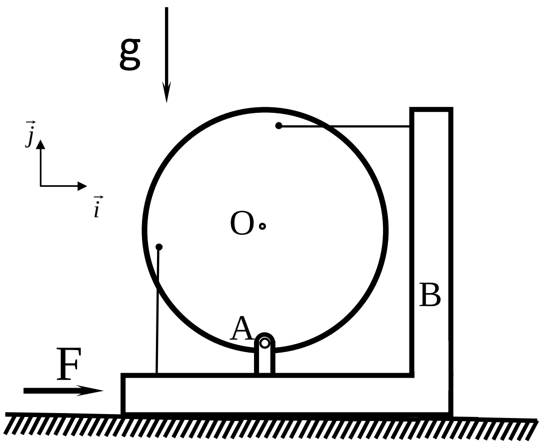
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 Mecânica A

Prova substitutiva - 3 de julho de 2015 – Duração 110 minutos

Não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos eletrônicos similares

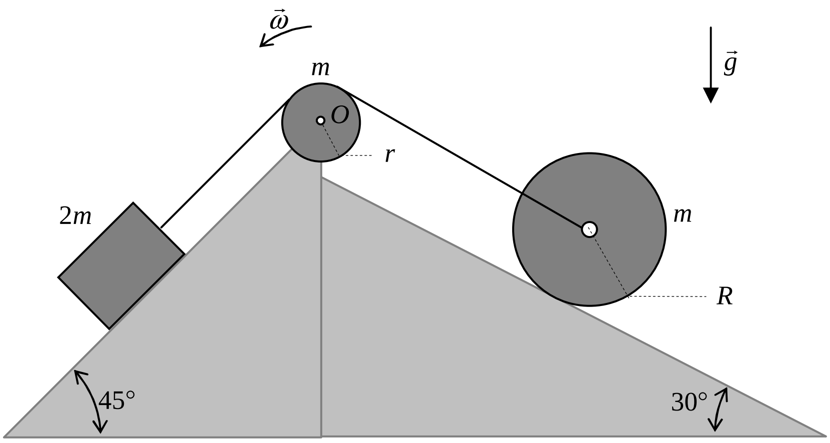


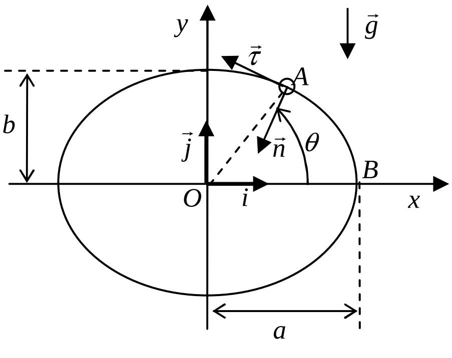
QUESTÃO 1 (4,0 pontos). O sistema mostrado na figura está inicialmente em repouso sobre superfície horizontal sem atrito. O bloco *B* tem massa *m* e o disco de centro *O* tem massa *m* e raio *R*. Uma força *F* é aplicada sobre o bloco no mesmo instante em que os dois fios se rompem. Para esse instante. pedem-se:

(a) os diagramas de corpo livre do disco e do bloco;
(b) a aceleração do ponto *A*;
(c) o vetor aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ do disco;
(d) as componentes da reação na articulação *A*.

QUESTÃO 2 (4,0 pontos). Um cabo inextensível passante por uma polia articulada em O, de massa m e raio r, é ligado em uma de suas extremidades a um bloco de massa $2m$ e à outra a um disco de massa m e raio R. Sabe-se que o coeficiente de atrito entre a superfície do plano inclinado e a superfície de contato do bloco vale μ, que não há atrito na articulação O e que o disco rola sem escorregar. Admitindo-se que o sistema parta do repouso, pede-se:

(a) esboçar os diagramas de corpo livre do bloco, do disco e da polia em um instante t arbitrário;
(b) escrever a expressão da energia cinética do sistema para esse instante ;
(c) indicar as forças que realizam trabalho não nulo;
(d) determinar a velocidade angular da polia no instante em que o bloco tiver percorrido a distância ℓ





QUESTÃO 3. (2,0 pontos). Um pequeno anel A de massa m é vinculado a um arame circular descrito pela curva $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ Admitindo-se que não exista atrito entre o arame e o anel e que este seja abandonado em repouso na posição $P = \left(a\dfrac{\sqrt{2}}{2}, b\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, sujeito à ação da gravidade, pede-se, para o instante em que atingir o ponto $B = (a,0)$:

(a) determinar os versores do triedro de Frenet em função dos versores da base $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$;
(b) determinar a magnitude da velocidade do anel;
(c) determinar a componente normal da aceleração do anel;
(d) esboçar o diagrama de corpo livre do anel;
(e) determinar a componente tangencial da aceleração do anel;
(f) determinar a reação de contato exercida pelo arame sobre o anel.

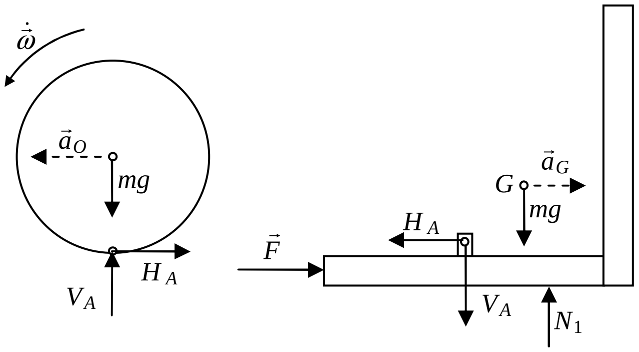
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

RESOLUÇÃO

QUESTÃO 1

Na figura abaixo apresentam-se os diagramas de corpo livre do disco e do bloco no instante em que ocorre a ruptura dos cabos:



(a) 1,0 ponto

Considerando-se o diagrama de corpo livre do disco, tem-se:

$$H_A = -ma_O \qquad (1)$$

$$V_A - mg = 0 \qquad (2)$$

$$(O-A)\wedge(m\vec{a}_A) + J_{Az}\dot{\omega}\vec{k} = 0 \Rightarrow R\vec{j}\wedge\left(ma_A\vec{i}\right) + \frac{3}{2}mR^2\dot{\omega}\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow a_A = \frac{2}{3}R\dot{\omega} \qquad (3)$$

Considerando-se o diagrama de corpo livre do bloco, tem-se:

$$F - H_A = ma_G \Rightarrow a_G = \frac{F - H_A}{m} \qquad (4)$$

$$-V_A - mg + N_1 = 0 \qquad (5)$$

Os vínculos cinemáticos que ligam os movimentos do bloco e do disco, são descritos por:

$$a_A = a_G \qquad (6)$$

$$\vec{a}_O = \vec{a}_A + \dot{\omega}\vec{k}\wedge(O-A) + \omega\vec{k}\wedge\left[\omega\vec{k}\wedge(O-A)\right]$$

Como, no instante em que ocorre a ruptura dos cabos, a velocidade angular do disco é nula, tem-se:

$$\vec{a}_O = \vec{a}_A + \dot{\omega}\vec{k}\wedge R\vec{j} = \left(a_G - \dot{\omega}R\right)\vec{i} \qquad (7)$$

Resolvendo-se o sistema dse equações 1-7, obtêm-se:

$$\vec{a}_A = \frac{2}{3}\frac{F}{m}\vec{i}\ , \qquad \dot{\vec{\omega}} = \frac{F}{mR}\vec{k}\ , \qquad H_A = -\frac{1}{3}F\ , \qquad V_A = mg$$

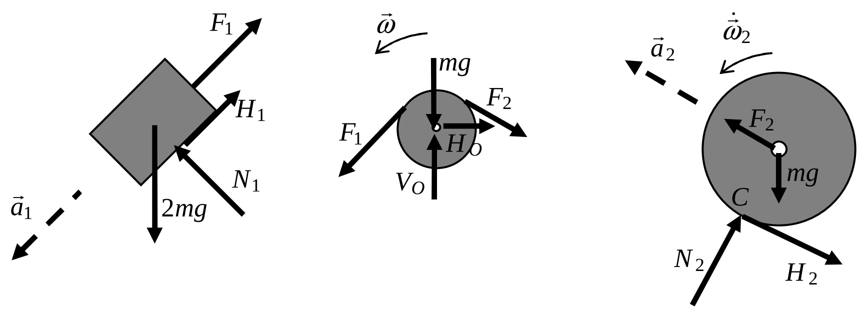
(b,c,d) 3,0 pontos

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

QUESTÃO 2

Os diagramas de corpo livre solicitados são apresentados nas figuras abaixo:



(a) 1,0 ponto

A expressão da energia cinética do sistema, para um instante t arbitrário, é:

$$T = T_{bloco} + T_{polia} + T_{disco} = \frac{1}{2}\left(2mv_1^2\right) + \frac{1}{2} J_{Oz}^{Polia}\omega^2 + \frac{1}{2} J_{Cz}^{Disco}\omega_2^2$$

$$\Rightarrow T = mv_1^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\omega^2 + \frac{1}{2}\frac{3mR^2}{2}\omega_2^2 = mv_1^2 + \frac{mr^2}{4}\omega^2 + \frac{3mR^2}{4}\omega_2^2 \qquad (1)$$

Como o cabo é inextensível e não há deslizamento no contato com a polia, pode-se escrever:

$$v_1 = \omega r \qquad (2)$$

Além disso, como o disco rola sem deslizar sobre o plano inclinado, tem-se:

$$v_2 = \omega_2 R = \omega r \Rightarrow \omega_2 = \frac{r}{R}\omega \qquad (3)$$

Substituindo-se (2) e (3) em (1), resulta:

$$T = m\omega^2 r^2 + \frac{mr^2}{4}\omega^2 + \frac{3mR^2}{4}\frac{r^2}{R^2}\omega^2 = 2m\omega^2 r^2 \qquad (4)$$

(b) 1,0 ponto

As forças que realizam trabalho não nulo são as seguintes:

- peso do bloco: $\vec{P}_{bloco} = -2mg\vec{j}$
- peso do disco: $\vec{P}_{Disco} = -mg\vec{j}$
- força de atrito no contato entre o bloco e a rampa: $H_1 = \mu N_1 = 2\mu mg\frac{\sqrt{2}}{2} = \mu mg\sqrt{2}$.

(c) 1,0 ponto

Aplicando-se o Teorema de Energia Cinética ao sistema, tem-se:

$$T - T_0 = 2m\omega^2 r^2 = 2mg\ell\cos 45° - 2mg\ell\cos 30° - \sqrt{2}\mu mg\ell$$

$$\Rightarrow 2\omega^2 r^2 = 2g\ell\frac{\sqrt{2}}{2} - 2g\ell\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}\mu g\ell$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g\ell}{r^2}\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2}\mu}{2}\right)}$$

(d) 1,0 ponto

QUESTÃO 3

Em coordenadas cartesianas, o raio vetor $(P-O)=\vec{r}$ é dado por:

$$\vec{r}=a\cos\theta\vec{i}+b\sin\theta\vec{j}$$

O versor tangente à curva vincular é:

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}/d\theta}{|d\vec{r}/d\theta|}=\frac{-a\sin\theta\vec{i}+b\cos\theta\vec{j}}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}$$

Portanto, no instante em que $A\equiv B$, ou seja, em que $\theta=0$, tem-se:

$$\vec{\tau}(t)\Big|_{A\equiv B}=\vec{j}$$

Sendo $\vec{b}=\vec{k}$ o versor binormal, obtém-se o versor norma a partir de:

$$\vec{n}=\vec{b}\wedge\vec{\tau}=\vec{k}\wedge\vec{\tau}=-\frac{a\sin\theta\vec{j}+b\cos\theta\vec{i}}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}},$$

Portanto, no instante em que o anel atinge o ponto B tem-se:

$$\Rightarrow\vec{n}(t)\Big|_{A\equiv B}=-\vec{i}$$

(a) 0,5 ponto

Aplicando-se o Teorema da Energia cinética entre os pontos P e B, tem-se:

$$T=\frac{1}{2}mv^2=mg(y_A-y_B)=mg\left(b\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)$$

$$\Rightarrow v(t)\Big|_{A\equiv B}=\sqrt{bg\sqrt{2}}\Rightarrow\vec{v}(t)\Big|_{A\equiv B}=-\sqrt{bg\sqrt{2}}\,\vec{j}$$

(b) 0,5 ponto

A componente normal da aceleração do anel, nesse instante, será:

$$a_n(t)\Big|_{A\equiv B}=\frac{v^2\big|_{A\equiv B}}{\rho\big|_{A\equiv B}}$$

O raio de curvatura da trajetória, para um valor genérico de θ, é

$$\rho=\frac{\left(\dot{r}_x^2+\dot{r}_y^2+\dot{r}_z^2\right)^{3/2}}{\left|\dot{\vec{r}}\wedge\ddot{\vec{r}}\right|}=\frac{\left(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta\right)^{3/2}}{\left|\left(-a\sin\theta\vec{i}+b\cos\theta\vec{j}\right)\wedge\left(-a\cos\theta\vec{i}-b\sin\theta\vec{j}\right)\right|}=\frac{\left(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta\right)^{3/2}}{ab}$$

e, para $\theta=0$

$$\rho(0)=\frac{b^2}{a}.$$

Portanto, a aceleração normal do anel no instante em que $\theta=0$ é;

$$a_n(t)\Big|_{A\equiv B}=\frac{v^2\big|_{A\equiv B}}{\rho\big|_{A\equiv B}}=\frac{bg\sqrt{2}}{b^2/a}=\frac{a}{b}\sqrt{2}g$$

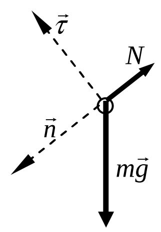
(c) 0,5 ponto

Tomando-se como referência o diagrama de corpo livre do anel, esboçado abaixo, e aplicando-se a equação fundamental da Dinâmica, tem-se:

$$-mg\vec{j}-N\vec{n}=m(a_t\vec{\tau}+a_n\vec{n})$$

$$\Rightarrow -mg\cos\theta\vec{\tau}+mg\sin\theta\vec{n}-N\vec{n}=m(a_t\vec{\tau}+a_n\vec{n})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-mg\cos\theta=ma_t\\ mg\sin\theta-N=ma_n\end{cases}$$



Das equações acima conclui-se que:

$$\begin{cases} a_t = -g\cos\theta \\ N = m(g\sin\theta - a_n) \end{cases}$$

Portanto, no instante em que o anel se localiza no ponto B, a aceleração tangencial é

$$a_t = -g\cos 0 = -g$$

e a força normal é

$$N = -\frac{a}{b}\sqrt{2}mg$$

(d,e,f) 0,5 ponto