ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

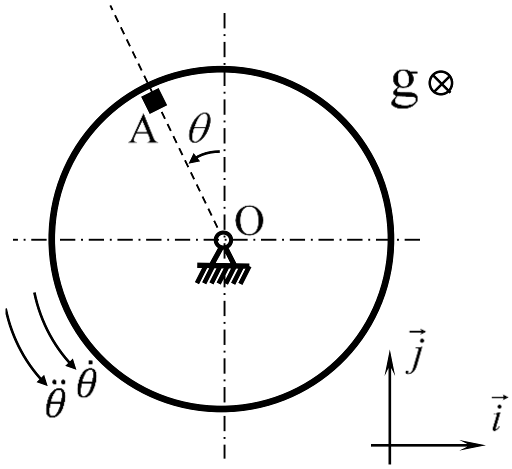
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP: 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

MECÂNICA I - PME 3100 – Prova Substitutiva – 12 de dezembro de 2017

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de dispositivos eletrônicos)

Questão 1 (3,0 pontos). O sistema mostrado na figura é composto por um corpo pontual *A* de massa $\boldsymbol{m}$ posicionado sobre uma plataforma circular horizontal de massa $\boldsymbol{m_p}$ e raio $\boldsymbol{R}$. O sistema encontra-se inicialmente em repouso. Em um dado instante, a plataforma começa a girar com aceleração angular constante dada $\ddot{\theta}$, devido à aplicação de um binário. O corpo está localizado num ponto da periferia da plataforma e o coeficiente de atrito estático entre eles é $\boldsymbol{\mu}$. Nestas condições:



(a) Desenhar o diagrama de corpo livre do corpo *A*;

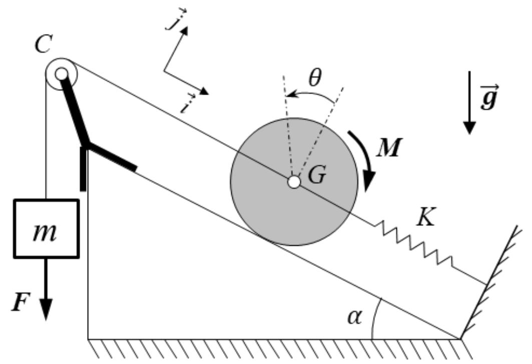
(b) Usando os teoremas da Dinâmica, obter, na base de Frenet, as expressões das componentes da força de atrito atuante no corpo *A*, em função de $\ddot{\theta}$ e $\dot{\theta}$;

(c) Determinar a velocidade máxima que o corpo pode ter antes de iniciar o escorregamento; e

(d) Calcular o trabalho realizado pelo binário desde o instante inicial até o instante em que o corpo começa a escorregar.

Dado: $J_{O_z} = \frac{m_p R^2}{2}$

Questão 2 (3,5 pontos). Um disco homogêneo de massa *2m*, raio *R* e centro *G* rola sem escorregar sobre um plano inclinado, como mostrado na figura. O disco é conectado por um fio inextensível, de massa desprezível, a um corpo *B* de massa *m*, bem como a uma mola linear ideal de constante *K* fixa a uma parede. No instante inicial *t=0*, quando *θ(0)=0*, o sistema está em equilíbrio e a mola encontra-se indeformada. Num instante posterior, um binário de momento *M*, constante, é aplicado ao disco. Concomitantemente, uma força *F*, também constante, é aplicada ao bloco. Sabendo que a polia com centro *C* tem massa desprezível, pede-se:



(a) os diagramas de corpo livre do disco e do bloco.

(b) a energia cinética do sistema em função da velocidade angular $\dot{\theta}$ do disco.

(c) o trabalho dos esforços externos aplicados ao sistema, expressa em função da posição angular θ.

(d) a velocidade angular do disco, expressa em função da posição angular θ.

(e) a aceleração do centro de massa *G* do disco, expressa em função da posição angular θ.

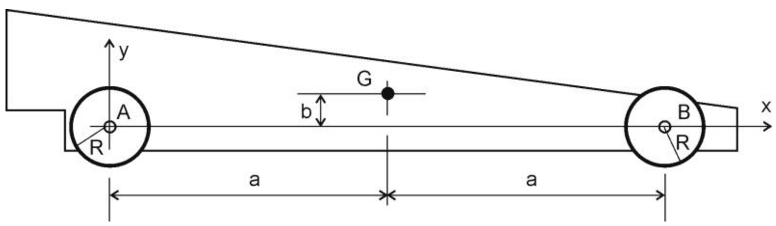
Dado: $J_G^z = \frac{M_{disco} R^2}{2}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP: 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 3 (3,5 pontos). A figura representa um carro de corrida do tipo "dragster', com distância entre rodas de $2a$. As rodas têm raio R e massa desprezível. O corpo do carro tem massa M e centro de massa G localizado nas coordenadas (a, b). No instante de largada, o motor no carro aplica um torque (momento) $\vec{Q} = -Q\vec{k}$ no eixo traseiro. Considerando-se como um problema plano, pede-se:



(a) faça os diagramas de corpo livre do corpo do carro e das rodas;

(b) determine qual o valor máximo Q_{Max} do torque Q para que a roda frontal não perca contato com o solo;

(c) determine qual o valor mínimo do coeficiente de atrito $\boldsymbol{\mu}$ da roda traseira com o solo, para que a roda traseira não escorregue com o torque Q_{Max} aplicado;

(d) descreva o efeito do aumento do raio R sobre esse valor mínimo de $\boldsymbol{\mu}$.

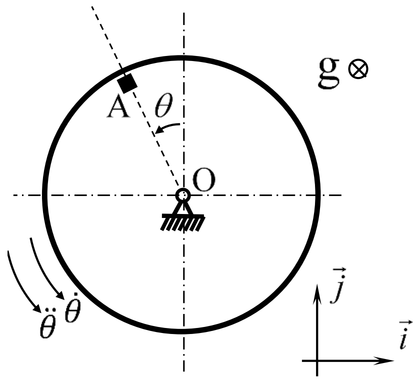
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP: 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

RESOLUÇÃO

Questão 1 (3,0 pontos). O sistema mostrado na figura é composto por um corpo *A* de massa $\boldsymbol{m}$ posicionado sobre uma plataforma circular horizontal de massa $\boldsymbol{m_p}$ e raio $\boldsymbol{R}$. O sistema encontra-se inicialmente em repouso. Em um dado instante, a plataforma começa a girar com aceleração angular constante $\ddot{\theta}$, devido à aplicação de um binário. O corpo está localizado num ponto da periferia da plataforma e o coeficiente de atrito estático entre eles é $\boldsymbol{\mu}$. Nestas condições:



(a) Desenhar o diagrama de corpo livre do corpo;

(b) Escrever as equações de movimento do corpo na base de Frenet, em função de $\ddot{\theta}$ e $\dot{\theta}$;

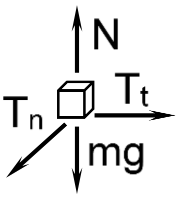
(c) Determinar a velocidade máxima que o corpo pode ter antes de iniciar o escorregamento e

(d) Calcular o trabalho realizado pelo momento desde o instante inicial até o instante em que o corpo começa a escorregar.

Dado: $J_{O_z} = \frac{m_p R^2}{2}$

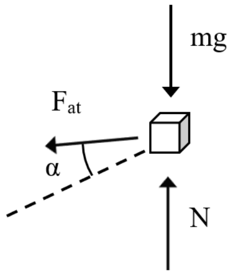
RESOLUÇÃO

a) DCL



0,5

ou



b) $\sum \vec{F}_b = m\vec{a}_b \Rightarrow \boldsymbol{N = mg}$ (1)

$\sum \vec{F}_t = m\vec{a}_t \Rightarrow \boldsymbol{T_t = m\ddot{\theta}R}$ (2)

$\sum \vec{F}_n = m\vec{a}_n \Rightarrow \boldsymbol{T_n = m\dot{\theta}^2 R}$ (3)

em que $T_t = F_{at} sen\alpha$ (4) e $T_n = F_{at} cos\alpha$ (5)

1,0

c) Na iminência de escorregar

$F_{at} = \mu N = \mu mg$ (7) **0,5**

De (2) e (4) $\Rightarrow$ $sen\alpha = \frac{\ddot{\theta}R}{\mu g}$ (8)

De (3) e (5) $\Rightarrow$ $\dot{\theta}^2 = \frac{\mu g}{R}\left(1 - \frac{\ddot{\theta}^2 R^2}{\mu^2 g^2}\right)^{1/2}$ e $\boldsymbol{V^2 = R\mu g\left(1 - \frac{\ddot{\theta}^2 R^2}{\mu^2 g^2}\right)^{1/2}}$ (9)

d) TEC $\Rightarrow$ $\tau_{Binário} = \Delta E_c$ **1,0**

$\tau_M = \frac{1}{2}\mathrm{m}\dot{\theta}^2 R^2 + \frac{1}{2}J_{Gz}\dot{\theta}^2$ (translação do corpo + rotação da plataforma)

$$\tau_M = \frac{1}{2}\mathrm{m}\frac{\mu g}{R}\left(1 - \frac{\ddot{\theta}^2 R^2}{\mu^2 g^2}\right)^{1/2} R^2 + \frac{1}{4}m_p R^2 \frac{\mu g}{R}\left(1 - \frac{\ddot{\theta}^2 R^2}{\mu^2 g^2}\right)^{1/2}$$

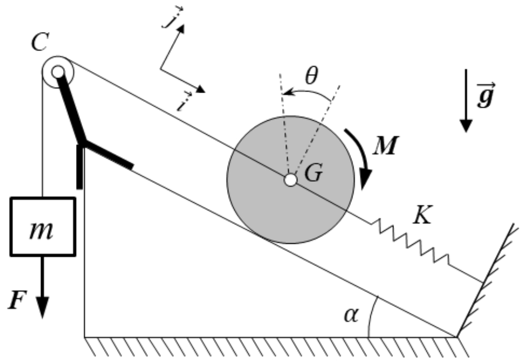
$$\boldsymbol{\tau_M = \frac{\mu g}{R}\left(1 - \frac{\ddot{\theta}^2 R^2}{\mu^2 g^2}\right)^{1/2} R^2 \left[\frac{1}{2}\mathrm{m} + \frac{1}{4}m_p\right]}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP: 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

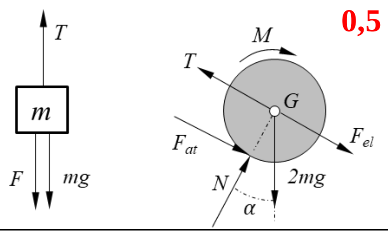
Questão 2 (3,5 pontos). Um disco homogêneo de massa *2m*, raio *R* e centro *G* rola sem escorregar sobre um plano inclinado, como mostrado na figura. O disco é conectado por um fio inextensível, de massa desprezível, a um corpo *B* de massa *m*, bem como a uma mola linear ideal de constante *K* fixa a uma parede. No instante inicial *t=0*, quando *θ(0)=0*, o sistema está em equilíbrio e a mola encontra-se indeformada. Num instante posterior, um binário de momento *M*, constante, é aplicado ao disco. Concomitantemente, uma força *F*, também constante, é aplicada ao bloco. Sabendo que a polia com centro *C* tem massa desprezível, pede-se:



(a) os diagramas de corpo livre do disco e do bloco.
(b) a energia cinética do sistema em função da velocidade angular $\dot{\theta}$ do disco.
(c) o trabalho dos esforços externos aplicados ao sistema, expressa em função da posição angular *θ*.
(d) a velocidade angular do disco, expressa em função da posição angular *θ*.
(e) a aceleração do centro de massa *G* do disco, expressa em função da posição angular *θ*.

Dado: $J_G^z = \frac{M_{disco}R^2}{2}$

RESOLUÇÃO

<table>
<tr>
<td>(a)
0,5
0,5
</td>
<td>(b) Energia Cinética para o sistema ‘Disco + Bloco’
$E = E_D + E_B$
$E_B = \frac{1}{2}m\vec{V}_B \cdot \vec{V}_B$; $E_D = \frac{1}{2}2m\vec{V}_G \cdot \vec{V}_G + \frac{1}{2}J_G^z\omega^2$; $\vec{V}_G = -\dot{\theta}R\vec{i}$; $|\vec{V}_B| = |\vec{V}_G|$ **0,2** **0,3**
$E_B = \frac{m\dot{\theta}^2R^2}{2}$; $E_D = \frac{3m\dot{\theta}^2R^2}{2}$ $\Rightarrow$ $E = 2m\dot{\theta}^2R^2$</td>
</tr>
</table>

(c) $W^{ext} = W_F + W_M + W_{el} + W_D + W_B$

$W_F = FR\theta$ **(0,2)**

$W_M = -M\theta$ **(0,2)**

$W_{el} = -\Delta U_{el} = U_{el_1} - U_{el_2} = 0 - \frac{k}{2}(R\theta)^2 = -\frac{k}{2}(R\theta)^2$ **(0,2)**

$W_D = -\Delta U_D = U_{D_1} - U_{D_2} = 2mgH - 2mg(H + R\theta sin\alpha) = -2mgR\theta sin\alpha$ **(0,2)**

$W_B = -\Delta U_B = U_{B_1} - U_{B_2} = mgh - mg(h - R\theta) = mgR\theta$ **(0,2)**

$W^{ext} = (FR - M - 2mgRsin\alpha + mgR)\theta - \frac{k}{2}(R\theta)^2$

(d) TEC para o sistema ‘Disco + Bloco’

$E_2 + E_1 = W^{ext} \quad \Rightarrow \quad E = W^{ext}$

$2m\dot{\theta}^2R^2 = FR\theta - M\theta + \frac{k}{2}(R\theta)^2 - 2mgR\theta sin\alpha + mgR\theta$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\left(\frac{k}{4m}\right)\theta^2 + \left[\frac{F}{2mR} - \frac{M}{2mR^2} - \frac{gsin\alpha}{R} + \frac{g}{2R}\right]\theta}$$ **0,5**

(e) $\vec{A}_G = -\ddot{\theta}R\vec{i}$

Derivando a equação obtida em (d) no tempo:

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{k}{4m}\right)\theta + \left(\frac{F}{2mR} - \frac{M}{2mR^2} - \frac{gsin\alpha}{R} + \frac{g}{2R}\right)$$

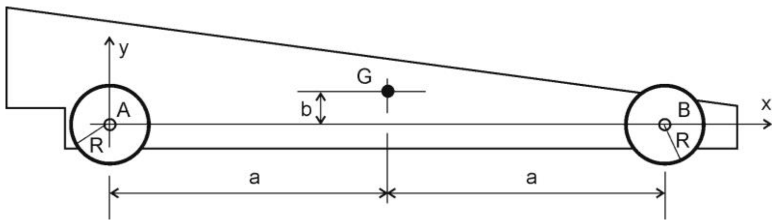
$$\vec{A}_G = -\left[\left(\frac{kR}{4m}\right)\theta + \left(\frac{F}{2m} - \frac{M}{2mR} - gsin\alpha + \frac{g}{2}\right)\right]\vec{i}$$ **0,5**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231 CEP: 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

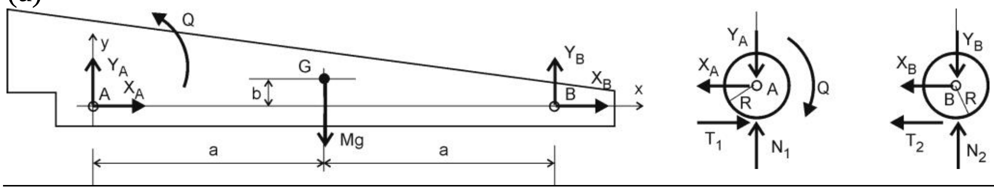
Questão 3 (3,5 pontos). A figura representa um carro de corrida do tipo "dragster', com distância entre rodas de 2^a. As rodas têm raio R e massa desprezível. O corpo do carro tem massa M e centro de massa localizado nas coordenadas (a, b). No instante de largada, o motor no carro aplica um torque (momento) $\vec{Q} = -Q\vec{k}$ no eixo traseiro. Considerando-se como um problema plano, pede-se:



(a) faça os diagramas de corpo livre do corpo do carro e das rodas;
(b) determine qual o valor máximo Q_{Max} do torque Q para que a roda frontal não perca contato com o solo;
(c) determine qual o valor mínimo do coeficiente de atrito $\boldsymbol{\mu}$ da roda traseira com o solo, para que a roda traseira não escorregue com o torque Q_{Max} aplicado;
(d) descreva o efeito do aumento do raio R sobre esse valor mínimo de $\boldsymbol{\mu}$.

<u>RESOLUÇÃO</u>

(a)



1,0

(b) Condição: $N_2 > 0$

TR e TQMA (polo G) no corpo do carro:

$$Ma_x = X_A + X_B \quad (1)$$
$$0 = Y_A + Y_B - Mg \quad (2)$$
$$0 = aY_B - aY_A + b(X_A + X_B) + Q \quad (3)$$

TR e TQMA na roda frontal:

$$0 = -X_B - T_2 \quad (4)$$
$$0 = N_2 - Y_B \quad (5)$$
$$0 = -RT_2 \quad (6)$$

TR e TQMA na roda traseira:

$$0 = T_1 - X_A \quad (7)$$
$$0 = N_1 - Y_A \quad (8)$$
$$0 = RT_1 - Q \quad (9)$$

De (6) e (4): $X_B = 0$ (10)
De (9) e (7): $X_A = \frac{Q}{R}$ (11)
De (5): $Y_B = N_2$ (12)
De (8): $Y_A = N_1$ (13)

Substituindo em (2) e (3), obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} N_1 + N_2 = Mg \\ aN_2 - aN_1 + b\frac{Q}{R} + Q = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} N_1 = \frac{Mg}{2} + \frac{(R+b)}{2aR}Q \quad (14) \\ N_2 = \frac{Mg}{2} - \frac{(R+b)}{2aR}Q \end{array}\right.$$

$$N_2 > 0 \Rightarrow \frac{Mg}{2} - \frac{(R+b)}{2aR}Q > 0 \Rightarrow \boldsymbol{Q_{Max}} = \left(\frac{\boldsymbol{aR}}{\boldsymbol{R+b}}\right)\boldsymbol{Mg}$$

1,0

(c) Condição: $T_1 \leq \mu N_2$ para $Q = Q_{Max}$:

De (9): $T_1 = \frac{Q}{R}$; portanto, usando (14):

1,0

$$T_1 \leq \mu N_1 \Rightarrow \frac{Q_{Max}}{R} \leq \mu\left[\frac{Mg}{2} + \frac{(R+b)}{2aR}Q_{Max}\right] \Rightarrow \boldsymbol{\mu} \geq \left(\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{R+b}}\right)$$

(d) O aumento do raio R reduz o valor mínimo do coeficiente de atrito μ necessário para não haver escorregamento nem perda de contato dianteiro.

0,5