ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

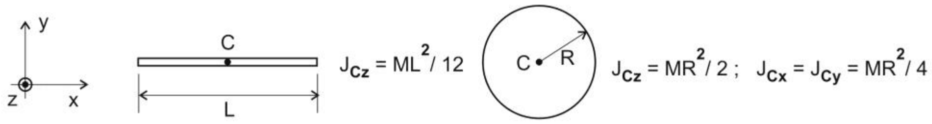
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I –Prova Substitutiva – 01 de dezembro de 2015

Duração da Prova: 110 minutos

- **Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos, como calculadoras, "tablets" e celulares.**
- **Após o início da distribuição do enunciado da prova, é proibido sair da sala antes das 08:30.**
- **A partir do momento em que a prova for encerrada, não é permitido ao aluno escrever mais nada na folha de respostas, havendo possibilidade de anulação da respectiva prova se isto ocorrer.**

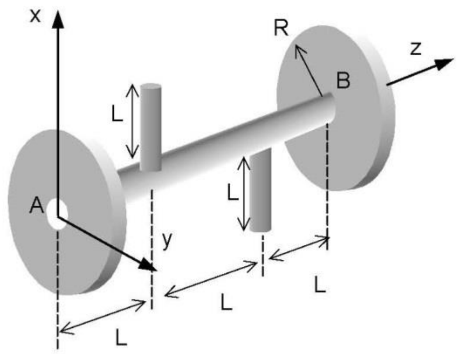
Dados, para todas as questões:



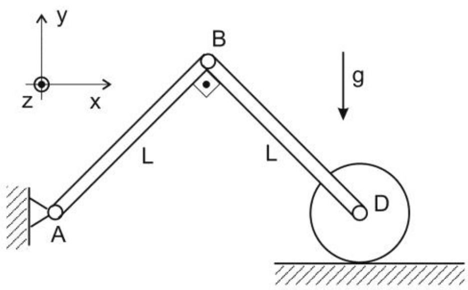
<u>1ª Questão (2,5 pontos):</u> O eixo de comprimento 3*L* tem massa 3*m* e possui dois discos de raio *R* e massa 4*m* em cada extremidade. O eixo possui ainda duas hastes solidárias e similares de comprimento *L* e massa *m* cada uma, nas posições mostradas na figura. Considerando os eixos esbeltos e o sistema de coordenadas *Axyz*, pede-se:

a) determine a posição do centro de massa do conjunto;

b) determine os momentos de inércia *Jy* e *Jz* e o produto de inércia *Jxz*.



<u>2ª Questão (4,0 pontos):</u> O mecanismo da figura é constituído por duas barras delgadas idênticas, de massa *m* e comprimento *L* cada uma, e por um disco de massa *M* e raio *R*. O sistema é solto do repouso a partir da configuração mostrada na figura. O disco rola sem escorregar sobre a superfície. Com base nestas informações, pedem-se:



a) construa os diagramas de corpo livre de todos os elementos do mecanismo na situação imediatamente antes do sistema entrar em movimento;

b) determine o trabalho realizado pelas forças atuantes no sistema desde a situação inicial até a situação em que as duas barras estejam alinhadas na horizontal;

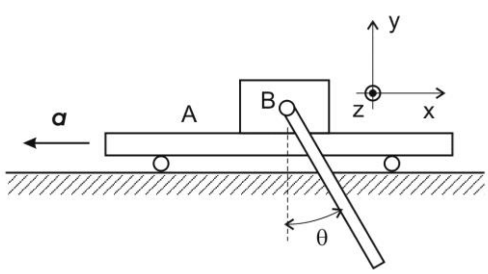
c) obtenha os vetores rotação $\vec{\omega}_{AB}$ da barra *AB* e $\vec{\omega}_{BD}$ da barra *BD*, na situação descrita no item b),

d) calcule a velocidade $\vec{v}_D$ do ponto *D*, na mesma situação.

<u>3ª Questão (3,5 pontos):</u> A plataforma *A*, mostrada na figura ao lado, tem massa desprezível e aplica-se nela uma força horizontal para a esquerda, de modo que ela se desloque com uma aceleração constante *a*. Sobre a plataforma apoia-se um bloco *B*, de massa *m*. O coeficiente de atrito entre a plataforma e o bloco é μ. Ao bloco, através de uma articulação, está presa uma barra de massa *m* e comprimento 2ℓ. Pede-se:

a) dado um ângulo θ, determine a aceleração *a* requerida para manter esse ângulo constante;

b) calcule o valor máximo da aceleração *a*, e o respectivo ângulo θ, para o bloco *B* não escorregar.



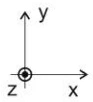
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

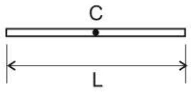
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA I –Prova Substitutiva – 01 de dezembro de 2015

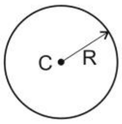
GABARITO

Dados, para todas as questões:





$J_{Cz} = ML^2/12$

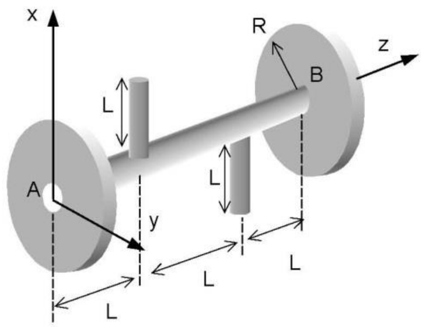


$J_{Cz} = MR^2/2$; $J_{Cx} = J_{Cy} = MR^2/4$

<u>1ª Questão (2,5 pontos):</u> O eixo de comprimento $3L$ tem massa $3m$ e possui dois discos de raio R e massa $4m$ em cada extremidade. O eixo possui ainda duas hastes solidárias e similares de comprimento L e massa m cada uma, nas posições mostradas na figura. Considerando os eixos esbeltos e o sistema de coordenadas $Axyz$, pede-se:

a) determine a posição do centro de massa do conjunto;

b) determine os momentos de inércia Jy e Jz e o produto de inércia Jxz.



Solução:

a) $x_G = \dfrac{4m\cdot 0 + m\cdot\frac{L}{2} + 3m\cdot 0 + m\cdot\left(-\frac{L}{2}\right) + 4m\cdot 0}{13m} = 0$

$y_G = 0$

$$z_G = \frac{4m\cdot 0 + m\cdot L + 3m\cdot\frac{3L}{2} + m\cdot 2L + 4m\cdot 3L}{13m} = \frac{3L}{2}$$

Portanto: $\boxed{(G-A) = 3L/2\,\vec{k}}$ **(0,5 ponto)**

b) $$J_y = \frac{4mR^2}{4} + \left[\frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L^2}{4} + L^2\right)\right] + \left[\frac{3m(3L)^2}{12} + 3m\left(\frac{3L}{2}\right)^2\right] + \left[\frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L^2}{4} + 4L^2\right)\right] +$$

$$+\left[\frac{4mR^2}{4} + 4m(3L)^2\right] \Rightarrow \boxed{J_y = 2mR^2 + \frac{152mL^2}{3}}$$ **(0,5 ponto)**

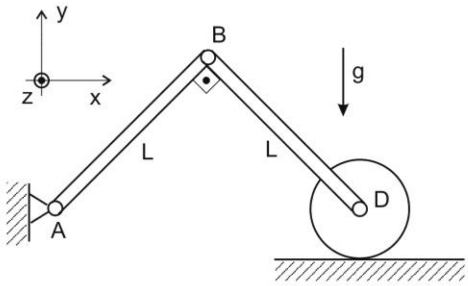
$$J_z = \frac{4mR^2}{2} + \left[\frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L^2}{4}\right)\right] + 0 + \left[\frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L^2}{4}\right)\right] + \frac{4mR^2}{2} \Rightarrow \boxed{J_z = m\left(4R^2 + \frac{2L^2}{3}\right)}$$ **(1,0 ponto)**

$$J_{xz} = 4m(0)(0) + m(L)\left(\frac{L}{2}\right) + 3m\left(\frac{3L}{2}\right)(0) + m(2L)\left(-\frac{L}{2}\right) + 4m(3L)(0) \Rightarrow \boxed{J_{xz} = -\frac{mL^2}{2}}$$ **(0,5 ponto)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

<u>2ª Questão (4,0 pontos):</u> O mecanismo da figura é constituído por duas barras delgadas idênticas, de massa m e comprimento L cada uma, e por um disco de massa M e raio R. O sistema é solto do repouso a partir da configuração mostrada na figura. O disco rola sem escorregar sobre a superfície. Com base nestas informações, pedem-se:



a) construa os diagramas de corpo livre de todos os elementos do mecanismo na situação imediatamente antes do sistema entrar em movimento;

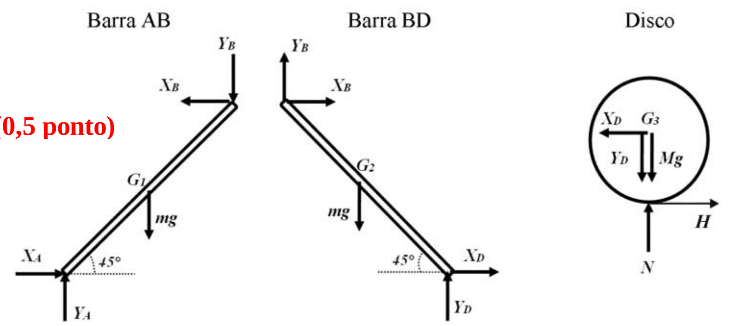
b) determine o trabalho realizado pelas forças atuantes no sistema desde a situação inicial até a situação em que as duas barras estejam alinhadas na horizontal;

c) obtenha os vetores rotação $\vec{\omega}_{AB}$ da barra AB e $\vec{\omega}_{BD}$ da barra BD, na situação descrita no item b),

d) calcule a velocidade $\vec{v}_D$ do ponto D, na mesma situação.

Solução:

a)



(0,5 ponto) **(0,5 ponto)**

b) Considerando o sistema formado pelas duas barras e o disco, as forças internas não realizam trabalho (ação e reação, forças conservativas). As únicas forças que realizam trabalho são os pesos das barras, aplicados em G_1 e G_2, respectivamente:

- Barra AB: $\tau_1 = mg \cdot \Delta y_{G1} = mg\frac{L}{2}\sin 45° = \frac{mgL\sqrt{2}}{4}$; Barra BD: $\tau_2 = mg \cdot \Delta y_{G2} = mg\frac{L}{2}\sin 45° = \frac{mgL\sqrt{2}}{4}$

Assim: $\boxed{\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{mgL\sqrt{2}}{2}}$ **(1,0 ponto)**

c) Para a barra AB: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (B - A) = \vec{0} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge L\vec{\imath} = \omega_{AB}L\vec{\jmath}$ **(0,5 ponto)** (1)

$\vec{v}_{G1} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{AB} \wedge (G_1 - A) = \vec{0} + \omega_{AB}\vec{k} \wedge \frac{L}{2}\vec{\imath} = \frac{\omega_{AB}L}{2}\vec{\jmath}$ (2)

Para a barra BD: $\vec{v}_B = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{BD} \wedge (B - D) = v_D\vec{\imath} + \omega_{BD}\vec{k} \wedge (-L)\vec{\imath} = v_D\vec{\imath} - \omega_{BD}L\vec{\jmath}$ **(0,5 ponto)** (3)

$\vec{v}_{G2} = \vec{v}_D + \vec{\omega}_{BD} \wedge (G_2 - D) = v_D\vec{\imath} + \omega_{BD}\vec{k} \wedge \left(-\frac{L}{2}\right)\vec{\imath} = v_D\vec{\imath} + \frac{\omega_{BD}L}{2}\vec{\jmath}$ (4)

De (1) e (3) obtemos: $v_D = 0$ e $\omega_{AB} = -\omega_{BD} = \omega$ (5)

Substituindo em (2) e (4), obtemos: $\vec{v}_{G1} = \frac{\omega L}{2}\vec{\jmath} = \vec{v}_{G2}$

A energia cinética do sistema, considerando que nessa posição o disco está parado ($v_D = 0$), será:

$$T = \frac{1}{2}mv_{G1}^2 + \frac{1}{2}J_{G1}\omega_{AB}^2 + \frac{1}{2}mv_{G2}^2 + \frac{1}{2}J_{G2}\omega_{BD}^2 + 0 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\omega^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}(-\omega)^2 = \frac{mL^2}{3}\omega^2$$ **(0,5 ponto)**

Pelo TEC, partindo do repouso:

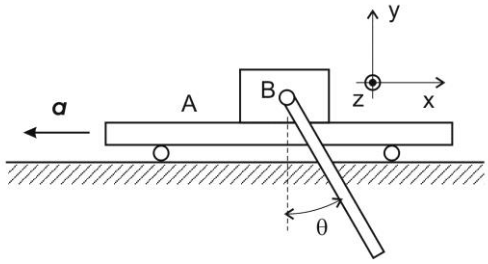
$$\frac{mL^2}{3}\omega^2 = \frac{mgL\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{3\sqrt{2}g}{2L} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{AB} = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}g}{2L}}\vec{k} \text{ e } \vec{\omega}_{BD} = -\sqrt{\frac{3\sqrt{2}g}{2L}}\vec{k}}$$

d) De (5): $\boxed{\vec{v}_D = \vec{0}}$ **(0,5 ponto)**

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos): A plataforma A, mostrada na figura ao lado, tem massa desprezível e aplica-se nela uma força horizontal para a esquerda, de modo que ela se desloque com uma aceleração constante a. Sobre a plataforma apoia-se um bloco B, de massa m. O coeficiente de atrito entre a plataforma e o bloco é μ. Ao bloco, através de uma articulação, está presa uma barra de massa m e comprimento $2L$. Pede-se:

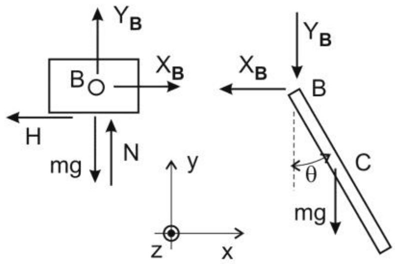


a) dado um ângulo θ, determine a aceleração a requerida para manter esse ângulo constante;

b) calcule o valor máximo da aceleração a, e o respectivo ângulo θ, para o bloco B não escorregar.

Solução:

(1,0 ponto)



a) Para a barra com centro de massa C, em translação, a quantidade de movimento angular em relação ao polo B é:

$$\vec{H}_B = m(C-B)\wedge\vec{v}_B + \vec{0} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_B = m(C-B)\wedge\vec{a}_B =$$

$$= mL(\sin\theta\,\vec{\imath} - \cos\theta\,\vec{\jmath})\wedge(-a)\vec{\imath} = -mLa\cos\theta\,\vec{k}$$ **(0,5 ponto)**

Pelo TQMA:

$$\dot{\vec{H}}_B = -mLa\cos\theta\,\vec{k} = m\vec{v}_C\wedge\vec{v}_B + \vec{M}_B^{ext} = (C-B)\wedge(-mg\vec{\jmath}) = L(\sin\theta\,\vec{\imath} - \cos\theta\,\vec{\jmath})\wedge(-mg\vec{\jmath}) = -mgL\sin\theta\,\vec{k} \Rightarrow$$

$\boxed{\Rightarrow a = g\tan\theta}$ **(0,5 ponto)**

b) TR para a barra: $m\vec{a}_C = -ma\vec{\imath} = -X_B\vec{\imath} + (-Y_B - mg)\vec{\jmath} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_B = ma \\ Y_B = -mg \end{cases}$$

TR para o bloco B:

$$m\vec{a}_B = -ma\vec{\imath} = (X_B - H)\vec{\imath} + (Y_B + N - mg)\vec{\jmath} = (ma - H)\vec{\imath} + (-mg + N - mg)\vec{\jmath} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H = 2ma \\ N = 2mg \end{cases}$$ **(0,5 ponto)**

Para não escorregar (Lei de coulomb): $H \le \mu N \Rightarrow 2ma \le \mu\cdot 2mg \Rightarrow$

$\boxed{\Rightarrow a \le \mu g}$ **(0,5 ponto)**

O respectivo ângulo θ será: $a = \mu g \Rightarrow g\tan\theta = \mu g \Rightarrow$

$\boxed{\Rightarrow \theta = \operatorname{atan}\mu}$ **(0,5 ponto)**