ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

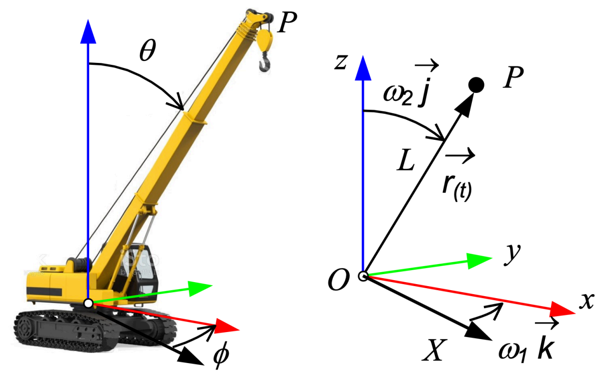
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Prova Substitutiva – 20 de Dezembro de 2022

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

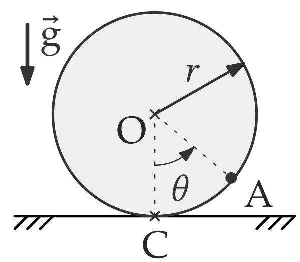
Dados – para uma barra homogênea de centro G, comprimento l e massa m: $J_{Gz} = ml^2/12$;
– para um disco homogêneo de centro G, raio r e massa m: $J_{Gz} = mr^2/2$.

Questão 1 (3,5 pontos). O ponto O do guindaste de esteira, ilustrado na figura, avança com velocidade constante $\vec{v}_O = V_O\,\vec{I}$ na direção fixa do eixo OX, contido no plano Oxy. A cabine e a lança giram em torno do eixo Oz com velocidade angular $\vec{\omega}_1 = \omega_1\,\vec{k}$ constante. A lança OP do guindaste tem comprimento L e gira, com respeito à cabine, no plano Oxz, com velocidade angular $\vec{\omega}_2 = \omega_2\,\vec{j}$ constante. Considerando o referencial auxiliar móvel Oxyz solidário à cabine do guindaste, pede-se:



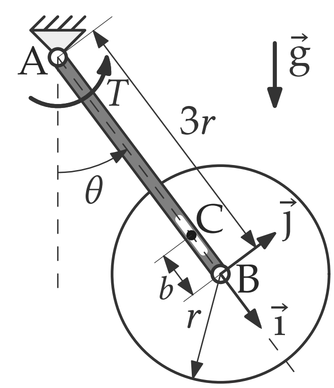
a) (0,5 ponto) a velocidade relativa do ponto P na extremidade da lança;
b) (0,5 ponto) a velocidade de arrastamento do ponto P;
c) (0,5 ponto) a velocidade absoluta do ponto P;
d) (1,0 ponto) a aceleração absoluta do ponto P;
e) (0,5 ponto) o vetor de rotação absoluta $\vec{\omega}$ da lança;
f) (0,5 ponto) o vetor aceleração angular absoluta $\vec{\alpha}$ da lança.

Questão 2 (3,0 pontos). O disco homogêneo da figura, de centro O, raio r e massa m, rola *sem escorregar* sobre o plano horizontal. Existe uma partícula, de massa m, presa no ponto A da borda do disco. G é o centro de massa do corpo (disco + partícula) e C é o ponto de contato do disco com o plano. O corpo é abandonado, do repouso, na posição caracterizada por $\theta = \pi/2$. Pede-se:



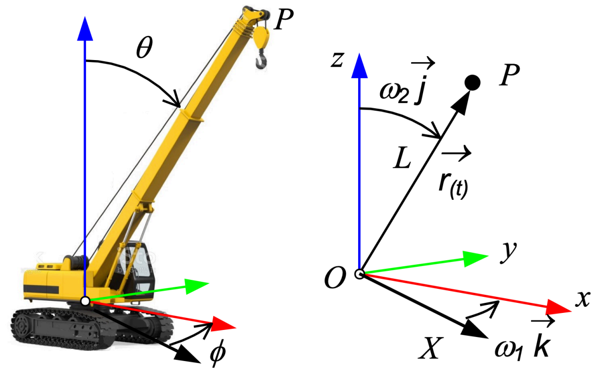
a) (0,5 ponto) o diagrama de corpo livre para $\theta = \pi/2$ (indique as forças nos seus sentidos corretos);
b) (1,0 ponto) os momentos de inércia J_{Oz}, J_{Gz} e J_{Cz} do corpo para uma configuração genérica θ;
c) (1,5 pontos) a velocidade angular ω do corpo quando $\theta = 0$ (aplique o TEC).

Questão 3 (3,5 pontos). Um disco homogêneo de massa m e raio r está ligado por meio da articulação B e do pino C (separados entre si pela distância b a uma barra delgada AB de massa $2m$ e comprimento $3r$. O conjunto gira no plano vertical sob a ação da gravidade e de um momento $T\vec{k}$ aplicado sobre a barra. Não há atrito no contato, no interior da guia, entre o pino C e a barra. No instante em que AB forma um ângulo θ com a vertical, são conhecidas a velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ e a aceleração angular $\vec{\alpha} = \alpha\vec{k}$ do conjunto barra + disco. Adotando a base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ indicada na figura, pedem-se:



a) (0,5 ponto) o vetor posição (G – A) do centro de massa G do conjunto;
b) (1,0 ponto) os diagramas de corpo livre do disco e do conjunto disco + barra;
c) (0,5 ponto) a reação em A;
d) (1,0 ponto) o momento T compatível com o movimento descrito.
e) (0,5 ponto) a força $\vec{F}$ aplicada ao disco no pino C.

Questão 1 (3,5 pontos). O ponto O do guindaste de esteira, ilustrado na figura, avança com velocidade constante $\vec{v}_O = V_O\,\vec{I}$ na direção fixa do eixo OX, contido no plano Oxy. A cabine e a lança giram em torno do eixo Oz com velocidade angular $\vec{\omega}_1 = \omega_1\,\vec{k}$ constante. A lança OP do guindaste tem comprimento L e gira, com respeito à cabine, no plano Oxz, com velocidade angular $\vec{\omega}_2 = \omega_2\,\vec{j}$ constante. Considerando o referencial auxiliar móvel Oxyz solidário à cabine do guindaste, pede-se:



a) (0,5 ponto) a velocidade relativa do ponto P na extremidade da lança;
b) (0,5 ponto) a velocidade de arrastamento do ponto P;
c) (0,5 ponto) a velocidade absoluta do ponto P;
d) (1,0 ponto) a aceleração absoluta do ponto P;
e) (0,5 ponto) o vetor de rotação absoluta $\vec{\omega}$ da lança;
f) (0,5 ponto) o vetor aceleração angular absoluta $\vec{\alpha}$ da lança.

Questão 1 – Resolução

(a) a velocidade relativa do ponto P na extremidade da lança:

$$\vec{v}_{P,rel} = \vec{v}_{O,rel} + \vec{\omega}_{rel} \wedge (P - O) = \vec{0} + \omega_2\,\vec{j} \wedge L\,\left(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{k}\right) = L\omega_2\left(\cos\theta\,\vec{i} - \sin\theta\,\vec{k}\right) \quad (0{,}5)$$

(b) a velocidade de arrastamento do ponto P:

$$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_{O,arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge (P - O) = V_O\,\vec{I} + \omega_1\,\vec{k} \wedge L\,\left(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{k}\right)$$
$$\vec{v}_{P,arr} = V_O\,\left(\cos\phi\,\vec{i} - \sin\phi\,\vec{j}\right) + L\omega_1\,\sin\theta\,\vec{j} = V_O\cos\phi\,\vec{i} + \left(-V_O\sin\phi + L\omega_1\sin\theta\right)\,\vec{j} \quad (0{,}5)$$

(c) a velocidade absoluta do ponto P:

$$\vec{v}_P = \left(V_O\cos\phi + L\omega_2\cos\theta\right)\,\vec{i} - \left(V_O\sin\phi - L\omega_1\sin\theta\right)\,\vec{j} - L\omega_2\sin\theta\,\vec{k} \quad (0{,}5)$$

(d) a aceleração absoluta do ponto P:

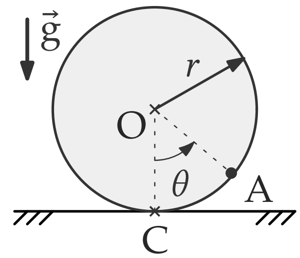
$$\vec{a}_{P,rel} = \vec{0} + \vec{0} - L\omega_2^2\,\left(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{k}\right) \quad (0{,}3)$$
$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{0} + \vec{0} - L\omega_1^2\sin\theta\,\vec{i} \quad (0{,}3)$$
$$\vec{a}_{P,\,cor} = 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{rel} = 2\omega_1\,\vec{k} \wedge L\omega_2\,\left(\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{k}\right) = 2L\omega_1\omega_2\sin\theta\,\vec{j} \quad (0{,}3)$$
$$\vec{a}_P = -L\left(\omega_2^2\sin\theta\,\vec{i} + \omega_1^2\sin\theta\right)\vec{i} + 2L\omega_1\omega_2\sin\theta\,\vec{j} - L\omega_2^2\cos\theta\,\vec{k} \quad (0{,}1)$$

(e) o vetor de rotação absoluta $\vec{\omega}$ da lança:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} = \omega_2\,\vec{j} + \omega_1\,\vec{k} \quad (0{,}5)$$

(f) o vetor aceleração angular absoluta $\vec{\alpha}$ da lança:

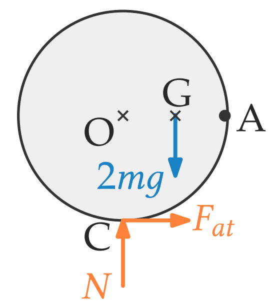
$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \vec{0} + \vec{0} + \left(\omega_1\,\vec{k} \wedge \omega_2\,\vec{j}\right) = -\omega_1\omega_2\,\vec{i} \quad (0{,}5)$$



Questão 2 (3,0 pontos). O disco homogêneo da figura, de centro O, raio r e massa m, rola *sem escorregar* sobre o plano horizontal. Existe uma partícula, de massa m, presa no ponto A da borda do disco. G é o centro de massa do corpo (disco + partícula) e C é o ponto de contato do disco com o plano. O corpo é abandonado, do repouso, na posição caracterizada por $\theta = \pi/2$. Pede-se:

a) (0,5 ponto) o diagrama de corpo livre para $\theta = \pi/2$ (indique as forças nos seus sentidos corretos);
b) (1,0 ponto) os momentos de inércia J_{Oz}, J_{Gz} e J_{Cz} do corpo para uma configuração genérica θ;
c) (1,5 pontos) a velocidade angular ω do corpo quando $\theta = 0$ (aplique o TEC).

Questão 2 – Resolução



(a) Diagrama de corpo livre: figura ao lado. (0,5)

(b) Momentos de inércia:

$$J_{Oz} = \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3mr^2}{2} \quad (0,3)$$

$$J_{Gz} = J_{Oz} - 2m\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3mr^2}{2} - \frac{mr^2}{2} = mr^2 \quad (0,3)$$

$$J_{Cz} = J_{Gz} + 2m\left[\left(r - \frac{r}{2}\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\sin\theta\right)^2\right] = mr^2 + 2m\left[\frac{5r^2}{4} - r^2\cos\theta\right] = \left(\frac{7}{2} - 2\cos\theta\right)mr^2 \quad (0,4)$$

(c) Velocidade angular para $\theta = 0$ aplicando o TEC:

$$E - E_0 = W$$

$$E_0 = 0$$

$$E = \frac{1}{2}J_{Cz}\,\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} - 2\cos 0\right)mr^2\omega^2 = \frac{3}{4}mr^2\omega^2 \qquad (0,5)$$

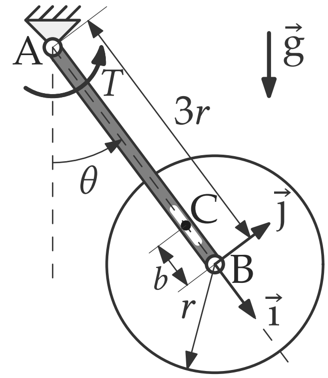
A única força externa que realiza trabalho é o peso da partícula:

$$W = mgr \qquad (0,5)$$

Portanto:

$$\frac{3}{4}mr^2\omega^2 = mgr \qquad \Rightarrow \qquad \omega^2 = \frac{4}{3}\frac{g}{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad |\omega| = 2\sqrt{\frac{g}{3r}} \qquad (0,5)$$

Questão 3 (3,5 pontos). Um disco homogêneo de massa m e raio r está ligado por meio da articulação B e do pino C (separados entre si pela distância b a uma barra delgada AB de massa $2m$ e comprimento $3r$. O conjunto gira no plano vertical sob a ação da gravidade e de um momento $T\vec{k}$ aplicado sobre a barra. Não há atrito no contato, no interior da guia, entre o pino C e a barra. No instante em que AB forma um ângulo θ com a vertical, são conhecidas a velocidade angular $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ e a aceleração angular $\vec{\alpha} = \alpha\vec{k}$ do conjunto barra + disco. Adotando a base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ indicada na figura, pedem-se:



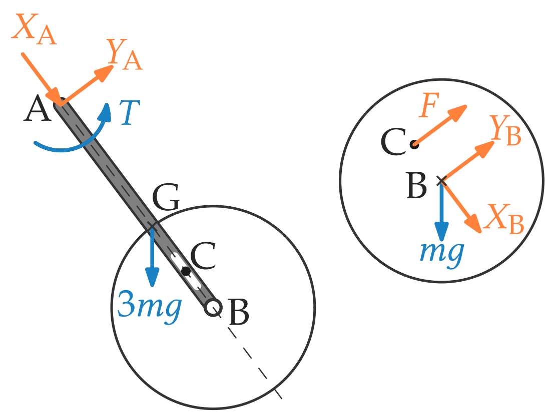
a) (0,5 ponto) o vetor posição (G – A) do centro de massa G do conjunto;
b) (1,0 ponto) os diagramas de corpo livre do disco e do conjunto disco + barra;
c) (0,5 ponto) a reação em A;
d) (1,0 ponto) o momento T compatível com o movimento descrito.
e) (0,5 ponto) a força $\vec{F}$ aplicada ao disco no pino C.

Questão 3 – Resolução

(a) Vetor posição (G–A) do centro de massa G do conjunto:

$$(G - A) = \frac{(2m)\left(\frac{3}{2}r\,\vec{\imath}\right) + m(3r\,\vec{\imath})}{2m + m} = 2r\,\vec{\imath} \qquad (0{,}5)$$

(b) DCLs do disco e do conjunto: figura ao lado (0,5 cada)



(c) Aceleração do centro de massa G do conjunto:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge (G - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - A)]$$
$$= \vec{0} + \alpha\vec{k} \wedge (2r\,\vec{\imath}) + \omega\vec{k} \wedge [\omega\vec{k} \wedge (2r\,\vec{\imath})] = -2\omega^2 r\,\vec{\imath} + 2\alpha r\,\vec{\jmath}$$

Teorema da resultante (TR) aplicado ao conjunto (0,5):

$$\vec{R} = (m + 2m)\vec{a}_G \quad \Rightarrow \quad X_A\,\vec{\imath} + Y_A\,\vec{\jmath} + 3mg(\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}) = 3m\left(-2\omega^2 r\,\vec{\imath} + 2\alpha r\,\vec{\jmath}\right)$$
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_A = X_A\,\vec{\imath} + Y_A\,\vec{\jmath} = 3m\left[-(g\cos\theta + 2\omega^2 r)\vec{\imath} + (g\sin\theta + 2\alpha r)\vec{\jmath}\right]$$

(d) Momento de inércia J_{Az} do conjunto:

$$J_{Az} = \underbrace{\frac{(2m)(3r)^2}{12} + (2m)\left(\frac{3}{2}r\right)^2}_{\text{barra}} + \underbrace{\frac{mr^2}{2} + m(3r)^2}_{\text{disco}} = \frac{31}{2}mr^2 \qquad (0{,}5)$$

Teorema da quantidade de movimento angular (TQMA) aplicado ao conjunto, polo A:

$$\vec{M}_A = (m + 2m)(G - A) \wedge \vec{a}_A + J_{Az}\alpha\vec{k} \quad \Rightarrow \quad T\vec{k} - (2r)(3mg\sin\theta)\vec{k} = \vec{0} + J_{Az}\alpha\vec{k}$$
$$\Rightarrow \quad T = \frac{31}{2}mr^2\alpha + 6mgr\sin\theta \qquad (0{,}5)$$

(e) Teorema da quantidade de movimento angular (TQMA) aplicado ao disco:

$$\vec{M}_B = J_{Bz}\alpha\vec{k} \quad \Rightarrow \quad -bF\vec{k} = J_{Bz}\alpha\vec{k}$$
$$\Rightarrow \quad F = -\frac{mr^2}{2b}\alpha \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\frac{mr^2}{2b}\alpha\,\vec{\jmath} \qquad (0{,}5)$$

Solução alternativa do item (d) – Momento de inércia J_{Gz} do conjunto:

$$J_{\mathrm{Gz}} = \underbrace{\frac{(2m)(3r)^2}{12} + (2m)\left(\frac{3}{2}r - 2r\right)^2}_{\text{barra}} + \underbrace{\frac{mr^2}{2} + m(3r-2r)^2}_{\text{disco}} = \frac{7}{2}mr^2$$

Teorema da quantidade de movimento angular (TQMA) aplicado ao conjunto, polo G:

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}} = J_{\mathrm{Gz}}\alpha\vec{\mathrm{k}} \quad &\Rightarrow \quad T\vec{\mathrm{k}} - (2r)(Y_{\mathrm{A}})\vec{\mathrm{k}} = J_{\mathrm{Gz}}\alpha\vec{\mathrm{k}} \\ &\Rightarrow \quad T = \frac{7}{2}mr^2\alpha + 2r(3m)(g\sin\theta + 2\alpha r) = \frac{31}{2}mr^2\alpha + 6mgr\sin\theta \end{aligned}$$