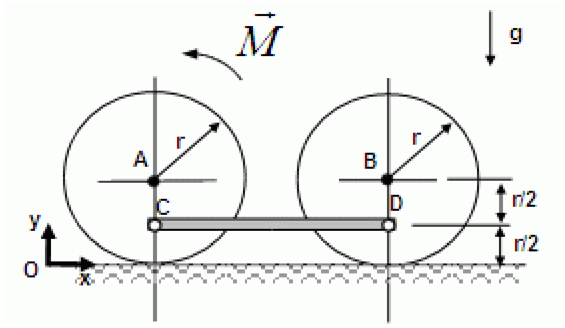
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Prova Substitutiva – 12 de julho de 2017 - Duração: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

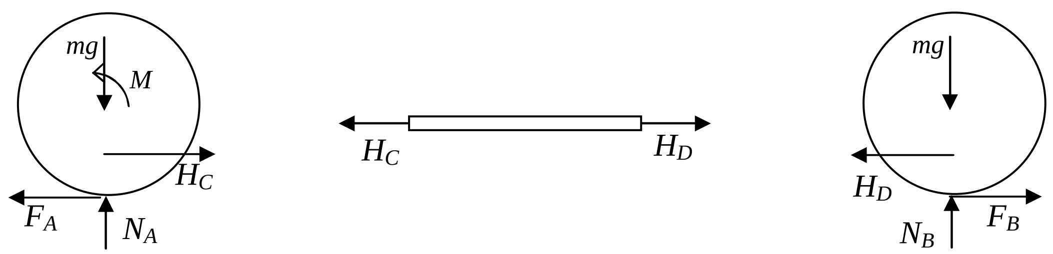
1ª Questão (3,5 pontos). Dois discos A e B, homogêneos e de massa m estão ligados por meio de uma barra CD de massa desprezível articulada em C e D. Um binário de módulo M constante é aplicado ao disco de centro A. Sabe-se que os discos rolam sem escorregar sobre o plano horizontal. No instante mostrado, a barra CD está paralela ao plano horizontal. Para esse instante, pede-se:



(a) desenhar os diagramas de corpo livre dos discos e da barra;
(b) determinar a aceleração do centro de massa de cada disco;
(c) determinar as forças que agem na barra;
(d) determinar os valores mínimos dos coeficientes de atrito μ_1 e μ_2 para cada disco, compatíveis com o movimento de rolamento sem escorregamento.

RESOLUÇÃO

Os diagramas de corpo livre dos discos e da barra são apresentados nas figuras abaixo:



(1 ½ ponto)

Aplicando-se o *TMB* e o *TQMA* ao disco de centro *A*, obtém-se:

$$F_A - H_C = ma \qquad (1)$$

$$N_A = mg \qquad (2)$$

$$J_{Az}\dot{\omega} = M - F_A r + H_C \frac{r}{2} \qquad (3)$$

(½ ponto)

Como ambos os discos têm o mesmo raio e rolam sem escorregar, a aceleração de seus baricentros é dada por:

$$a = \dot{\omega} r \qquad (4)$$

onde $\dot{\omega}$ é a aceleração angular (incógnita) dos discos.

Aplicando-se o *TMB* e o *TQMA* ao disco de centro *B*, obtém-se:

$$H_D - F_B = ma = m\dot{\omega} r \qquad (5)$$

$$N_D = mg \qquad (6)$$

$$J_{Bz}\dot{\omega} = F_B r - H_D \frac{r}{2} \qquad (7)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Prova Substitutiva – 12 de julho de 2017 - Duração: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

Aplicando-se o *TMB* à barra *CD* e lembrando que esta possui massa desprezível, resulta que:

$$H_C = H_D \tag{8}$$

(½ ponto)

Da equação (3), decorre que

$$H_C = \frac{2}{r}\left(J_{Az}\dot{\omega} - M + F_A r\right)$$

e da equação (7), decorre que

$$H_D = \frac{2}{r}\left(F_B r - J_{Bz}\dot{\omega}\right)$$

Igualando-se as expressões acima, resulta:

$$J_{Az}\dot{\omega} + J_{Bz}\dot{\omega} - M + \left(F_A - F_B\right)r = 0 \tag{9}$$

Das equações (1) e (5), resultam:

$$H_C = F_A - m\dot{\omega}r \tag{10}$$

$$H_D = m\dot{\omega}r + F_B \tag{11}$$

Igualando-se as expressões acima, resulta:

$$F_A - F_B = 2m\dot{\omega}r \tag{12}$$

Substituindo-se a expressão acima em (9), obtém-se:

$$\left(J_{Az} + J_{Bz}\right)\dot{\omega} - M + r\left(2m\dot{\omega}r\right) = 0 \tag{13}$$

Substituindo-se as expressões de J_{Az} e J_{Bz} acima, obtém-se $\dot{\omega}$:

$$\dot{\omega} = \frac{M}{3mr^2} \tag{14}$$

Logo, a aceleração dos baricentros dos discos, é dada por:

$$a = \dot{\omega}r = \frac{M}{3mr} \tag{15}$$

(½ ponto)

A partir de (8), (10) e (11), obtém-se:

$$H_C = m\dot{\omega}r + F_B \tag{16}$$

Substituindo-se (16) em (9), obtém-se:

$$\left(J_{Bz} + \frac{mr^2}{2}\right)\dot{\omega} = F_B\frac{r}{2} \Rightarrow \left(\frac{mr^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\right)\dot{\omega} = F_B\frac{r}{2} \Rightarrow F_B = 2mr\dot{\omega} = \frac{2M}{3r} \tag{17}$$

Substituindo-se (17) em (16), resulta:

$$H_C = H_D = mr\frac{M}{3mr^2} + \frac{2M}{3r} = \frac{M}{r} \tag{18}$$

Portanto, na barra CD age uma força de tração de módulo M/r
Substituindo-se (18) em (3), obtém-se:

$$F_A = \frac{1}{r}\left(M - J_{Az}\dot{\omega} + \frac{r}{2} H_C \right) = \frac{1}{r}\left(M - \frac{mr^2}{2}\frac{M}{3mr^2} + \frac{r}{2}\frac{M}{r} \right) = \frac{4M}{3r} \tag{19}$$

Para que ambos os discos rolem sem escorregar, deve-se ter:

$$F_A \le \mu_A N_A \Rightarrow \frac{4M}{3r} \le \mu_A mg \Rightarrow \mu_A \ge \frac{4M}{3rmg} \tag{20}$$

$$F_B \le \mu_B N_B \Rightarrow \frac{2M}{3r} \le \mu_B mg \Rightarrow \mu_B \ge \frac{2M}{3rmg} \tag{21}$$

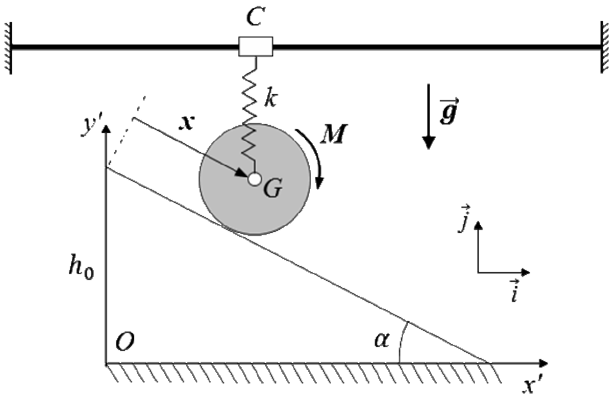
(½ ponto)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Prova Substitutiva – 12 de julho de 2017 - Duração: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

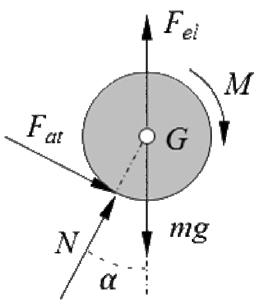
2ª Questão (3,5 pontos). A figura mostra um disco homogêneo, de massa m e raio R, que parte do repouso e rola sem escorregar em um plano inclinado devido à ação da gravidade e de um binário M, constante. O disco está conectado a uma guia horizontal C sem atrito por meio de uma mola ideal de constante elástica k, que se mantém na direção vertical durante o movimento. No instante inicial o disco se encontra na posição $x = 0$ e a mola não está deformada, pede-se, para um instante posterior:



(a) o diagrama de corpo livre do disco;
(b) a energia cinética do disco, em função da sua velocidade $\dot{x}$;
(c) o trabalho realizado pelos esforços aplicados ao disco, em função de x;
(d) a velocidade angular ω do disco, em função de x;
(e) a aceleração angular $\dot{\omega}$ do disco, em função de x.

RESOLUÇÃO

a) O diagrama de corpo livre do disco:



(½ ponto)

b) A energia cinética do disco em função da sua velocidade $\dot{x}$:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \frac{1}{2} [J]_G \vec{\omega} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_{Gz} \omega^2$$

$$= \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{3m}{4} \dot{x}^2$$

(1 ponto)

c) O trabalho realizado pelos esforços aplicados ao disco em função de x:

$$W = W_c + W_{nc} = -\Delta V + W_{nc} = V_1 - V_2 + W_{nc}$$

$$V_1 = V_1^{gr} + V_1^{el} = mg(\boldsymbol{h_0} + R)$$

$$V_2 = V_2^{gr} + V_2^{el} = mg(\boldsymbol{h_0} - x sen\alpha + R) + \frac{k}{2}\delta^2 = mg(\boldsymbol{h_0} - x sen\alpha + R) + \frac{k sen^2\alpha}{2} x^2$$

$$W_{nc} = (-M).(-\Delta\theta) = M\theta = M\frac{x}{R}$$

Portanto, o trabalho total realizado pelos esforços aplicados ao disco é:

$$W = \left(mg sen\alpha + \frac{M}{R}\right)x - \frac{k sen^2\alpha}{2} x^2$$

(1 ponto)

d) A velocidade angular (ω) do disco em função de x ;

Aplicando o TEC ao disco, tem-se:

$$T - T_0 = W \quad \rightarrow \quad \frac{3m}{4}\dot{x}^2 = \left(mgsen\alpha + \frac{M}{R}\right)x - \frac{ksen^2\alpha}{2}x^2$$

Considerando que $\dot{x} = \omega R$:

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3mR^2}\left[\left(mgsen\alpha + \frac{M}{R}\right)x - \frac{ksen^2\alpha}{2}x^2\right]}$$

(½ ponto)

e) A aceleração angular ($\dot{\omega}$) do disco, em função de x .

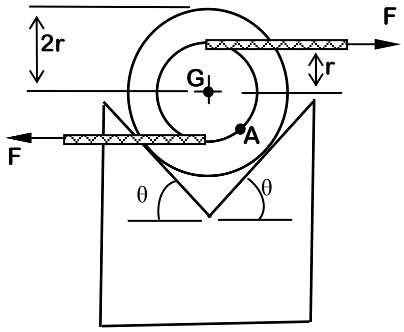
Derivando, em relação ao tempo, a expressão de ω obtida no item d), tem-se

$$\dot{\omega} = \frac{2}{3mR}\left[\left(mgsen\alpha + \frac{M}{R}\right) - (ksen^2\alpha)x\right]$$

(½ ponto)

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Prova Substitutiva – 12 de julho de 2017 - Duração: 110 minutos
(não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

3ª Questão (3,0 pontos). O carretel de massa m e centro de massa G possui distribuição de massa tal que o momento de inércia em relação ao seu pólo A é dado por $J_{Az} = 5mr^2/4$. Sobre o carretel, enrola-se um cabo ideal sujeito à ação das forças de módulo F constante, mas desconhecido. O carretel apóia-se constantemente sobre um suporte em "V". O coeficiente de atrito dinâmico entre as superfícies é μ e o ângulo θ vale $\pi/4$ radianos. Nessas condições, pede-se:



(a) o diagrama de corpo livre do carretel;
(b) o valor das forças constantes F aplicadas ao cabo e capazes de proporcionar ao carretel uma aceleração angular de módulo α.

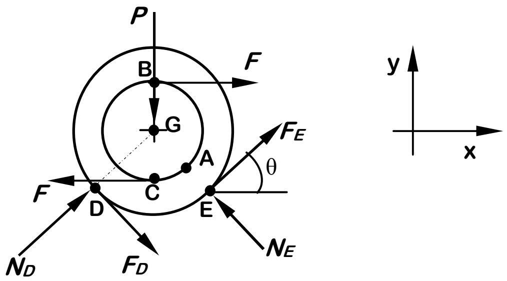
RESOLUÇÃO

a) O diagrama de corpo livre é dado abaixo, onde:

B e *C* são os pontos de contato do cabo com o carretel;

D e *E* são os pontos de contato entre o carretel e o apoio em "V";

N_D, N_E, F_D e F_E são respectivamente as forças normais e de atrito no contato entre o carretel e o apoio.



(1 ponto)

b) O carretel, na situação proposta, apenas gira em torno de seu centro de massa *G*. A aplicação do *TMB*, já levando em conta o valor do ângulo θ conduz a:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -F + F + N_D\frac{\sqrt{2}}{2} + F_D\frac{\sqrt{2}}{2} - N_E\frac{\sqrt{2}}{2} + F_E\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_D\frac{\sqrt{2}}{2} - F_D\frac{\sqrt{2}}{2} + N_E\frac{\sqrt{2}}{2} + F_E\frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0 \quad (1)$$

Como há escorregamento puro entre as superfícies em contato, podemos escrever, a partir das equações (1),

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_D(1+\mu) - N_E(1-\mu) = 0$$
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_D(1-\mu) + N_E(1+\mu) = \sqrt{2}P \quad (2)$$

(½ ponto)

Resolvendo as equações (2) obtém-se

$$N_D = \frac{P\sqrt{2}(1-\mu)}{2(1+\mu^2)}$$

$$N_E = \frac{P\sqrt{2}(1+\mu)}{2(1+\mu^2)}$$

Com N_E e N_D temos F_E e F_D:

$$F_D = \mu\frac{P\sqrt{2}(1-\mu)}{2(1+\mu^2)}$$

$$F_E = \mu\frac{P\sqrt{2}(1+\mu)}{2(1+\mu^2)}$$

(½ ponto)

Aplicando-se o *TQMA* no pólo *G*, tem-se:

$$J_{Gz}\vec{\alpha} = \vec{M}_G^{ext} \Rightarrow$$

$$-J_{Gz}\alpha\vec{k} = (B-G)\wedge\vec{F} + (C-G)\wedge\vec{F} + (D-G)\wedge\vec{F}_D + (E-G)\wedge\vec{F}_E \Rightarrow$$

$$-J_{Gz}\alpha\vec{k} = (-rF - rF + 2rF_D + 2rF_E)\vec{k} \qquad (3)$$

(½ ponto)

Efetuando a mudança de pólo para o momento de inércia, temos:

$$J_{Az} = J_{Gz} + md_{A,G}^2 \Rightarrow J_{Gz} = J_{Az} - mr^2 \Rightarrow J_{Gz} = \frac{mr^2}{4}$$

Utilizando também os valores das forças de atrito calculadas anteriormente, a equação (3) leva a:

$$-\frac{mr^2}{4}\alpha = 2r\left(-F + \frac{\mu P\sqrt{2}}{2}\frac{(1-\mu+1+\mu)}{(1+\mu^2)}\right) \qquad (4)$$

Resolvendo (4) para *F* obtemos

$$\boxed{F = \frac{\mu P\sqrt{2}}{(1+\mu^2)} + \frac{mr\alpha}{8}}$$

(½ ponto)