ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

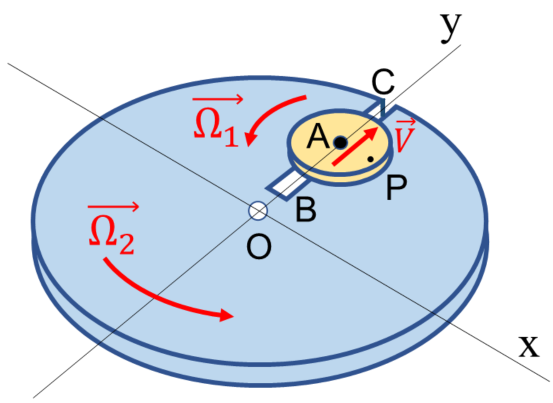
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Prova Substitutiva – 21 de Dezembro de 2021

Duração da Prova: 140 minutos (Início: 15:40 – Término: 18:00)

Questão 1 (3,5 pontos). O sistema mostrado na figura é composto pelo disco de centro O, de raio 4R, e por um disco de centro A e raio R. No instante considerado, o disco de centro O gira ao redor do ponto O com vetor de rotação $\vec{\Omega_2} = \Omega_2 \vec{k}$, constante, e o disco de centro A gira ao redor do ponto A com vetor de rotação $\vec{\Omega_1} = \Omega_1 \vec{k}$, constante. Neste mesmo instante, o disco de centro A desloca-se ao longo de um rasgo BC no disco de centro O, com a velocidade $\vec{V} = V\vec{j}$, constante. Considere que o sistema de referência móvel Oxyz é solidário ao disco de centro O e que P é um ponto da periferia do disco de centro A, com coordenadas (R,2R,0). Nestas condições, e para o instante considerado, determinar:



(a) A velocidade absoluta do ponto P
(b) A aceleração absoluta do ponto A
(c) A aceleração absoluta do ponto P

Solução

<u>Movimento relativo: Do disco de centro A</u>

$\boldsymbol{\overrightarrow{V_{rel_A}} = V\vec{j}}$

$\overrightarrow{V_{rel_P}} = \overrightarrow{V_{rel_A}} + \vec{\Omega_1} \wedge (P - A) = V\vec{j} + \Omega_1\vec{k} \wedge R\vec{i} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{V_{rel_P}} = (V + \Omega_1 R)\vec{j}}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{a_{rel_A}} = \vec{0}}$

$\overrightarrow{a_{rel_P}} = \overrightarrow{a_{rel_A}} + \dot{\vec{\Omega_1}} \wedge (P - A) + \vec{\Omega_1} \wedge [\vec{\Omega_1} \wedge (P - A)] = \Omega_1\vec{k} \wedge \Omega_1 R\vec{j} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{a_{rel_P}} = -\Omega_1{}^2 R\vec{i}}$

<u>Movimento de arrastamento: Do disco de centro O</u>

$\overrightarrow{V_{arr_O}} = \vec{0}$

$\overrightarrow{V_{arr_A}} = \overrightarrow{V_{arr_O}} + \vec{\Omega_2} \wedge (A - O) = \Omega_2\vec{k} \wedge 2R\vec{j} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{V_{arr_A}} = -2\Omega_2 R\vec{i}}$

$\overrightarrow{V_{arr_P}} = \overrightarrow{V_{arr_O}} + \vec{\Omega_2} \wedge (P - O) = \Omega_2\vec{k} \wedge (R\vec{i} + 2R\vec{j}) \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{V_{arr_P}} = -2\Omega_2 R\vec{i} + \Omega_2 R\vec{j}}$

$\overrightarrow{a_{arr_A}} = \overrightarrow{a_{arr_O}} + \dot{\vec{\Omega_2}} \wedge (A - O) + \vec{\Omega_2} \wedge [\vec{\Omega_2} \wedge (A - O)] = \Omega_2\vec{k} \wedge -2\Omega_2 R\vec{i} \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{a_{arr_A}} = -2\Omega_2{}^2 R\vec{j}}$

$\overrightarrow{a_{arr_P}} = \overrightarrow{a_{arr_O}} + \dot{\vec{\Omega_2}} \wedge (P - O) + \vec{\Omega_2} \wedge [\vec{\Omega_2} \wedge (P - O)] = \Omega_2\vec{k} \wedge (-2\Omega_2 R\vec{i} + \Omega_2 R\vec{j})$

$\Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{a_{arr_P}} = -\Omega_2{}^2 R\vec{i} - 2\Omega_2{}^2 R\vec{j}}$

<u>Acelerações de Coriolis:</u>

$\overrightarrow{a_{Cor_A}} = 2\vec{\Omega_2} \wedge \overrightarrow{V_{rel_A}} = 2\Omega_2\vec{k} \wedge V\vec{j} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{a_{Cor_A}} = -2\Omega_2 V\vec{i}}$

$\overrightarrow{a_{Cor_P}} = 2\vec{\Omega_2} \wedge \overrightarrow{V_{rel_P}} = 2\Omega_2\vec{k} \wedge (V + \Omega_1 R)\vec{j} \quad \Rightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{a_{Cor_P}} = -2(\Omega_2 V + \Omega_2\Omega_1 R)\vec{i}}$

<u>Composição de Movimentos</u>

$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{V_{abs_A}} = -2\Omega_2 R\vec{i} + V\vec{j}}}$

$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{V_{abs_P}} = -2\Omega_2 R\vec{i} + (V + \Omega_1 R + \Omega_2 R)\vec{j}}}$

$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{a_{abs_A}} = -2\Omega_2 V\vec{i} - 2\Omega_2{}^2 R\vec{j}}}$

$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{a_{abs_P}} = -(\Omega_2{}^2 R + \Omega_1{}^2 R + 2\Omega_2 V - \Omega_2\Omega_1 R)\vec{i} - 2\Omega_2{}^2 R\vec{j}}}$

$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{\omega_{abs}} = (\Omega_1 + \Omega_2)\vec{k}}}$

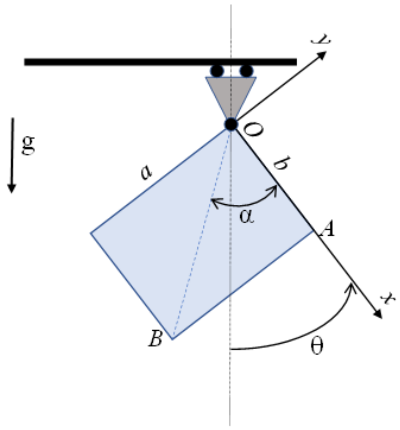
$\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{\alpha_{abs}} = \Omega_2\vec{k} \wedge \Omega_1\vec{k} = \vec{0}}}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 2 (3,5 pontos). O sistema plano da figura mostra uma placa retangular homogênea de espessura constante de massa ***M***. A placa é suspensa por um apoio simples em ***O*** e o ângulo **θ** é medido entre a aresta ***OA*** e a vertical por ***O***; o sistema de coordenadas *(A, x, y, z)* é solidário ao plano médio da placa e o ângulo **α** é medido entre a aresta ***OA*** e a diagonal ***OB*** da placa. Dado que o corpo rígido é liberado a partir do repouso com **θ**(0)=0 e que ***M***= (kg), ***a***=... (m) e ***b***=...(m) responda:



a) No instante em que o centro de massa ***G*** da placa passa pela vertical por ***O*** as coordenadas do Centro Instantâneo de Rotação ***CIR*** da placa são: (preencher os valores) **(1,0)**

b) No instante em que ***G*** e ***O*** estão sobre a mesma vertical pela 1ª vez, o deslocamento do ponto ***O*** é de (preencher o valor; coloque o sinal **"menos"** se o deslocamento for para a esquerda)***;* (0,5)**

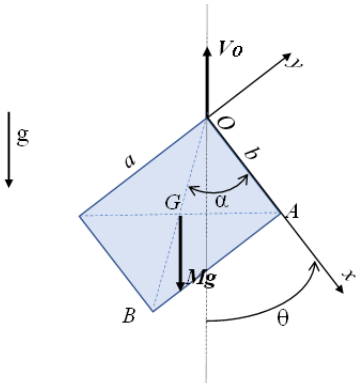
c) Considerando ***a=b***, o valor máximo da velocidade angular da placa é: (selecionar a alternativa correta ou preencher o valor numérico); **(1,0)**

d) Considerando ***a=b***, o valor de **θ** quando a velocidade angular do corpo se anula pela primeira vez após o início do movimento é: (selecionar a alternativa correta ou preencher o valor numérico); **(0,5)**

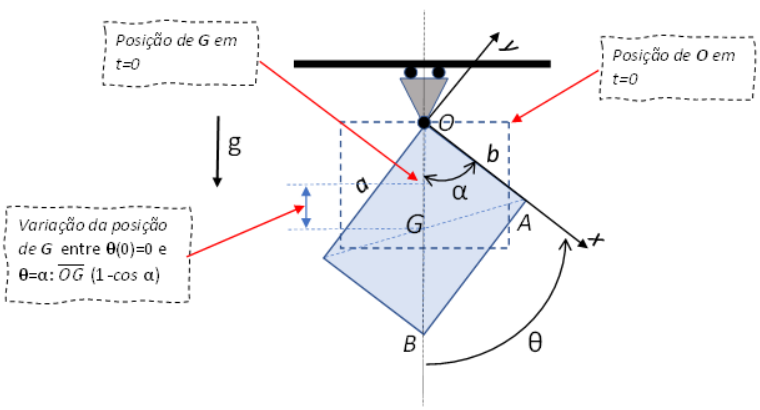
Solução

1) Conforme mostrado no diagrama de corpo livre da placa, não há forças atuantes na direção horizontal e o sistema parte do repouso; portanto, o centro de massa ***G*** da placa apenas se movimenta na direção vertical, enquanto o ponto ***O*** se desloca na direção horizontal. No instante em que ***O*** e ***G*** estão na mesma vertical, ***G*** encontra-se no ponto mínimo da sua trajetória retilínea, de modo que tem velocidade nula, isto é, ***G*** é o ***CIR*** da placa. Portanto, as coordenadas do ***CIR*** da placa são $x_{CIR}=b/2$, $y_{CIR}=-a/2$.

DCL da placa:



2) No instante em que ***O*** e ***G*** estão na mesma vertical pela 1ª vez o ponto ***O*** deslocou-se -*a*/2 (*a*/2 para a esquerda)**.**



3) Conservação da energia mecânica: ***T+U=cte.***

No instante em que ***G*** é o ***CIR*** da placa, a energia cinética é máxima:

$T_{máx} = \frac{\omega^2_{máx}}{2} J_G$; $J_G = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$ para a=b, $J_G = \frac{M}{6}a^2$

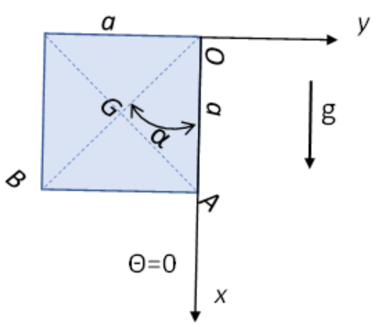
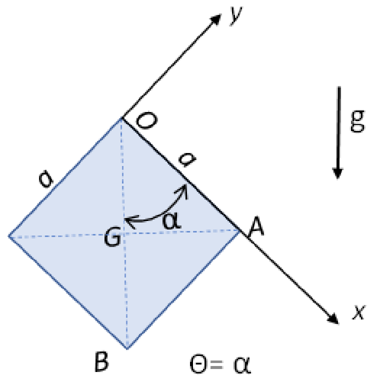
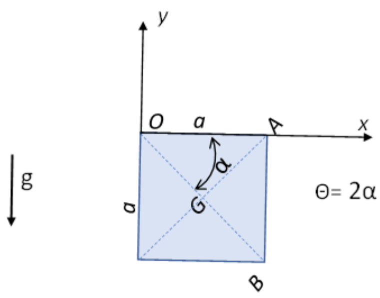
Como energia mecânica se conserva, a energia potencial correspondente é:

$U = Mg\,\overline{OG}$ (1-cos α); para a=b, $\overline{OG} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Portanto, $\frac{\omega^2_{máx}}{2}\frac{M}{6}a^2 = Mg\,\frac{a\sqrt{2}}{2}\,(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$, ou,

$\omega^2_{máx} = g\,\frac{6\sqrt{2}}{a}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$

4)

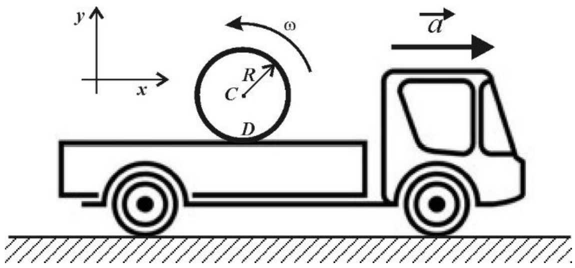
Em t=0, $\omega = 0$	Quando **θ**=α , $\omega = \omega_{máx}$	Em **θ=2**α, $\omega = 0$ pela 1ª vez após o início do movimento.
		

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 3 (3,5 pontos). O tubulão de concreto de massa m = **m** tem raio médio R = **R**, momento de inércia $J_C = \boldsymbol{J_C}$ em relação ao seu eixo, e foi colocado sem nenhum calço na carroceira do caminhão, conforme mostrado na figura abaixo. O caminhão tem tração traseira, partiu do repouso e avança com uma aceleração de módulo a = $\boldsymbol{a}$ constante, conforme a figura. Suponha que o tubulão role sem escorregar na carroceria do caminhão e despreze sua espessura. Determine, **no instante $\boldsymbol{t = t_1}$:**



(a) (*0,5 ponto*) a velocidade do ponto D do tubulão, em contato com o caminhão:

(b) (*0,5 ponto*) a velocidade do ponto C, em função da sua rotação ω:

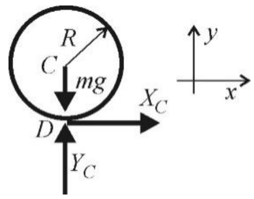
(c) (*0,5 ponto*) determine a aceleração do ponto C, em função de ω e $\dot{\omega}$;

(d) (*1 ponto*) determine a aceleração rotacional $\dot{\omega}$ do tubulão:

(e) (*0,5 ponto*) determine a aceleração do ponto D do tubulão, em função do tempo e de ω e $\dot{\omega}$:

Resolução

0,5 ponto



(a) Cinemática: ponto D do caminhão: $\vec{a}_{Dcam} = a\vec{\imath} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{v}_{Dcam} = at\vec{\imath}}$

(b) Ponto D do tubulão, sem escorregamento: $\vec{v}_{Dtub} = \vec{v}_{Dcam} = at\vec{\imath}$

Cinemática:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{Dtub} + \vec{\omega} \wedge (C - D) = \vec{v}_{Dcam} + \omega\vec{k} \wedge R\vec{\jmath} \Rightarrow \boldsymbol{\vec{v}_C = at\vec{\imath} - \omega R\vec{\imath}}$$

0,5 ponto

(c) Derivando: $\boldsymbol{\vec{a}_C = (a - \dot{\omega}R)\vec{\imath}}$ (1)

0,5 ponto

(d) TR, usando (1):

$$m\vec{a}_C = m(a - \dot{\omega}R)\vec{\imath} = X_C\vec{\imath} + (Y_C - mg)\vec{\jmath} \Rightarrow \begin{cases} m(a - \dot{\omega}R) = X_C \\ 0 = Y_C - mg \end{cases} \quad (2)$$

TQMA, polo C: $J_C\dot{\omega} = M_C = R \cdot X_C \Rightarrow X_C = \frac{J_C}{R}\dot{\omega}$

Substituindo em (2): $m(a - \dot{\omega}R) = X_C = \frac{J_C}{R}\dot{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{\dot{\omega} = \frac{mRa}{J_C + mR^2}}$

1 ponto

(e) Cinemática: $\vec{a}_{Dtub} = \vec{a}_C + \dot{\vec{\omega}} \wedge (D - C) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (D - C)] =$

$$= (a - \dot{\omega}R)\vec{\imath} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (-R\vec{\jmath}) + \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge (-R\vec{\jmath})\right] \Rightarrow \boldsymbol{\vec{a}_{Dtub} = a\vec{\imath} + \omega^2 R\vec{\jmath}}$$

1 ponto