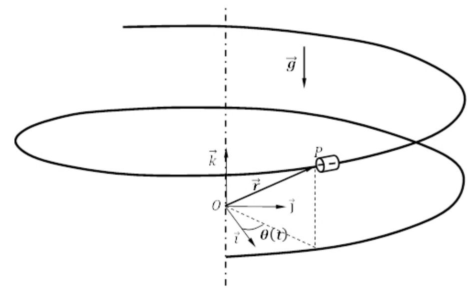
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I – Prova Substitutiva – 04 de Dezembro de 2018

Duração da Prova: 120 minutos (não é permitido usar quaisquer dispositivos eletrônicos)

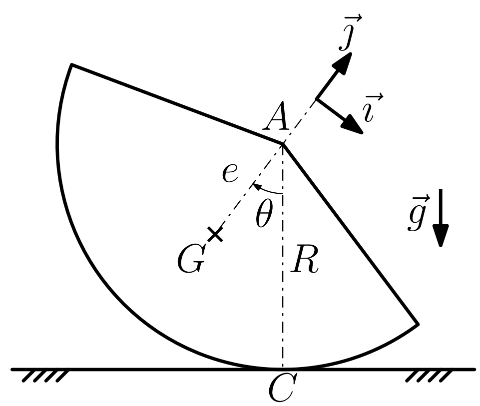
Questão 1 (3,0 pontos). A figura ao lado mostra um anel P, de massa m, que percorre a guia em formato de hélice cilíndrica em movimento ascendente devido à ação da força tangencial $\vec{F} = F\ \vec{\tau}$ de módulo constante F. Seu vetor posição parametrizado com respeito ao ângulo $\theta(t)$ é dado em componentes cartesianas como $\vec{r} = (P - 0) = a\cos\theta(t)\ \vec{\imath} + a\ \sin\theta(t)\ \vec{\jmath} + \ a\theta(t)\ \vec{k}$, com raio a, constante, e t, tempo. Sabe-se também que há atrito entre a superfície interna do anel e a guia, causando uma força proporcional ao coeficiente de atrito dinâmico μ e cuja direção é tangente à trajetória a cada instante. São fornecidos os versores tangente ($\vec{\tau}$), normal ($\vec{n}$) e binormal ($\vec{b}$) do triedro de Frenet. Nessas condições, pedem-se, em um instante genérico, em função dos parâmetros $m,\ a,\ g,\ \mu,\ t,\ \theta(t)$ e de suas derivadas temporais:



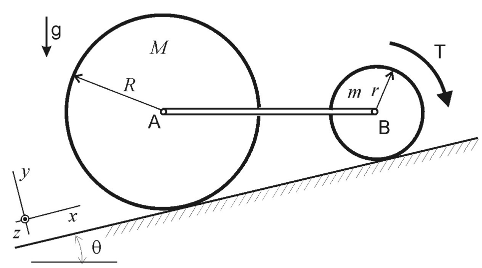
$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\ \vec{\jmath} + \vec{k})$$
$$\vec{n} = -\cos\theta\ \vec{\imath} - \sin\theta\ \vec{\jmath}$$
$$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta\ \vec{\imath} - \cos\theta\ \vec{\jmath} + \vec{k})$$

a) a velocidade escalar do anel, $v(t)$;
b) o raio de curvatura da trajetória, ρ;
c) as componentes das forças ativas nas direções do triedro de Frenet;
d) as componentes da reação vincular nas direções do triedro de Frenet.

Questão 2 (3,5 pontos). O corpo ilustrado na figura ao lado é um setor recortado de um disco homogêneo, de centro A e raio R, que pode rolar sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal. Este setor tem massa m e seu centro de massa G está a uma distância e do ponto A. O ângulo θ mede a inclinação do segmento GA com respeito à vertical, conforme indicado na figura. Além disso, adota-se uma base ortonormal de vetores $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ solidária a este corpo, com o versor $\vec{\jmath}$ permacecendo paralelo à direção do segmento GA. Pede-se:
a) determinar o momento de inércia J_{Gz} e o produto de inércia J_{Gxy} (dado: $J_{Az} = mR^2/2$);
b) escrever as expressões das energias cinética T e potencial V para este corpo em função de θ e $\dot{\theta}$;
c) obter a equação de movimento deste sistema, explicitando $\ddot{\theta}$ em função de θ e $\dot{\theta}$.



Questão 3 (3,5 pontos). O disco de centro A, massa M e raio R está conectado ao disco de centro B, raio r e massa m por meio de uma barra AB, de massa desprezível, articulada nos respectivos centros, conforme mostrado na figura ao lado. O sistema está num plano vertical e apoiado sobre uma rampa inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. A barra AB permanece horizontal durante o movimento. Um torque T é aplicado no disco $(B; r)$. São dados os momentos de inércia J_{Az} e J_{Bz} dos discos, e o coeficiente de atrito entre ambos os discos e a rampa, que vale μ. Usando o sistema de eixos mostrado na figura, pede-se, em função dos dados:



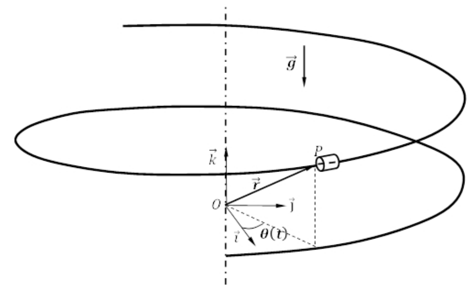
a) desenhe os diagramas de corpo livre dos dois discos;
b) obtenha a relação entre as acelerações rotacionais $\dot{\omega}_A$ e $\dot{\omega}_B$, sem escorregamento;
c) obtenha a relação entre as forças de atrito nos discos e suas acelerações rotacionais, em função do torque T;
c) obtenha a expressão da força na barra, em função do torque T.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 1 (3,0 pontos). A figura ao lado mostra um anel P, de massa m, que percorre a guia em formato de hélice cilíndrica em movimento ascendente devido à ação da força tangencial $\vec{F} = F\ \vec{\tau}$ de módulo constante F. Seu vetor posição parametrizado com respeito ao ângulo $\theta(t)$ é dado em componentes cartesianas como $\vec{r} = (P - 0) = a\cos\theta(t)\ \vec{\imath} + a\ \sin\theta(t)\ \vec{\jmath} + \ a\theta(t)\ \vec{k}$, com raio a, constante, e t, tempo. Sabe-se também que há atrito entre a superfície interna do anel e a guia, causando uma força proporcional ao coeficiente de atrito dinâmico μ e cuja direção é tangente à trajetória a cada instante. São fornecidos os versores tangente ($\vec{\tau}$), normal ($\vec{n}$) e binormal ($\vec{b}$) do triedro de Frenet. Nessas condições, pedem-se, em um instante genérico, em função dos parâmetros $m,\ a,\ g,\ \mu,\ t,\ \theta(t)$ e de suas derivadas temporais:

a) a velocidade escalar do anel, $v(t)$;
b) o raio de curvatura da trajetória, ρ;
c) as componentes das forças ativas nas direções do triedro de Frenet;
d) as componentes da reação vincular nas direções do triedro de Frenet.



$$\vec{\tau} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\theta\ \vec{\imath} + \cos\theta\ \vec{\jmath} + \vec{k})$$
$$\vec{n} = -\cos\theta\ \vec{\imath} - \sin\theta\ \vec{\jmath}$$
$$\vec{b} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta\ \vec{\imath} - \cos\theta\ \vec{\jmath} + \vec{k})$$

Resolução da Questão 1 (3,0 pontos)

a)

$$v(t) = \|\vec{r}\,'(\theta(t))\|\dot{\theta}(t) = a\sqrt{2}\ \dot{\theta}(t) \qquad (0{,}4)$$

b)

$$\vec{r}\,'' = -a\ \cos\theta\ \vec{\imath} - a\ \sin\theta\ \vec{\jmath}$$

$$\rho = \frac{(\|\vec{r}\,'\|)^3}{\|\vec{r}\,' \wedge \vec{r}\,''\|} = \frac{(a\sqrt{2})^3}{\|a^2\sin\theta\ \vec{\imath} - a^2\cos\theta\ \vec{\jmath} + a^2\vec{k}\|} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{a^2\sqrt{2}} = 2a \qquad (0{,}4)$$

c) No problema temos duas forças ativas, $\vec{F}$, dada, e o peso $\vec{P} = -mg\vec{k}$, e as forças vinculares, atrito e normal de contato. Denominando genericamente $\vec{F}_a$ forças ativas, $\vec{f}$ forças reativas e $\vec{R}$ resultante temos:

$$\vec{R} = \vec{F}_a + \vec{f} = m\vec{a} \qquad (2^a \text{ Lei de Newton})$$

Portanto, para as forças ativas:

$$\vec{\tau} \rightarrow F_{a_\tau} = (\vec{F} + \vec{P})\cdot\vec{\tau} = (F\vec{\tau} - mg\vec{k})\cdot\vec{\tau} = (F\vec{\tau} - mg\vec{k})\cdot\vec{\tau} = F - \frac{mg}{\sqrt{2}} \qquad (0{,}4)$$

$$\vec{n} \rightarrow F_{a_n} = (\vec{F} + \vec{P})\cdot\vec{n} = (F\vec{\tau} - mg\vec{k})\cdot\vec{n} = 0 \qquad (0{,}4)$$

$$\vec{b} \rightarrow F_{a_b} = (\vec{F} + \vec{P})\cdot\vec{b} = (F\vec{\tau} - mg\vec{k})\cdot\vec{b} = -\frac{mg}{\sqrt{2}} \qquad (0{,}4)$$

d) Expande-se a equação vetorial correspondente à 2^a Lei de Newton em termos de suas componentes:

$$\vec{R} = (F_{a\tau} + f_\tau)\vec{\tau} + (F_{a_n} + f_n)\vec{n} + (F_{a_b} + f_b)\vec{b} = m(a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n})$$

$$f_\tau = (\vec{F}_{AT}).\vec{\tau} = (-\mu||\vec{N}||\vec{\tau}).\vec{\tau} = -\mu||\vec{N}||$$

$$\vec{\tau} \rightarrow F_{a_\tau} + f_\tau = F - \frac{mg}{\sqrt{2}} - \mu||\vec{N}|| = ma_\tau$$

$$\vec{n} \rightarrow 0 + f_n = ma_n$$

$$\vec{b} \rightarrow -\frac{mg}{\sqrt{2}} + f_b = 0$$

Para concluir deve-se ainda escrever as expressões das acelerações e do módulo da reação normal:

$$a_\tau = \dot{v}(t) = a\sqrt{2}\,\ddot{\theta}(t)$$
$$a_n = \frac{v^2(t)}{\rho} = \frac{2a^2\dot{\theta}^2(t)}{2a} = a\dot{\theta}^2(t)$$
$$||\vec{N}|| = (f_n^2 + f_b^2)^{1/2}$$

Com isso temos as componentes das forças vinculares:

$$f_n = ma\dot{\theta}^2(t) \qquad (0{,}3)$$
$$f_b = \frac{mg}{\sqrt{2}} \qquad (0{,}4)$$
$$f_\tau = -F_{AT} = -\mu||\vec{N}||$$

Equação de movimento:

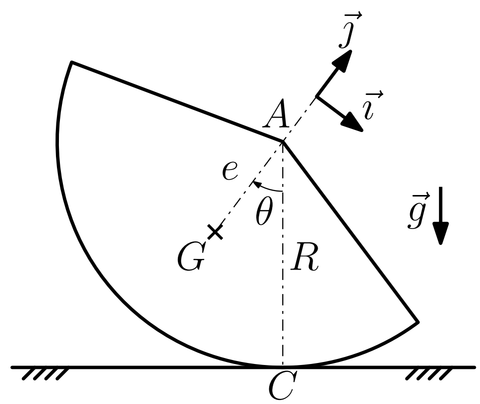
$$ma\sqrt{2}\,\ddot{\theta}(t) = F - \frac{mg}{\sqrt{2}} - \mu\left[\left(ma\dot{\theta}^2(t)\right)^2 + \left(\frac{mg}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (0{,}3)$$

Questão 2 (3,5 pontos). O corpo ilustrado na figura ao lado é um setor recortado de um disco homogêneo, de centro A e raio R, que pode rolar sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal. Este setor tem massa m e seu centro de massa G está a uma distância e do ponto A. O ângulo θ mede a inclinação do segmento GA com respeito à vertical, conforme indicado na figura. Além disso, adota-se uma base ortonormal de vetores $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ solidária a este corpo, com o versor $\vec{\jmath}$ permacecendo paralelo à direção do segmento GA. Pede-se:

a) determinar o momento de inércia J_{Gz} e o produto de inércia J_{Gxy} (dado: $J_{Az} = mR^2/2$);

b) escrever as expressões das energias cinética T e potencial V para este corpo em função de θ e $\dot{\theta}$;

c) obter a equação de movimento deste sistema, explicitando $\ddot{\theta}$ em função de θ e $\dot{\theta}$.



Resolução da Questão 2 (3,5 pontos)

a) Utilizando o Teorema dos Eixos Paralelos:

$$J_{Az} = J_{Gz} + me^2 \qquad \Rightarrow \qquad J_{Gz} = m\left(\frac{R^2}{2} - e^2\right) \qquad (0{,}5)$$

Notando que Gyz é um plano de simetria e considerando a homogeneidade do corpo:

$$J_{Gxy} = 0 \qquad (0{,}5)$$

b) Notando que $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\vec{k}$ e, da condição de rolamento sem escorregamento, $\vec{v}_C = \vec{0}$, então:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge (A - C) = -\dot{\theta}\vec{k} \wedge R(-\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}) = \dot{\theta}R(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath})$$

Dessa forma, a energia cinética T do corpo pode ser obtida a partir da seguinte expressão:

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_A|^2 + m\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \wedge (G - A) + \frac{1}{2}J_{Az}|\vec{\omega}|^2$$

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + m\dot{\theta}R(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}) \cdot [(-\dot{\theta}\vec{k}) \wedge (-e\vec{\jmath})] + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2$$

$$T = \left(\frac{3}{4}mR^2 - mRe\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 \qquad (1{,}0)$$

Sendo o peso a única força conservativa atuando sobre o corpo e, considerando como referência um plano horizontal passante por A, tem-se:

$$V = -mge\cos\theta \qquad (0{,}5)$$

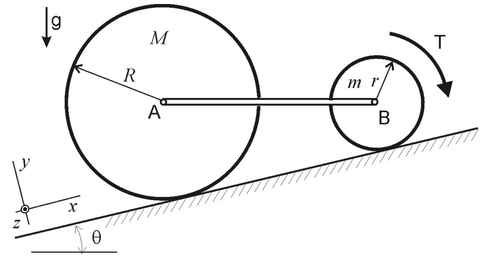
c) Da condição de rolamento sem escorregamento, pode-se afirmar que as forças aplicadas no disco em seu contato com o plano não realizam trabalho. Assim, o sistema é conservativo e a energia mecânica $E = T + V$ é constante, logo:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(\frac{3}{4}mR^2 - mRe\cos\theta\right)\dot{\theta}^2 - mge\cos\theta\right] = 0$$

$$2\left(\frac{3}{4}mR^2 - mRe\cos\theta\right)\dot{\theta}\ddot{\theta} + \left(mRe\dot{\theta}\sin\theta\right)\dot{\theta}^2 + mge\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2e\sin\theta(g + R\dot{\theta}^2)}{3R^2 - 4Re\cos\theta} \qquad (1{,}0)$$

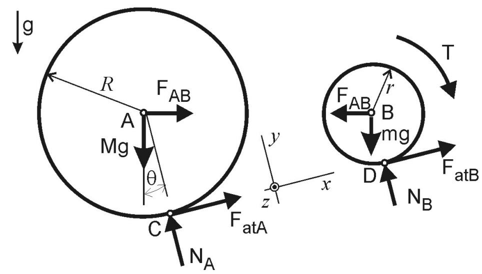
Questão 3 (3,5 pontos). O disco de centro A, massa M e raio R está conectado ao disco de centro B, raio r e massa m por meio de uma barra AB, de massa desprezível, articulada nos respectivos centros, conforme mostrado na figura ao lado. O sistema está num plano vertical e apoiado sobre uma rampa inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal. A barra AB permanece horizontal durante o movimento. Um torque T é aplicado no disco $(B; r)$. São dados os momentos de inércia J_{Az} e J_{Bz} dos discos, e o coeficiente de atrito entre ambos os discos e a rampa, que vale μ. Usando o sistema de eixos mostrado na figura, pede-se, em função dos dados:



a) desenhe os diagramas de corpo livre dos dois discos;
b) obtenha a relação entre as acelerações rotacionais $\dot{\omega}_A$ e $\dot{\omega}_B$, sem escorregamento;
c) obtenha a relação entre as forças de atrito nos discos e suas acelerações rotacionais, em função do torque T;
c) obtenha a expressão da força na barra, em função do torque T.

Resolução da Questão 3 (3,5 pontos)

a) diagrama (1,0)



b) $\vec{\omega}_A = \omega_A \vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}}_A = \dot{\omega}_A \vec{k}$; $\vec{\omega}_B = \omega_B \vec{k} \Rightarrow \dot{\vec{\omega}}_B = \dot{\omega}_B \vec{k}$

$\vec{T} = -T\vec{k}$

$\vec{v}_A = -\omega_A R \vec{i} \Rightarrow \vec{a}_A = -\dot{\omega}_A R \vec{i}$; $\vec{v}_B = -\omega_B R \vec{i} \Rightarrow \vec{a}_B = -\dot{\omega}_B r \vec{i}$

Com a barra AB (0,5): $\vec{v}_A = \vec{v}_B \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_B \Rightarrow \dot{\omega}_A R = \dot{\omega}_B r$ (1)

c) <u>TR</u>:

Disco $(A; R)$: $M\vec{a}_A = F_{atA}\vec{i} + N_A\vec{j} + F_{AB}\left(\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right) + Mg\left(-\sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -M\dot{\omega}_A R = F_{atA} + F_{AB}\cos\theta - Mg\sin\theta & (2) \\ 0 = N_A - F_{AB}\sin\theta - Mg\cos\theta & (3) \end{array} \right\} \quad (0{,}5)$$

Disco $(B; r)$: $m\vec{a}_B = F_{atB}\vec{i} + N_B\vec{j} - F_{AB}\left(\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right) + mg\left(-\sin\theta\vec{i} - \cos\theta\vec{j}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} -m\dot{\omega}_B r = F_{atB} - F_{AB}\cos\theta - mg\sin\theta & (4) \\ 0 = N_B + F_{AB}\sin\theta - mg\cos\theta & (5) \end{array} \right\} \quad (0{,}5)$$

$$\underline{\text{TQMA}}: \left\{ \begin{array}{ll} \text{Disco } (A;R)\text{: } \dot{\omega}_A J_{Az}\vec{k} = (C - A) \wedge F_{atA}\vec{i} = RF_{atA}\vec{k} \Rightarrow F_{atA} = \dfrac{\dot{\omega}_A J_{Az}}{R} & (6) \\ \text{Disco } (B;r)\text{: } \dot{\omega}_B J_{Bz}\vec{k} = (D - B) \wedge F_{atB}\vec{i} - T\vec{k} = rF_{atB}\vec{k} - T\vec{k} \Rightarrow F_{atB} = \dfrac{\dot{\omega}_B J_{Bz} + T}{r} & (7) \end{array} \right\} \quad (0{,}5)$$

d) Substituindo (6) em (2): $-M\dot{\omega}_A R = \dfrac{\dot{\omega}_A J_{Az}}{R} + F_{AB}\cos\theta - Mg\sin\theta \Rightarrow \dot{\omega}_A = -R\dfrac{F_{AB}\cos\theta - Mg\sin\theta}{J_{Az} + MR^2}$ $(6a)$

Substituindo (7) em (4): $-m\dot{\omega}_B r = \dfrac{\dot{\omega}_B J_{Bz} + T}{r} - F_{AB}\cos\theta - mg\sin\theta \Rightarrow \dot{\omega}_B = \dfrac{r\left(F_{AB}\cos\theta + mg\sin\theta\right) - T}{J_{Bz} + mr^2}$ $(7a)$

Usando (1): $\dot{\omega}_A R = \dot{\omega}_B r \Rightarrow -R^2\dfrac{F_{AB}\cos\theta - Mg\sin\theta}{J_{Az} + MR^2} = \dfrac{r^2\left(F_{AB}\cos\theta + mg\sin\theta\right) - rT}{J_{Bz} + mr^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[R^2\left(J_{Bz} + mr^2\right) + r^2\left(J_{Az} + MR^2\right)\right]F_{AB}\cos\theta$$
$$= \left[MR^2\left(J_{Bz} + mr^2\right) - mr^2\left(J_{Az} + MR^2\right)\right]g\sin\theta + r\left(J_{Az} + MR^2\right)T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{AB} = \frac{r\left(J_{Az} + MR^2\right)T - \left[\left(J_{Az} + MR^2\right)r^2 m - \left(J_{Bz} + mr^2\right)R^2 M\right]g\sin\theta}{\left[\left(J_{Bz} + mr^2\right)R^2 + \left(J_{Az} + MR^2\right)r^2\right]\cos\theta} \quad (0{,}5)$$