ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

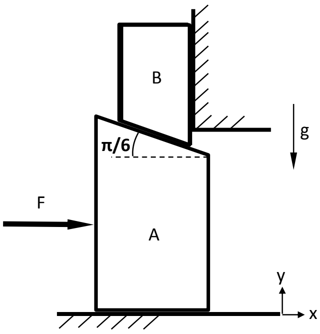
Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 Mecânica I

Prova Substitutiva - Duração 100 minutos – 2 de dezembro de 2014

Não é permitido o uso de dispositivos eletrônicos.

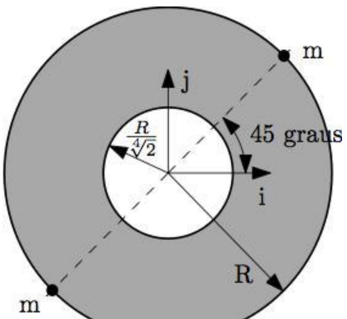
Questão 1(3,0 pontos):



O sistema mostrado na figura é composto pelas cunhas A (massa 10m) e B (massa 6m). Em dado instante, age sobre a cunha A uma força F, de módulo constante, na direção e sentido indicados. Sabe-se que as cunhas estão permanentemente em contato entre si e com seus anteparos horizontal (cunha A) e vertical (cunha B). Considere, também, que não há atrito de qualquer natureza em todas as superfícies de contato. São dados o ângulo de inclinação das cunhas, $\theta = \pi/6$, e a aceleração local da gravidade, g. Em função desses parâmetros, pedem-se:

a) os diagramas de corpo livre das cunhas A e B;
b) as acelerações das cunhas A e B;
c) o valor de F que manteria o sistema em equilíbrio.

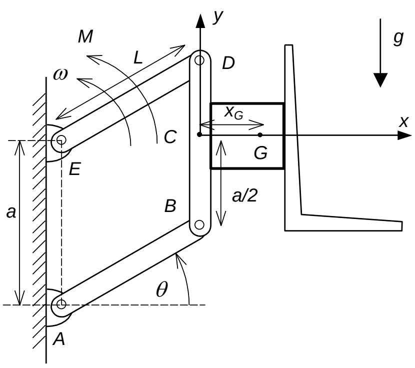
Questão2(3,5 pontos):



Considere o corpo rígido plano ao lado. Ele é constituído de um disco furado (com raio externo R e interno $R/\sqrt[4]{2}$) e duas massas pontuais de massa $m = \frac{\rho\pi R^2}{8}$, cada uma, presas na borda. A densidade de massa por unidade de área do material do disco é ρ. Sabe-se que $\vec{\omega} = w\,(0,0,2)$, $\dot{w} \neq 0$, e que em um determinado instante t_0 a aceleração do seu baricentro é $\vec{a}_G = a\,(2,2,0)$.

a) determine a matriz de inércia do corpo rígido com relação aos eixos indicados passando pelo seu baricentro G;
b) determine a quantidade de movimento angular $\vec{H}_G$ do corpo rígido com relação ao polo G, em t_0;
c) verifique se o corpo rígido está animado por um sistema de forças que é redutível a uma única força no instante t_0. Justifique.

Questão3(3,5 pontos):



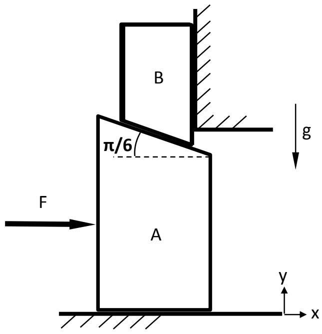
Um sistema de elevação de cargas é composto por uma plataforma *BCD* que movimenta um dispositivo com um garfo na extremidade. Durante a operação, a barra *DE* é movimentada no plano *xy,* pela ação de um binário de momento $\vec{M} = M\vec{k}$, que lhe impõe rotação instantânea $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k}$, conforme a figura. As barras *AB* e *DE* têm o mesmo comprimento *L* e massa desprezível. A plataforma *BCD* tem comprimento **a**. O conjunto plataforma BCD + dispositivo tem massa ***m*** e centro de massa *G*. Considerando a barra *BCD* como referencial móvel e expressando os resultados usando a base $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ com versores paralelos aos eixos *Cxyz*, pede-se determinar, na posição θ, em função dos parâmetros da figura:

a) a velocidade absoluta $\vec{V}_B$ do ponto *B* e as velocidades de arrastamento $\vec{V}_{G,arr}$, relativa $\vec{V}_{G,rel}$ e absoluta $\vec{V}_{G,abs}$ do ponto *G*;
b) a aceleração absoluta $\vec{a}_B$ do ponto *B*;
c) o momento angular $\vec{H}_E$ do conjunto plataforma BCD + dispositivo em relação ao polo *E*;
d) a aceleração angular da barra *DE*.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

<u>Questão 1(3,0 pontos):</u>



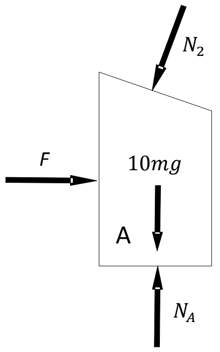
O sistema mostrado na figura é composto pelas cunhas A (massa 10m) e B (massa 6m). Em dado instante, age sobre a cunha A uma força F, de módulo constante, na direção e sentido indicados. Sabe-se que as cunhas estão permanentemente em contato entre si e com seus anteparos horizontal (cunha A) e vertical (cunha B). Considere, também, que não há atrito de qualquer natureza em todas as superfícies de contato. São dados o ângulo de inclinação das cunhas, $\theta = \pi/6$, e a aceleração local da gravidade, g. Em função desses parâmetros, pedem-se:

a) os diagramas de corpo livre das cunhas A e B;
b) as acelerações das cunhas A e B;
c) o valor de F que manteria o sistema em equilíbrio.

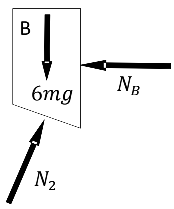
Solução:

a) DCL

Cunha A



Cunha B



(1,0)

b) Denominando N_2 a reação normal entre os prismas A e B, com projeção de orientação Oy positiva a reação que B aplica em A tem-se seguintes equações, decorrente da aplicação do TMB:

Cunha A: $x: F - \frac{1}{2}N_2 = 10\,m\,a_x$ (1)

Cunha B: $y: -6mg + N_2\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\,m\,a_y$ (2)

Vínculo cinemático: $tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{a_y}{a_x}$ (3)

Resolvendo o sistema acima, obtêm-se:

$$a_x = \frac{(F - 2\sqrt{3}mg)}{12m}; \quad a_y = \frac{F\sqrt{3} - 6mg}{36m}$$

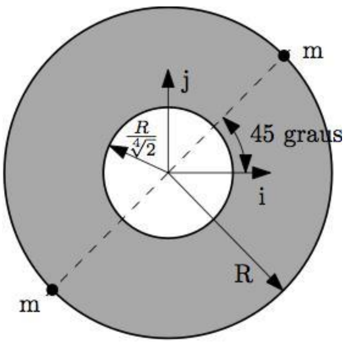
(1,0)

c) Para manter o sistema em equilíbrio:

em (2), faz-se $a_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = 4\sqrt{3}\,m\,g$

em (1), faz-se $a_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 2\sqrt{3}\,m\,g$ **(1,0)**

<u>Questão2(3,5 pontos):</u>



Considere o corpo rígido plano ao lado. Ele é constituído de um disco furado (com raio externo R e interno $R/\sqrt[4]{2}$) e duas massas pontuais de massa $m = \frac{\rho\pi R^2}{8}$, cada uma, presas na borda. A densidade de massa por unidade de área do material do disco é ρ. Sabe-se que $\vec{\omega} = w\,(0,0,2)$, $\dot{w} \neq 0$, e que em um determinado instante t_0 a aceleração do seu baricentro é $\vec{a}_G = a\,(2,2,0)$.

a) determine a matriz de inércia do corpo rígido com relação aos eixos indicados passando pelo seu baricentro G;

b) determine a quantidade de movimento angular $\vec{H}_G$ do corpo rígido com relação ao polo G, em t_0;

c) verifique se o corpo rígido está animado por um sistema de forças que é redutível a uma única força no instante t_0. Justifique.

Solução:

a) Os momentos de inércia do disco de raio R, sem o furo e sem as massas pontuais, com relação aos eixos *Ox*, *Oy* e *Oz* são respectivamente $J_X = \frac{1}{4}\rho\pi R^4$, $J_Y = \frac{1}{4}\rho\pi R^4$, $J_Z = \frac{1}{2}\rho\pi R^4$.

Quando subtraímos de J_X , J_Y, J_Z os momentos de inércia do furo, obtemos a matriz de inércia do disco furado sem as massas pontuais. Os produtos de inércia desse disco furado são nulos devido à simetria. Quando acrescentamos as inércias das massas pontuais, obtemos finalmente:

$$[J]_G = \frac{1}{8}\pi\rho R^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{8}\pi\rho R^4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\pi\rho R^4 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ **(1,5)**

b) Atrelamos o sistema (G, $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$) ao sólido. A quantidade de movimento angular $\overrightarrow{H_G}$ é calculada através de

$$[H]_G = \frac{1}{8}\pi\rho R^4 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2w \end{bmatrix}$$

que na forma vetorial fica: $[H]_G = \pi\rho R^4 w\vec{k}$ **(1,0)**

c. Para verificarmos se o sistema de forças aplicado ao corpo é redutível a uma única força, devemos verificar se a resultante não é nula e se para um polo O qualquer, $\vec{M}_O \perp \vec{R}$. Isto é, para um sistema ser redutível a uma única força, devemos ter $\vec{R} \neq 0$ e $\vec{M}_O \circ \vec{R} = 0$.

Do Teorema do Movimento do Baricentro, temos $\vec{R} = M\vec{a}_G$, que pelos dados do problema não é nula.

Pelo Teorema do Momento da Quantidade de Movimento, temos

$$\vec{M}_G = \frac{d}{dt}\vec{H}_G = \pi\rho R^4(\dot{w}\vec{k} + w\frac{d}{dt}\vec{k})$$

A derivada temporal de $\vec{k}$ é dada por $\frac{d}{dt}\vec{k} = \vec{\omega} \wedge \vec{k} = 0$. Substituindo na expressão acima, temos finalmente

$$\vec{M}_G = \pi\rho R^4\dot{w}\vec{k}$$

Fazendo o produto escalar com a resultante, vemos imediatamente que

$$\vec{M}_G \circ \vec{R} = 0$$

Usando a fórmula de mudança de polo para momentos

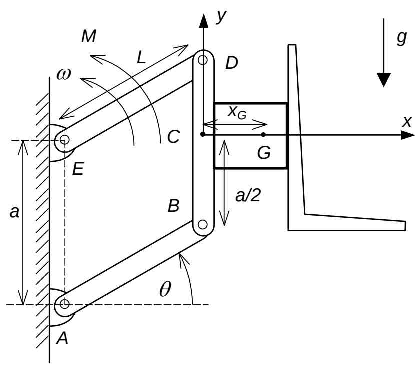
$$\vec{M}_O = \vec{M}_G + (G - O) \wedge \vec{R},$$

Vemos que para **qualquer** polo O, temos

$$\vec{M}_O \circ \vec{R} = 0.$$

Isto é, o sistema de forças aplicado ao sólido é redutível a uma única força. **(1,0)**

Questão3(3,5 pontos):



Um sistema de elevação de cargas é composto por uma plataforma *BCD* que movimenta um dispositivo com um garfo na extremidade. Durante a operação, a barra *DE* é movimentada no plano *xy,* pela ação de um binário de momento $\vec{M} = M\vec{k}$, que lhe impõe rotação instantânea $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k}$, conforme a figura. As barras *AB* e *DE* têm o mesmo comprimento *L* e massa desprezível. A plataforma *BCD* tem comprimento **a**. O conjunto plataforma BCD + dispositivo tem massa ***m*** e centro de massa *G*. Considerando a barra *BCD* como referencial móvel e expressando os resultados usando a base $\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ com versores paralelos aos eixos *Cxyz*, pede-se determinar, na posição θ, em função dos parâmetros da figura:

a) a velocidade absoluta $\vec{V}_B$ do ponto *B* e as velocidades de arrastamento $\vec{V}_{G,arr}$, relativa $\vec{V}_{G,rel}$ e absoluta $\vec{V}_{G,abs}$ do ponto *G*;
b) a aceleração absoluta $\vec{a}_B$ do ponto *B*;
c) o momento angular $\vec{H}_E$ do conjunto plataforma BCD + dispositivo em relação ao polo *E*;
d) a aceleração angular da barra *DE*.

Solução:

a) A velocidade $\vec{V}_B$ do ponto *B*:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge (B - A) \rightarrow \vec{V}_B = \vec{0} + \omega\vec{k} \wedge L(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}) \quad \boxed{\vec{V}_B = L\omega(\cos\theta\,\vec{j} - sen\theta\,\vec{i}\,)} \ \textbf{(0,5)}$$

As velocidades de arrastamento do ponto *G*: note que a base está em translação curvilínea com $\omega_{arr} = 0$ e, portanto, todos os seus pontos tem velocidades e acelerações de arrastamento idênticas

$$\vec{V}_{G,arr} = \vec{V}_B \rightarrow \boxed{\vec{V}_{G,arr} = L\omega(\cos\theta\,\vec{j} - \operatorname{sen}\theta\,\vec{i}\,)} \ \textbf{(0,5)}$$

velocidade relativa $\vec{V}_{G,rel}$ do ponto *G:*

$$\vec{V}_{G,rel} = \vec{V}_B + \vec{\omega}_{arr} \wedge (G - B) \rightarrow \vec{V}_{G,rel} = \vec{0} + 0\vec{k} \wedge x_G\,\vec{i} \rightarrow \boxed{\vec{V}_{G,rel} = \vec{0}}$$

portanto a velocidade absoluta $\vec{V}_{G,abs}$. do ponto *G* é*:*

$$\vec{V}_{G,abs} = \vec{V}_{G,rel} + \vec{V}_{G,arr} \rightarrow \boxed{\vec{V}_{G,abs} = L\omega(\cos\theta\,\vec{j} - sen\theta\,\vec{i}\,)} \ \textbf{(0,5)}$$

b) A aceleração $\vec{a}_B$ do ponto *B*:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)]$$
$$\vec{a}_B = \vec{0} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge L(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j}) + \omega\vec{k} \wedge [\omega\vec{k} \wedge L(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j})]$$
$$\vec{a}_B = L\dot{\omega}(\cos\theta\,\vec{j} - \operatorname{sen}\theta\,\vec{i}\,) - L\omega^2(\cos\theta\,\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\,\vec{j})$$

$$\boxed{\vec{a}_B = -L\,(\dot{\omega}\operatorname{sen}\theta + \omega^2\cos\theta)\,\vec{i} + L\,(\dot{\omega}\cos\theta\,\vec{j} - \omega^2\operatorname{sen}\theta)\,\vec{j}} \ \textbf{(0,5)}$$

c) o momento angular $\vec{H}_E$ do conjunto base/motor/broca de massa ***m***, em relação ao pólo *E*.

$$\vec{H}_E = (G-E)\wedge m\vec{V}_G$$
$$\vec{H}_E = [(L\cos\theta\,\vec{i} + L\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j}) + (-a/2\,\vec{j} + x_G\,\vec{i}\,)]\wedge m[L\omega(\cos\theta\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j})]$$

$$\boxed{\vec{H}_E = mL\omega(L + x_G\cos\theta - a/2\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\vec{k}}$$ **(1,0)**

d) a aceleração angular $\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\,\vec{k}$. Trata-se de movimento plano ($\dot{\vec{k}} = 0$) como $\vec{V}_E = 0$ e derivando a expressão do momento angular, obtêm-se:

$$\dot{\vec{H}}_E = \vec{M}_E^{ext} + m\vec{V}_G \wedge \vec{V}_E \qquad \rightarrow \qquad \dot{\vec{H}}_E = (A-E)\wedge\vec{R}_A + (G-E)\wedge m\vec{g} + \vec{M}$$

$$mL\dot{\omega}(L + x_G\cos\theta - a/2\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\vec{k} - mL\omega^2(x_G\,\mathrm{sen}\,\theta + a/2\cos\theta)\,\vec{k} =$$
$$a\,\vec{j}\wedge(X_A\,\vec{i} + Y_A\,\vec{j}) + [(L\cos\theta\,\vec{i} + L\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{j}) + (x_G\,\vec{i} - a/2\,\vec{j})]\wedge -mg\,\vec{j} + M\,\vec{k}$$

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{mL\omega^2(x_G\,\mathrm{sen}\,\theta + a/2\cdot\cos\theta) - a\,X_A - (L\cos\theta + x_G)\,mg + M}{mL(L + x_G\cos\theta - a/2\cdot\mathrm{sen}\,\theta)}}$$ **(0,5)**