ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337   Fax: (0xx11) 3813 1886

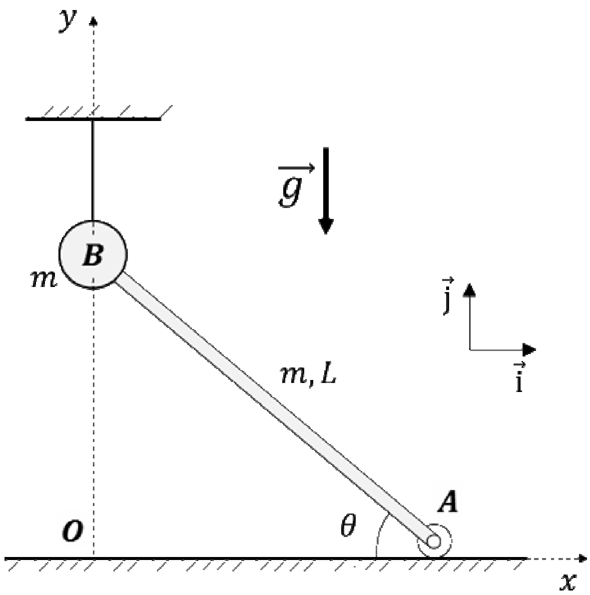
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Prova Substitutiva

Duração da Prova: 110 minutos

(não é permitido uso de celulares, tablets, calculadoras e dispositivos similares)

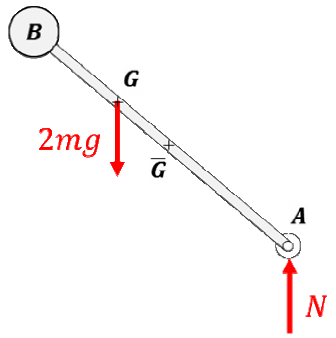
QUESTÃO 1 (3,5 pontos). Considere o corpo constituído por uma barra delgada homogênea *AB*, de massa *m* e comprimento *L*, rigidamente ligada em *B* a uma massa pontual *m* e vinculada em *A* a um rolete que pode escorregar sem atrito sobre o plano horizontal. O corpo é mantido suspenso e em repouso por meio de um fio preso à extremidade *B*, conforme mostrado na figura. Repentinamente, esse fio se rompe e o corpo passa a mover-se livremente no plano *xy*. Para o instante imediatamente posterior ao rompimento do fio, pede-se:



(a) o diagrama de corpo livre do corpo *AB* ;
(b) o centro de massa e o momento de inércia J_{Gz} do corpo *AB*;
(c) a aceleração do centro de massa *G* do corpo *AB*;
(d) A aceleração angular $\dot{\omega}$ do corpo *AB*;
(e) A reação no rolete *A*.

a) Diagrama de corpo livre:

(0,5)



b) Da definição de baricentro:

$$(G-O)=\frac{\sum m_i (P_i - O)}{\sum m_i}$$
, tem-se para o corpo (barra + esfera):

$$(G-O)=\frac{L}{4}\left(\cos\theta\,\vec{i}+3\,\mathrm{sen}\theta\,\vec{j}\right) \quad \text{(b1)} \quad \textbf{(0,5)}$$

Já o momento de inércia do corpo (barra + esfera) é dado por:

$$J_z^G = J_{z\,barra}^G + J_{z\,esfera}^G = \left(J_{z\,barra}^{\bar{G}} + m d_{G\bar{G}}^2\right) + m d_{GB}^2$$

$$J_z^G = \frac{5mL^2}{24} \quad \text{(b2)} \quad \textbf{(0,5)}$$

c) Utilizando a expressão geral do campo de acelerações de um corpo rígido, tem-se:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-A) + \underbrace{\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-A)]}_{=\vec{0}\text{ pois parte do repouso}}$$

Sendo $\vec{a}_A = a_A\vec{i}$, $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k}$ e $(G-A)=\frac{3L}{4}\left(-\cos\theta\,\vec{i}+\mathrm{sen}\theta\,\vec{j}\right)$, tem-se:

$$\vec{a}_G = \left(a_A - \frac{3L\,\mathrm{sen}\theta}{4}\dot{\omega}\right)\vec{i} + \left(-\frac{3L\cos\theta}{4}\dot{\omega}\right)\vec{j} \quad \text{(c1)} \quad \textbf{(0,5)}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Prova Substitutiva

Duração da Prova: 110 minutos

(não é permitido uso de celulares, tablets, calculadoras e dispositivos similares)

d) Aplicando o TQMA ao corpo em relação ao baricentro G , tem-se:

$$\underbrace{2m(G-G)\wedge\vec{A}_G}_{=\vec{0}}+\frac{d}{dt}([I_G]\vec{\omega})=\vec{M}_G^{ext}$$; Movimento plano: $\frac{d}{dt}([I_G]\vec{\omega})=(J_z^G\dot{\omega})\vec{k}$

$$(J_z^G\dot{\omega})\vec{k}=\left(\frac{3Lcos\theta}{4}N\right)\vec{k}$$ Utilizando (b2), obtém-se: $\dot{\omega}=\frac{18cos\theta N}{5mL}$ (d1)

Aplicando o TQM ao sistema, tem-se:

$$(2m)\vec{a}_G=\vec{R}^{ext}=(N-2mg)\vec{j}$$; Utilizando (c1) e separando as componentes:

$$\begin{cases} 2m\left(a_A-\dfrac{3Lsen\theta}{4}\dot{\omega}\right)=0, & a_A=\dfrac{3Lsen\theta}{4}\dot{\omega} \\ -\dfrac{3mLcos\theta}{2}\dot{\omega}=N-2mg, & N=-\dfrac{3mLcos\theta}{2}\dot{\omega}+2mg \end{cases}$$ (d2)

Substituindo N da segunda expressão de (d2) em (d1) e isolando $\dot{\omega}$, obtém-se:

$$\dot{\vec{\omega}}=\left[\frac{36gcos\theta}{(5+27cos^2\theta)L}\right]\vec{k}$$ (d3) **(1,0)**

e) Substituindo (d3) nas expressões de (d2), tem-se:

$$N=\frac{10mg}{(5+27cos^2\theta)}$$ **(0,5)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

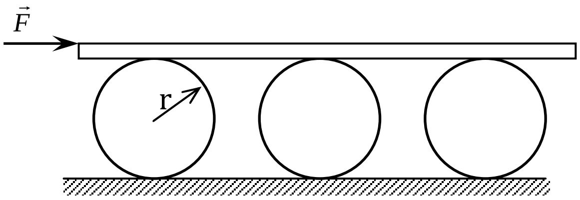
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Prova Substitutiva

Duração da Prova: 110 minutos

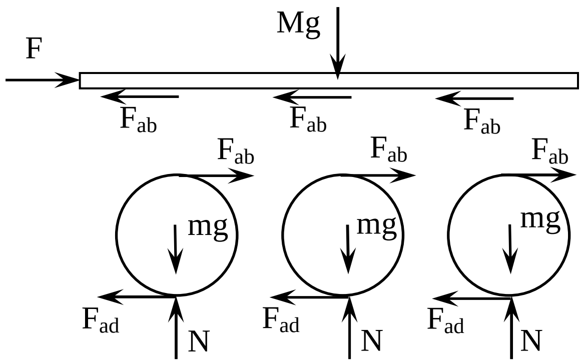
(não é permitido uso de celulares, tablets, calculadoras e dispositivos similares)



QUESTÃO 2 (3,0 pontos). Uma barra de massa M apoia-se sobre três cilindros homogêneos de raio r e massa m. Uma força horizontal F atua na barra colocando o sistema em movimento. Admitindo-se que não ocorra escorregamento em nenhum contato, pede-se:

(a) os diagramas de corpo livre da barra e dos cilindros;
(b) a expressão da energia cinética do sistema;
(b) aceleração da barra.

a) Diagrama de corpo livre: **(1,0)**



b) A velocidade e aceleração da barra são:

$$v_B = 2\omega r$$
$$a_B = 2\dot{\omega} r$$

A expressão da energia cinética do sistema fica:

$$T = \frac{1}{2} M v_B + 3\frac{1}{2} m(\omega r)^2 + 3\frac{1}{2} J_G \omega^2$$

$$\boxed{T = \left(\frac{8M + 9m}{4}\right)\omega^2 r^2}$$ **(1,5)**

c) Aplicando o Teorema da Energia Cinética:

$\Delta T = \tau$, $T_0 = 0$ Do item b) e $\tau = Fx$, tem-se $\left(\frac{8M + 9m}{4}\right)\omega^2 r^2 = Fx$

Derivando com relação ao tempo:

$$\frac{8M + 9m}{4} 2\omega\dot{\omega} r^2 = F v_B \qquad \frac{8M + 9m}{4} 2\omega\dot{\omega} r^2 = F\,2\omega r \qquad \dot{\omega} = \frac{4F}{(8M + 9m)r}$$

Logo, a aceleração da barra será:

$$\boxed{a_B = \frac{8F}{8M + 9m}}$$ **(0,5)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

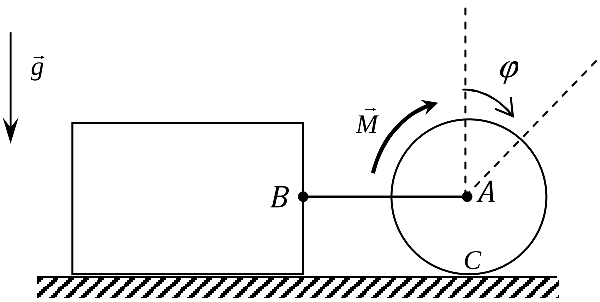
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Prova Substitutiva

Duração da Prova: 110 minutos

(não é permitido uso de celulares, tablets, calculadoras e dispositivos similares)

QUESTÃO 3 (3,5 pontos). Um disco *A* de massa m_A e raio *R* é ligado a um bloco *B* de massa m_B através de uma barra *AB*, de massa desprezível. O sistema parte do repouso ($\varphi(0)=0$ e $\dot{\varphi}(0)=0$) sob a ação de um binário de momento *M* constante. Sabendo que o coeficiente de atrito nos contatos é μ e que o disco rola sem escorregar, pede-se:



(a) a expressão da energia cinética do sistema em função da velocidade angular $\dot{\varphi}$ do disco;

(b) o trabalho realizado pelos esforços atuantes no sistema, em função de φ;

(c) a velocidade e a aceleração angulares do disco;

(d) a força na barra e as componentes da força de contato em *C*.

a) As velocidades de A e B são:

$$v_A = \dot{\varphi}R \quad \text{e} \quad v_B = v_A$$

A expressão da energia cinética do sistema fica:

$$T = T_{disco} + T_{bloco} = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}J_A\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2$$

$$\boxed{T = \frac{(3m_A + 2m_B)}{4}(\dot{\varphi}R)^2} \quad \textbf{(1,5)}$$

b) Apenas a força de atrito e o momento realizam trabalho no sistema, logo:

$$\boxed{\tau = M\varphi - F_{atB}R\varphi = (M - \mu m_B gR)\varphi} \quad \textbf{(1,0)}$$

c) Aplicando o Teorema da Energia Cinética:

$$\Delta T = \tau \quad , \quad T_0 = 0$$

A partir dos itens a) e b), tem-se:

$$\left(\frac{3}{4}m_A + \frac{1}{2}m_B\right)(\dot{\varphi}R)^2 = (M - \mu m_B gR)\varphi$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{(M - \mu m_B gR)\varphi}{(3m_A + 2m_B)}}} \quad \textbf{(0,25)}$$

Derivando com relação ao tempo:

$$\boxed{\ddot{\varphi} = \frac{2(M - \mu m_B gR)}{(3m_A + 2m_B)R^2}} \quad \textbf{(0,25)}$$

d) Aplicando o TQMA ao disco em relação ao pólo A (movimento plano):

$$(J_A\ddot{\varphi}) = (M - F_{atC}R) \quad , \quad \left(\frac{1}{2}m_A R^2\right)\ddot{\varphi} = (M - F_{atC}R) \quad , \quad \boxed{F_{atC} = \frac{M}{R} - \frac{m_A}{2}R\ddot{\varphi}} \quad \textbf{(0,25)}$$

Aplicando o TMB ao disco na direção horizontal, tem-se:

$$(m_A a_A) = (F_{atC} - F_{AB}) \quad , \quad F_{AB} = F_{atC} - m_A a_A = \frac{M}{R} - \frac{m_A}{2}R\ddot{\varphi} - m_A R\ddot{\varphi} \quad , \quad \boxed{F_{AB} = \frac{M}{R} - \frac{3m_A}{2}R\ddot{\varphi}} \quad \textbf{(0,25)}$$