\left(\frac{m}{2}\right)(2L)^2 = \frac{mL^2}{6} \tag{4}$$

Aplicando o Teorema dos Eixos Paralelos, obtemos o momento de inércia da barra BD com respeito ao eixo Az, $J_{Az}^{(BD)}$, e o momento de inércia da barra AC com respeito ao eixo Az, $J_{Az}^{(AC)}$:

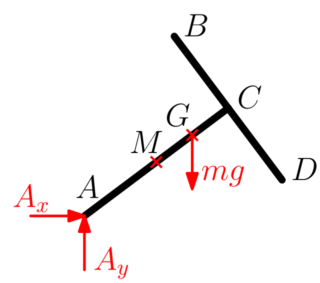
$$J_{Az}^{(BD)} = J_{Cz}^{(BD)} + \frac{m}{2}(2L)^2 = \frac{13}{6}mL^2 \tag{5}$$

$$J_{Az}^{(AC)} = J_{Mz}^{(AC)} + \frac{m}{2}L^2 = \frac{2}{3}mL^2 \tag{6}$$

Assim, o momento de inércia J_{Az} do corpo rígido com respeito ao eixo Az é:

$$J_{Az} = J_{Az}^{(BD)} + J_{Az}^{(AC)} = \frac{17}{6}mL^2 \tag{7}$$

(c) DCL:



(d) Considerando a aceleração angular do corpo rígido nula, a expressão do Teorema da Quantidade de Movimento Angular aplicado ao pólo A se reduz a:

$$m(G-A)\wedge\vec{a}_A=\vec{M}_A \tag{8}$$

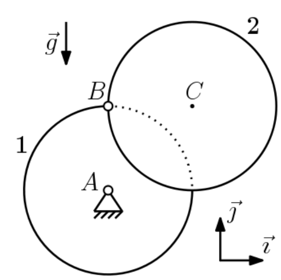
Sendo $\vec{a}_A=a\vec{\imath}$ (dado), $(G-A)$ expresso pela Eq. (3) e $\vec{M}_A=(G-A)\wedge(-mg\vec{\jmath})$, tem-se:

$$m\frac{3L}{2}(\cos\theta\vec{\imath}+\sin\theta\vec{\jmath})\wedge(a\vec{\imath})=\frac{3L}{2}(\cos\theta\vec{\imath}+\sin\theta\vec{\jmath})\wedge(-mg\vec{\jmath}) \tag{9}$$

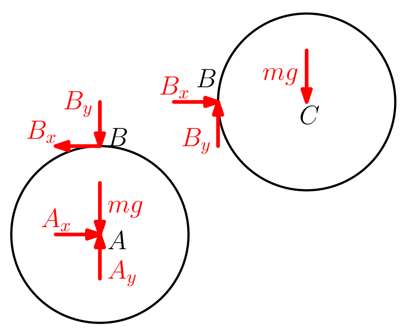
$$-a\sin\theta=-g\cos\theta\quad\Rightarrow\quad\theta=\arctan\frac{g}{a} \tag{10}$$

Questão 2 (4,0 pontos). Considere o sistema ilustrado na figura, em que os discos **1** e **2**, de centros A e C respectivamente, são vinculados entre si por meio de uma articulação ideal localizada na periferia de ambos, em B. Há ainda, em A, uma articulação que vincula o disco **1** a uma base fixa com respeito a um referencial inercial. Denote por $\dot{\vec{\omega}}_1=\alpha_1\vec{k}$ e $\dot{\vec{\omega}}_2=\alpha_2\vec{k}$ as respectivas acelerações angulares dos discos **1** e **2**. Admita que os discos são idênticos, homogêneos e têm massa m e raio R. Para a configuração indicada na figura, em que as linhas AB e BC estão na vertical e horizontal, respectivamente, e admitindo que os discos encontram-se inicialmente em repouso, pede-se, para o instante imediatamente após a liberação do sistema:

a) Os diagramas de corpo livre para cada um dos discos.
b) As expressões das acelerações dos pontos B ($\vec{a}_B$) e C ($\vec{a}_C$) em função de α_1 e α_2.
c) Os valores de α_1 e α_2.
d) A força aplicada pelo disco de centro A sobre o disco de centro C por meio da articulação em B.
Dado: para o disco de centro A, $J_{Az}=mR^2/2$.



(a) DCLs:



(b) Denote por $\vec{\omega}_1$ e $\vec{\omega}_2$ os vetores de rotação dos discos **1** e **2**, respectivamente. No instante imediatamente após a liberação do sistema, tem-se:

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2 = \vec{0}, \quad \dot{\vec{\omega}}_1 = \alpha_1 \vec{k} \quad \text{e} \quad \dot{\vec{\omega}}_2 = \alpha_2 \vec{k} \tag{11}$$

A aceleração do ponto fixo A é nula. Ainda, na configuração considerada, $(B - A) = R\vec{\jmath}$ e $(C - B) = R\vec{\imath}$. Assim:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}_1 \wedge (B - A) + \vec{\omega}_1 \wedge [\vec{\omega}_1 \wedge (B - A)] = -R\alpha_1 \vec{\imath} \tag{12}$$

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \dot{\vec{\omega}}_2 \wedge (C - B) + \vec{\omega}_2 \wedge [\vec{\omega}_2 \wedge (C - B)] = R(-\alpha_1 \vec{\imath} + \alpha_2 \vec{\jmath}) \tag{13}$$

(c) Note que, pelo Teorema dos Eixos Paralelos:

$$J_{Bz} = J_{Cz} + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2 \tag{14}$$

Para o disco **2**, as equações do Teorema da Resultante e do Teorema da Quantidade de Movimento Angular (pólo B) são, respectivamente:

$$m\vec{a}_C = \vec{R}^{(2)} \quad \Rightarrow \quad mR(-\alpha_1 \vec{\imath} + \alpha_2 \vec{\jmath}) = B_x \vec{\imath} + (B_y - mg)\vec{\jmath} \tag{15}$$

$$m(C - B) \wedge \vec{a}_B + J_{Bz}\alpha_2 \vec{k} = \vec{M}_B^{(2)} \quad \Rightarrow \quad m(R\vec{\imath}) \wedge (-R\alpha_1 \vec{\imath}) + \frac{3}{2}mR^2\alpha_2 \vec{k} = (R\vec{\imath}) \wedge (-mg\vec{\jmath}) \tag{16}$$

Para o disco **1**, as equações do Teorema da Resultante e do Teorema da Quantidade de Movimento Angular (pólo A) são, respectivamente:

$$m\vec{a}_A = \vec{R}^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \vec{0} = (A_x - B_x)\vec{\imath} + (A_y - B_y - mg)\vec{\jmath} \tag{17}$$

$$J_{Az}\alpha_1 \vec{k} = \vec{M}_A^{(1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mR^2\alpha_1 \vec{k} = (R\vec{\jmath}) \wedge (-B_x \vec{\imath} - B_y \vec{\jmath}) \tag{18}$$

Da Eq. (16):

$$\frac{3}{2}mR^2\alpha_2 = -mgR \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = -\frac{2g}{3R} \tag{19}$$

Das Eqs. (18) e (15):

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mR^2\alpha_1 = RB_x \\ -mR\alpha_1 = B_x \\ mR\alpha_2 = B_y - mg \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ B_x = 0 \\ B_y = mR\alpha_2 + mg = \dfrac{mg}{3} \end{cases} \tag{20}$$

Assim:

$$\dot{\vec{\omega}}_1 = \vec{0} \quad \text{e} \quad \dot{\vec{\omega}}_2 = -\frac{2g}{3R}\vec{k} \tag{21}$$

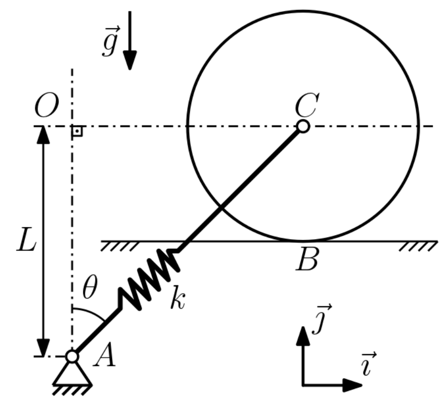
(d) Da Eq. (20), a força aplicada pelo disco de centro A sobre o disco de centro C por meio da articulação em B é:

$$B_x \vec{\imath} + B_y \vec{\jmath} = \frac{mg}{3}\vec{\jmath} \tag{22}$$

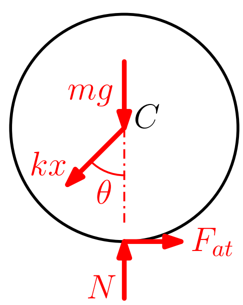
Questão 3 (3,0 pontos). Um disco homogêneo, de massa m e raio R, pode rolar sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal que está fixa com respeito a um referencial inercial. A mola linear, de rigidez k e comprimento natural L, está vinculada a uma base fixa em A e ao disco em seu centro C. Seja θ o ângulo entre AC e a vertical AO, indicado na figura. Pede-se:

a) O diagrama de corpo livre para o disco.
b) As expressões, em termos de θ e $\dot{\theta}$, do vetor posição $(C-A)$, da velocidade do ponto C e da velocidade angular do disco.
c) A expressão da energia cinética do sistema.
d) A expressão da energia potencial do sistema.
e) Considerando que o sistema parta do repouso na configuração $\theta = \arccos(3/5)$, determine o vetor de rotação do disco quando o sistema atingir pela primeira vez a configuração $\theta = 0$.

Dado: para o disco, $J_{Cz} = mR^2/2$.



(a) DCL:



(b) As expressões, em termos de θ e $\dot{\theta}$, do vetor posição $(C-A)$ e da velocidade do ponto C são dadas por:

$$(C-A) = L(\tan\theta\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \tag{23}$$

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C-A) = \frac{L}{\cos^2\theta}\dot{\theta}\vec{\imath} \tag{24}$$

Sendo B o centro instantâneo de rotação do disco, $\vec{v}_B = \vec{0}$, logo:

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \wedge (C-B) = \omega\vec{k} \wedge (R\vec{\jmath}) \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = -\frac{L}{R\cos^2\theta}\dot{\theta}\vec{k} \tag{25}$$

(c) A energia cinética do sistema é dada por:

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}_C \cdot \vec{v}_C + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot (J_{Cz}\vec{\omega}) = \frac{3mL^2}{4\cos^4\theta}\dot{\theta}^2 \tag{26}$$

(d) Considerando que a coordenada vertical do centro de massa do disco permanece constante ao longo do movimento, apenas a energia potencial elástica deve ser considerada. O comprimento da mola em função do ângulo é dado por $\ell(\theta) = L/\cos\theta$. Assim:

$$\delta = \ell(\theta) - L = L\left[\frac{1}{\cos\theta} - 1\right] \tag{27}$$

$$V = \frac{1}{2}k\delta^2 = \frac{1}{2}kL^2\left[\frac{1}{\cos\theta} - 1\right]^2 \tag{28}$$

(e) Notando que apenas a força elástica na mola realiza trabalho, pode-se afirmar que o sistema é conservativo. Assim, pode-se considerar a conservação da energia mecânica do sistema entre as configurações $\theta = \arccos(3/5)$, na qual se sabe que o sistema está em repouso, e $\theta = 0$:

$$\Delta(T+V) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3mL^2}{4\cos^4 0}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kL^2\left[\frac{1}{\cos 0} - 1\right]^2 = \frac{1}{2}kL^2\left[\frac{5}{3} - 1\right]^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{3mL^2}{4}\dot{\theta}^2 = \frac{2}{9}kL^2 \tag{29}$$

Finalmente, considerando o sentido do movimento do disco:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{8k}{27m} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = -\sqrt{\frac{8k}{27m}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = \frac{L}{R}\sqrt{\frac{8k}{27m}}\vec{k} \tag{30}$$