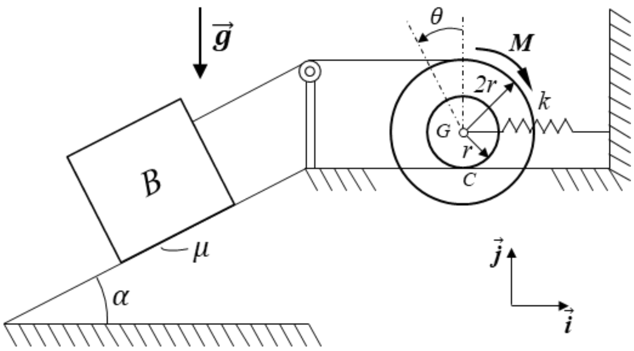
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

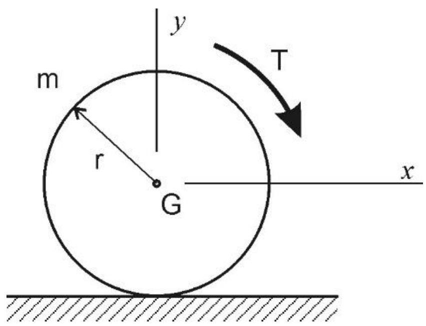
MECÂNICA I – PME 3100 – Prova Substitutiva – 03 de dezembro de 2019

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido uso de dispositivos eletrônicos)



1ª Questão (3,5 pontos) O *sistema* ilustrado na figura é composto por um carretel rígido e homogêneo de centro G e um bloco B conectados por um fio ideal. O carretel possui massa $3m$ e momento de inércia $J_{Gz} = 3mr^2$ e rola sem escorregar sobre o plano horizontal. O carretel é também conectado ao plano vertical por meio de uma mola ideal linear de constante elástica k. Adicionalmente, o bloco B, de massa m, desce um plano com inclinação α, *partindo do repouso* em $\theta = 0$. O coeficiente de *atrito cinético* entre o bloco e o plano inclinado é μ. Admitindo que no instante inicial a mola não está deformada, e que um momento M (constante) é aplicado ao carretel, pede-se:

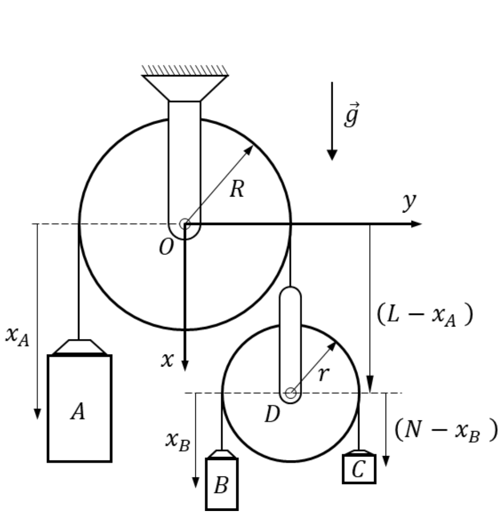
- **a)** os diagramas de corpo livre do carretel e do bloco;
- **b)** a energia cinética do *sistema* em função da velocidade angular do disco (ω);
- **c)** o trabalho das forças externas atuantes no *sistema* em função de θ;
- **d)** a velocidade angular (ω) do disco em função de θ;
- **e)** a aceleração angular ($\dot{\omega}$) do disco em função de θ.



2ª Questão (3,5 pontos) O disco de raio r e massa m está inicialmente em repouso sobre o plano horizontal. Num determinado instante, um momento T (constante) é aplicado ao disco que passa a rolar sem escorregar. O coeficiente de atrito entre o disco e o plano horizontal é μ, e a aceleração da gravidade é g. Pede-se:

- **a)** o diagrama de corpo livre do disco;
- **b)** determine os esforços atuantes no ponto de contato do disco com o plano horizontal;
- **c)** o valor máximo do momento T para que o disco não escorregue;
- **d)** o intervalo de tempo até o disco atingir a rotação ω, sem escorregar, em função do momento T.

Dado: $J_G = \frac{mr^2}{2}$



3ª Questão (3,0 pontos) Dois blocos B e C de massas M e m, respectivamente, estão interligados por um fio ideal de comprimento N, que passa pela polia de centro em D e raio r, conforme mostrado na figura. Um terceiro bloco A, de massa (M+m), está interligado por outro fio de comprimento L à polia D, passando pela polia de centro em O. As polias podem girar sem atrito nos eixos e os fios são perfeitamente flexíveis e inextensíveis. Considere ainda os fios e polias com massas desprezíveis. Pede-se:

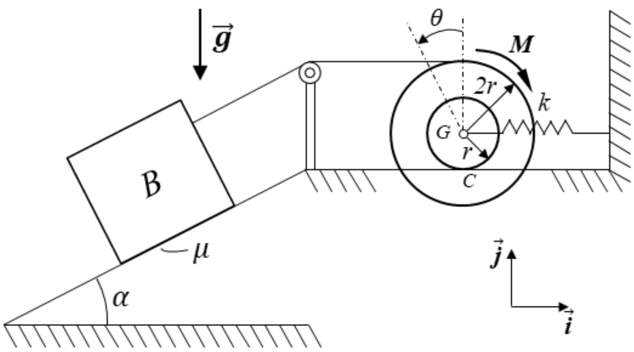
- **a)** os diagramas de corpo livre das polias;
- **b)** determine o momento da quantidade de movimento do bloco A em relação ao pólo O, e aplique o *TQMA* em relação ao mesmo pólo para determinar a tensão T no fio que passa pela polia de centro em O em função de $\ddot{x}_A$;
- **c)** aplique o Teorema da Resultante ao sistema conectado à polia de centro em D;
- **d)** aplique o *TQMA* ao sistema conectado à polia de centro em D, utilizando o pólo D;
- **e)** determine as acelerações $\ddot{x}_A$ do bloco A e $\ddot{x}_B$ do bloco B.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

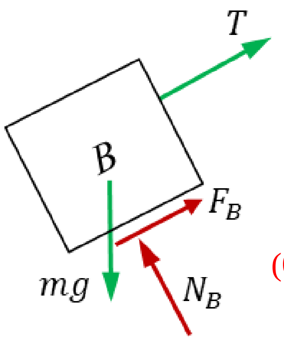
RESOLUÇÃO



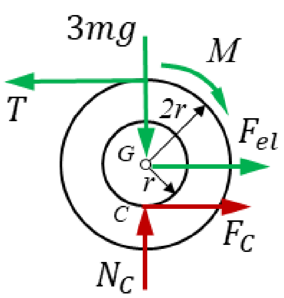
1ª Questão (3,5 pontos) O *sistema* ilustrado na figura é composto por um carretel rígido e homogêneo de centro G e um bloco B conectados por um fio ideal. O carretel possui massa $3m$ e momento de inércia $J_{Gz} = 3mr^2$ e rola sem escorregar sobre o plano horizontal. O carretel é também conectado ao plano vertical por meio de uma mola ideal linear de constante elástica k. Adicionalmente, o bloco B, de massa m, desce um plano com inclinação α, *partindo do repouso* em $\theta = 0$. O coeficiente de *atrito cinético* entre o bloco e o plano inclinado é μ. Admitindo que no instante inicial a mola não está deformada, e que um momento M (constante) é aplicado ao carretel, pede-se:

a) os diagramas de corpo livre do carretel e do bloco;
b) a energia cinética do *sistema* em função da velocidade angular do disco (ω);
c) o trabalho das forças externas atuantes no *sistema* em função de θ;
d) a velocidade angular (ω) do disco em função de θ;
e) a aceleração angular ($\dot{\omega}$) do disco em função de θ.

a) Os diagramas de corpo livre do carretel e do bloco:



(0,2)



(0,3)

b) A energia cinética do *sistema* em função da velocidade angular do disco (ω):

$$E = E_{bloco} + E_{carretel} = \frac{1}{2}m_b|\vec{v}_B|^2 + \left(\frac{1}{2}m_c|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}J_{G_z}\omega^2\right)$$

Cinemática: como o fio é inextensível (ideal), e sendo A o ponto onde o fio começa a se enrolar no carretel, temos: $|\vec{v}_B| = |\vec{v}_A| = \left|\vec{v}_C + \omega\vec{k} \wedge (A - C)\right| = |3\omega r|$. Adicionalmente, como o carretel rola sem escorregar sobre o plano horizontal, temos: $|\vec{v}_G| = |\omega r|$.

Portanto, a energia cinética do *sistema* é dado por:

$$E = \frac{9m\omega^2 r^2}{2} + \left(\frac{3m\omega^2 r^2}{2} + \frac{3mr^2\omega^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad E(\omega) = \frac{15mr^2\omega^2}{2} \qquad (1{,}0)$$

c) O trabalho das forças externas atuantes no *sistema* em função de θ:

Realizam trabalho somente (i) a força peso do bloco B; (ii) a força de atrito de escorregamento atuante no bloco B; (iii) a força elástica da mola; e (iv) o momento M. Por outro lado, **não** realizam trabalho (i) as forças internas (tração no fio) do *sistema*; (ii) as forças normais atuantes no bloco e no carretel; e (iii) a força de atrito estático atuante no ponto de contato do carretel com o plano horizontal.

Sendo Δs_B o deslocamento do bloco B ao longo do plano inclinado, temos $\Delta s_B = \Delta s_G + 2r\theta = r\theta + 2r\theta = 3r\theta$. Analogamente, o deslocamento da extremidade da mola será $\delta = \Delta s_G = r\theta$. Portanto:

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886
Departamento de Engenharia Mecânica

$$W_{1\to 2}^{ext} = W_{1\to 2}^{peso} + W_{1\to 2}^{F_B} + W_{1\to 2}^{mola} + W_{1\to 2}^{M}$$

onde:

$$W_{1\to 2}^{peso} = mg\Delta s_B \sin\alpha = (3mg\sin\alpha\, r)\theta \qquad (0{,}2)$$

$$W_{1\to 2}^{F_B} = -F_B\Delta s_B = -\mu mg\cos\alpha\,\Delta s_B = -(3\mu mg\cos\alpha\, r)\theta \qquad (0{,}2)$$

$$W_{1\to 2}^{mola} = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = -\frac{1}{2}k\delta^2 = -\frac{1}{2}k(r\theta)^2 = -\frac{kr^2\theta^2}{2} \qquad (0{,}2)$$

$$W_{1\to 2}^{M} = -M\theta \qquad (0{,}2)$$

Assim:

$$W_{1\to 2}^{ext} = (3mgr\sin\alpha - 3\mu mgr\cos\alpha - M)\theta - \left(\frac{kr^2}{2}\right)\theta^2 \qquad (0{,}2)$$

d) A velocidade angular (ω) do disco em função de θ:

Aplicando o TEC ao *sistema* partindo do repouso ($E_1 = 0$), tem-se:

$$E_2 - E_1 = W_{1\to 2}^{ext} \quad \Rightarrow \quad \omega(\theta) = \sqrt{\frac{(6mgr\sin\alpha - 6\mu mgr\cos\alpha - 2M)\theta - (kr^2)\theta^2}{15mr^2}} \qquad (0{,}5)$$

e) A aceleração angular ($\dot{\omega}$) do disco em função de θ:

Derivando, em relação ao tempo, a expressão da velocidade angular no item d), tem-se

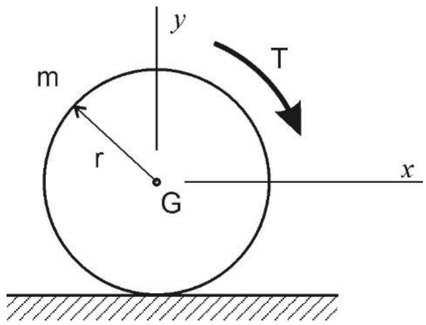
$$\dot{\omega}(\theta) = \frac{(3mgr\sin\alpha - 3\mu mgr\cos\alpha - M) - (kr^2)\theta}{15mr^2} \qquad (0{,}5)$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

2ª Questão (3,5 pontos) O disco de raio r e massa m está inicialmente em repouso sobre o plano horizontal. Num determinado instante, um momento T (constante) é aplicado ao disco que passa a rolar sem escorregar. O coeficiente de atrito entre o disco e o plano horizontal é μ, e a aceleração da gravidade é g. Pede-se:



a) o diagrama de corpo livre do disco;

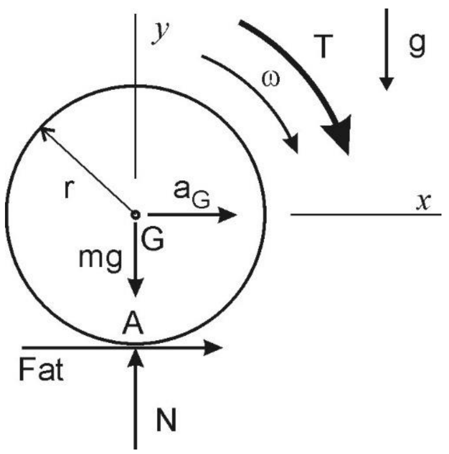
b) determine os esforços atuantes no ponto de contato do disco com o plano horizontal;

c) o valor máximo do momento T para que o disco não escorregue;

d) o intervalo de tempo até o disco atingir a rotação ω, sem escorregar, em função do momento T.

Dado: $J_G = \frac{mr^2}{2}$

a) o diagrama de corpo livre do disco;



(1,0)

b) Determine os esforços atuantes no ponto de contato do disco com o plano horizontal:

Aplicando o Teorema da Resultante (TR):

$$ma_G\vec{\imath} = F_{at}\vec{\imath} + (N - mg)\vec{\jmath} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} ma_G = F_{at} & (1) \\ N = mg & (2) \end{cases} \qquad (0,5)$$

Aplicando o TQMA:

$$\vec{H}_G = -\omega J_{G\omega}\vec{k} = -\omega\frac{mr^2}{2}\vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_G = -\dot{\omega}\frac{mr^2}{2}\vec{k} = \vec{M}_G^{ext} = (F_{at}r - T)\vec{k} \qquad (0,5)$$

$$\frac{mr^2}{2}\dot{\omega} = T - F_{at}r \qquad (3)$$

Cinemática:

$$\vec{v}_G = v_G\vec{\imath} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (G - A) = 0\vec{\imath} - \omega\vec{k} \wedge r\vec{\jmath} = \omega r\vec{\imath} \Rightarrow a_G = \dot{\omega}r \qquad (4) \qquad (0,5)$$

Substituindo (4) em (1):

$$m\dot{\omega}r = F_{at} \qquad (5)$$

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

De (5) e (3):

$\frac{3r}{2}F_{at} = T$ (6)

De (1), (3) e (4):

$\dot{\omega} = \frac{2T}{3mr^2} = cte \Rightarrow \omega = \frac{2T}{3mr^2}t$ (7)

c) O valor máximo do momento *T* para que disco não escorregue:

Para não escorregar, com (2) e (6):

$F_{at} \leq \mu N \Rightarrow \frac{2T}{3r} \leq \mu mg \Rightarrow \quad \boldsymbol{T \leq \frac{3\mu mgr}{2}}$ (0,5)

d) O intervalo de tempo até o disco atingir a rotação ω, sem escorregar, em função do momento *T*:

Para atingir ω, de (7):

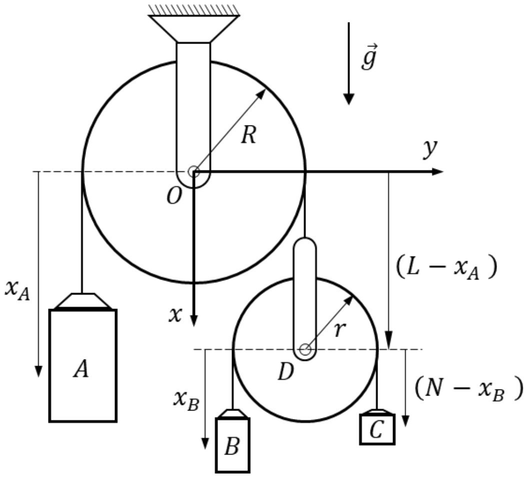
$\boldsymbol{\Delta t = \frac{3mr^2\omega}{2T}}$ (0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

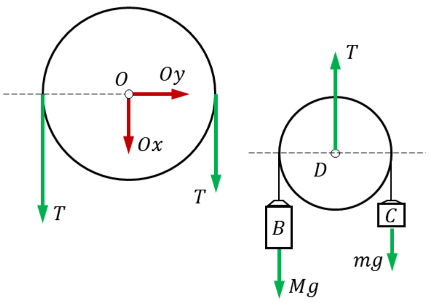
Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,0 pontos) Dois blocos *B* e *C* de massas *M* e *m*, respectivamente, estão interligados por um fio ideal de comprimento *N*, que passa pela polia de centro em *D* e raio *r*, conforme mostrado na figura. Um terceiro bloco *A*, de massa (*M*+*m*), está interligado por outro fio de comprimento *L* à polia *D*, passando pela polia de centro em *O*. As polias podem girar sem atrito nos eixos e os fios são perfeitamente flexíveis e inextensíveis. Considere ainda os fios e polias com massas desprezíveis. Pede-se:



- **a)** os diagramas de corpo livre das polias;
- **b)** determine o momento da quantidade de movimento do bloco *A* em relação ao pólo *O*, e aplique o *TQMA* em relação ao mesmo pólo para determinar a tensão *T* no fio que passa pela polia de centro em *O* em função de $\ddot{x}_A$;
- **c)** aplique o Teorema da Resultante ao sistema conectado à polia de centro em *D*;
- **d)** aplique o *TQMA* ao sistema conectado à polia de centro em *D*, utilizando o pólo *D*;
- **e)** determine as acelerações $\ddot{x}_A$ do bloco *A* e $\ddot{x}_B$ do bloco *B*.

a) O diagrama de forças do corpo livre das polias:



(0,5)

b) Determine o momento da quantidade de movimento do bloco *A* em relação ao pólo *O*, e aplique o *TQMA* em relação ao mesmo pólo para determinar a tensão *T* no fio que passa pela polia de centro em *O* em função de $\ddot{x}_A$:

$$\vec{H}_O = (A - O) \wedge (M+m)\dot{x}_A\vec{i} = (x_A\vec{i} - R\vec{j}) \wedge (M+m)\dot{x}_A\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_O = R(M+m)\dot{x}_A\vec{k}$$

$$\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{ext} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{H}}_O = (A - O) \wedge (M+m)g\vec{i} + R\vec{j} \wedge T\vec{i} \quad \Rightarrow \quad R(M+m)\ddot{x}_A = R[(M+m)g - T]$$

$$T = (M+m)(g - \ddot{x}_A) \qquad \text{(I)}$$

(1,0)

c) Aplique o Teorema da Resultante no sistema conectado à polia de centro em *D*:

Note que a aceleração do bloco *A* é $(\ddot{x}_A)$, da polia de centro em *D* é igual a $(-\ddot{x}_A)$. A aceleração relativa do bloco *B* é $(\ddot{x}_B)$ e do bloco *C* é $(-\ddot{x}_B)$. As forças são obtidas do diagrama de forças do corpo livre da polia *D*.

$$\sum m_i\vec{a}_{Gi} = \sum \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad M(-\ddot{x}_A + \ddot{x}_B) + m(-\ddot{x}_A - \ddot{x}_B) = (M+m)g - T \qquad \text{(II)}$$

(0,5)

d) Aplique o *TQMA* ao sistema conectado à polia de centro em *D*, utilizando o pólo *D*:

Note que o sistema é composto pelos blocos *B* e *C*.

$$\vec{H}_D = (B - D) \wedge M(\dot{x}_B - \dot{x}_A)\vec{i} + (C - D) \wedge m(-\dot{x}_B - \dot{x}_A)\vec{i} \qquad \text{Derivando: } \dot{\vec{H}}_D = \vec{M}_D^{ext}$$

$$\dot{\vec{H}}_D = -r\vec{j} \wedge M(\ddot{x}_B - \ddot{x}_A)\vec{i} + r\vec{j} \wedge m(-\ddot{x}_B - \ddot{x}_A)\vec{i} = -r(M-m)\ddot{x}_A\vec{k} + r(M+m)\ddot{x}_B\vec{k}$$

$$\vec{M}_D^{ext} = -r\vec{j} \wedge Mg\vec{i} + r\vec{j} \wedge mg\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_D^{ext} = (M-m)gr\vec{k}$$

$$(M+m)\ddot{x}_B - (M-m)\ddot{x}_A = (M-m)g \qquad \text{(III)}$$

(0,5)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

e) Determine as acelerações $\ddot{x}_A$ do bloco A e $\ddot{x}_B$ do bloco B:

Utilizando as expressões (I) – (III), tem-se:

$$\ddot{x}_A = g - \frac{8gmM}{m^2+6mM+M^2}g \quad ; \quad \ddot{x}_B = \frac{2g(-m^2+M^2)}{m^2+6mM+M^2}g \quad ; \quad T = \frac{8gmM(m+M)}{m^2+6mM+M^2} \qquad (0,5)$$

Alternativamente, pode-se aplicar diretamente o TR no bloco A de massa (M+m) para determinar a tensão T no cabo:

$$(M+m)\ddot{x}_A = (M+m)g - T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{8gmM(m+M)}{m^2+6mM+M^2}$$