ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

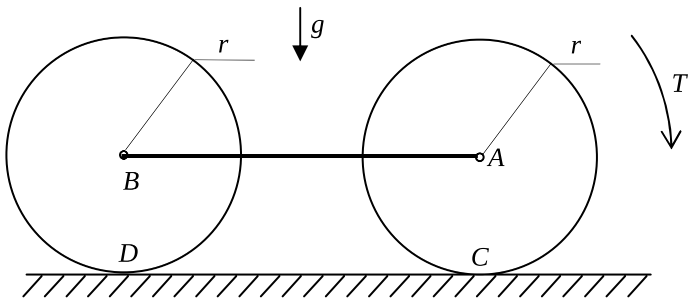
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 - Mecânica A (Reoferecimento)

Prova Substitutiva - Duração 120 minutos – 7 de julho de 2014

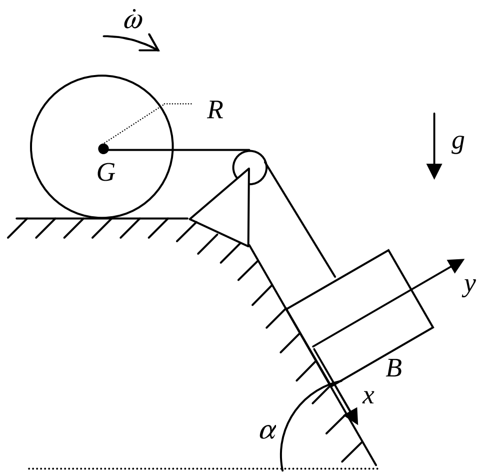
Observação: Não é permitido o uso de equipamentos eletrônicos, tais como calculadoras, celulares e *tablets*.

QUESTÃO 1 (4,0 pontos). Conforme indicado na figura, um momento T de módulo constante é aplicado ao disco de centro A, o qual está ligado a um disco idêntico de centro B por meio de uma barra delgada de massa desprezível. Sabe-se que ambos os discos, de raios e massas r e m , respectivamente, rolam sem escorregar.

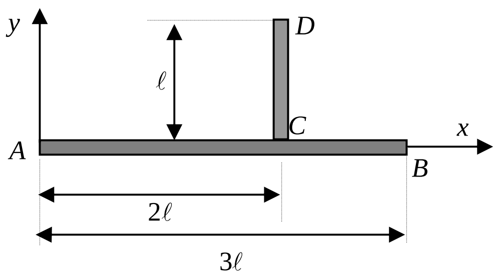


(a) Construir os diagramas de corpo livre para os discos e para a barra;
(b) Usando os teoremas do movimento do baricentro (tmb) e do momento da quantidade de movimento (tma) escrever as equações de movimento para os discos e para abarra;
(c) Escrever as equações cinemáticas que vinculam os movimentos dos discos;
(d) A partir do sistema de equações obtidas nos itens (b) e (c) determinar as acelerações angulares dos discos e as reações horizontais nos pontos de contacto C e D.

QUESTÃO 2 (4,0 pontos). O disco de raio R e massa M rola sem escorregar num plano horizontal. Um cabo ideal une, por meio de uma polia de massa desprezível, o centro G do disco a um bloco de massa m que desliza sobre o plano de inclinação α. Desprezando o atrito no plano inclinado e admitindo que o sistema parta do repouso em x=0, pede-se:



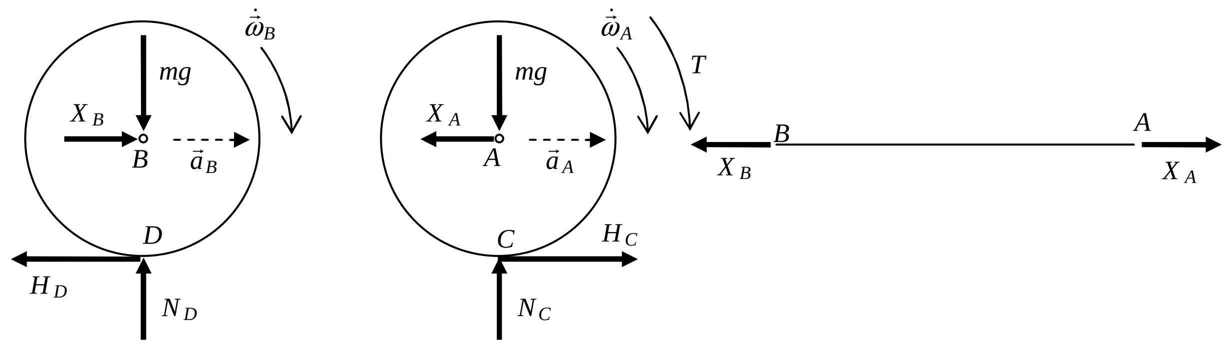
(a) construir os diagramas de corpo livre do disco e do bloco;
(b) identificar as forças que realizam trabalho nulo para o sistema bloco+cabo+disco (justificar);
(c) determinar a velocidade angular do disco para o instante em que o bloco se encontra na posição $x = \ell$.



QUESTÃO 3 (2,0 pontos). A a peça plana ilustrada na figura é composta por duas barras delgadas AB e CD de massas $3m$ e m , respectivamente. Pede-se determinar:
(a) Os momentos de inércia J_{Ax} , J_{Ay} e J_{Az} ;
(b) Os produtos de inércia J_{Axy} , J_{Axz} e J_{Ayz}

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 1

Os diagramas de corpo livre dos discos e da barra são apresentados na figura abaixo.



Resposta a: 1,5 pontos

Para o disco de centro A, os teoremas da resultante e do momento da quantidade de movimento fornecem:

$$H_C - X_A = ma_A \qquad (1)$$

$$N_C - mg = 0 \qquad (2)$$

$$-J_{Cz}\dot{\omega}_A = -T + X_A r \qquad (3)$$

Aplicando-se ao disco de centro B os mesmos teoremas chega-se a:

$$X_B - H_D = ma_B \qquad (4)$$

$$N_D - mg = 0 \qquad (5)$$

$$-J_{Dz}\dot{\omega}_B = -X_B r \qquad (6)$$

E aplicando-se à barra AB o teorema da resultante, chega-se a:

$$X_A - X_B = 0 \qquad (7)$$

Resposta b: 1,5 pontos

Como os discos estão ligados pela barra rígida AB, as acelerações de ceus centros A e B são iguais:

$$a_A = a_B \qquad (8)$$

Além disso, como não há escorregamento nos pontos de contato C e D, pode-se escrever que:

$$a_A = \dot{\omega}_A r \qquad (9)$$

$$a_B = \dot{\omega}_B r \qquad (10)$$

Resposta c: 0,5 ponto

Resolvendo-se o sistema anterior, de 10 equações a 10 incógnitas (H_C, N_C, H_D, N_D, X_A, X_B, a_A, a_B, $\dot{\omega}_A$, $\dot{\omega}_B$), chega-se a:

$$\dot{\omega}_A = \dot{\omega}_B = \frac{T}{3mr^2}$$

$$a_A = a_B = \frac{T}{3mr}$$

$$X_A = X_B = \frac{T}{2r}$$

$$N_C = N_D = mg$$

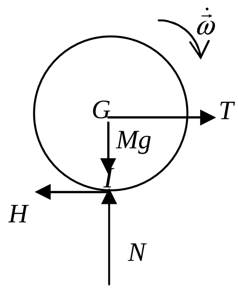
$$H_C = \frac{5T}{6r}$$

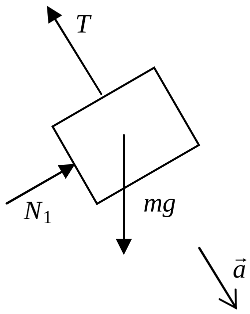
$$H_D = \frac{T}{6r}$$

Resposta d: 0,5 pontos

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2

Os diagramas de corpo livre do disco e do bloco são apresentados nas figuras abaixo:





Resposta a: 2 pontos

Considerando o sistema material constituído pelo disco, bloco e cabo, notamos que:

- Como o disco rola sem escorregar, o ponto I de contacto com o plano horizontal corresponde ao seu *C.I.R.* Sendo, portanto, nula a velocidade a velocidade relativa dos pontos de aplicação da força de contato (ou seja, de $-H\vec{i}+N\vec{j}$), é nula a sua potência, e, por decorrência, o trabalho por ela realizado ao longo do tempo. .
- Como o centro de massa G se move perpendicularmente à direção de $\vec{g}$), é nulo o trabalho da força peso do disco.
- Como não existe atrito no plano inclinado, a força de contacto entre o bloco e o disco possui apenas a componente normal (N_1) ao plano. O trabalho dessa força é nulo, de vez que sua direção é perpendicular à do deslocamento do bloco.
- Como o cabo é ideal, ou seja, indeformável, ao longo de sua extensão existem pares equilibrados de forças internas de mesmo módulo, mesma direção e sentidos opostos. O trabalho total dessas forças é nulo.
- Portanto, apenas a força peso do bloco realiza trabalho.

Resposta b: 1 ponto

Aplicando-se o Teorema da Energia Cinética ao sistema, tem-se:

$$\frac{1}{2}J_I\omega^2+\frac{1}{2}mv_B^2=mg\ell\sin\alpha \qquad (1)$$

onde

$$J_I=\frac{1}{2}MR^2+MR^2=\frac{3}{2}MR^2 \qquad (2)$$

e

$$v_B=\omega R \qquad (3)$$

Substituindo-se (2) e (3) em (1), obtém-se a velocidade angular do disco:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}MR^2\omega^2+\frac{1}{2}m\omega^2R^2=mg\ell\sin\alpha \qquad (4)$$

$$\Rightarrow\left(\frac{3}{4}M+\frac{1}{2}m\right)R^2\omega^2=mg\ell\sin\alpha \qquad (5)$$

$$\Rightarrow\omega=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{mg\ell\sin\alpha}{\left(\frac{3}{4}M+\frac{1}{2}m\right)}}\Rightarrow\vec{\omega}=-\frac{1}{R}\sqrt{\frac{mg\ell\sin\alpha}{\left(\frac{3}{4}M+\frac{1}{2}m\right)}}\vec{k} \qquad (6)$$

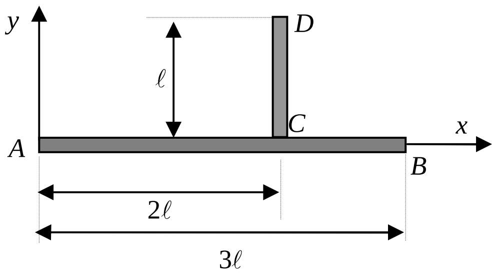
Resposta c: 1 ponto

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 3

Aplicando-se a técnica de composição de propriedades inerciais à peça ilustrada na figura abaixo, tem-se:



$$J_{Ax} = J_{Ax}^{(AB)} + J_{Ax}^{(CD)} = 0 + \frac{m\ell^2}{12} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{m\ell^2}{3}$$

$$J_{Ay} = J_{Ay}^{(AB)} + J_{Ay}^{(CD)} = \frac{3m(3\ell)^2}{3} + 0 + m(2\ell)^2 = 13m\ell^2$$

$$J_{Az} = J_{Az}^{(AB)} + J_{Az}^{(CD)} = \frac{3m(3\ell)^2}{3} + \left\{\frac{m\ell^2}{12} + m\left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + (2\ell)^2\right]\right\} = \frac{40m\ell^2}{3}$$

Resposta a: 1,5 pontos

$$J_{Axy} = J_{Axy}^{(AB)} + J_{Axy}^{(CD)} = 0 + m2\ell\frac{\ell}{2} = m\ell^2$$

$$J_{Axz} = J_{Axz}^{(AB)} + J_{Axz}^{(CD)} = \left[0 + 3m \cdot \frac{3\ell}{2} \cdot 0\right] + \left[0 + m \cdot 2\ell \cdot 0\right] = 0$$

$$J_{Ayz} = J_{Ayz}^{(AB)} + J_{Ayz}^{(CD)} = \left[0 + 3m \cdot 0 \cdot 0\right] + \left[0 + m\frac{\ell}{2} \cdot 0\right] = 0$$

Resposta b: 0,5 ponto