ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 - Mecânica A

Prova Substitutiva - Duração 100 minutos – 3 de dezembro de 2013

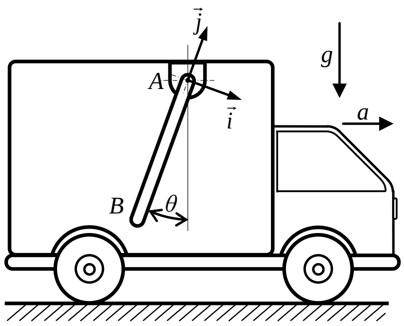
Questão 1 (3,0 pontos):

O caminhão movimenta-se para a direita com aceleração $\vec{a}$ constante e conhecida. A barra *AB*, de massa *m* e comprimento *L*, está articulada em *A*, sem atrito. Utilizando a base solidária à barra *AB* representada na figura, pedem-se:

a) o diagrama de corpo livre da barra;

b) o vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ da barra em função de *a* e θ;

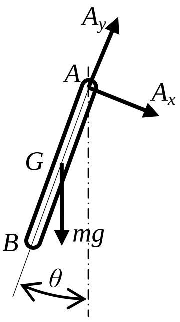
c) as reações A_x e A_y da articulação *A* sobre a barra em função de θ, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$.



Dado: $J_{Gz} = \dfrac{mL^2}{12}$

Solução:

a) diagrama do corpo livre para barra AB:



(1,0)

b) TQMA, polo *A* (acelerado); problema plano; $\vec{\alpha} = \alpha\vec{k}$ **(0,5)**

$$\vec{M}_A^{ext} = m(G-A)\wedge\vec{a}_A + J_{Az}\alpha\vec{k} \Rightarrow mg\frac{L}{2}\text{sen}\,\theta\vec{k} = -m\frac{L}{2}\vec{j}\wedge a(\cos\theta\vec{i} + sen\theta\vec{j}) + m\frac{L^2}{3}\alpha\vec{k} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2L}(g\,\text{sen}\,\theta - a\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = \frac{3}{2L}(g\,\text{sen}\,\theta - a\cos\theta)\vec{k}}$$ **(0,5)**

c) TMB:

$$ma_{Gx} = A_x + mg\,\text{sen}\,\theta$$
$$ma_{Gy} = A_y - mg\cos\theta$$
(0,5)

a aceleração de G é dada por $\vec{a}_G = \vec{a}_A + \vec{\alpha}\wedge(G-A) + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge(G-A)]$; $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\vec{k}$; $\vec{\alpha} = -\ddot{\theta}\vec{k}$

$$\Rightarrow \vec{a}_G = a(\cos\theta\vec{i} + sen\theta\vec{j}) + -\ddot{\theta}\vec{k}\wedge -\frac{L}{2}\vec{j} + -\dot{\theta}\vec{k}\wedge\left[-\dot{\theta}\vec{k}\wedge -\frac{L}{2}\vec{j}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_G = \left(a\cos\theta - \ddot{\theta}\frac{L}{2}\right)\vec{i} + \left(a\,sen\theta + \dot{\theta}^2\frac{L}{2}\right)\vec{j}}$$

substituindo:

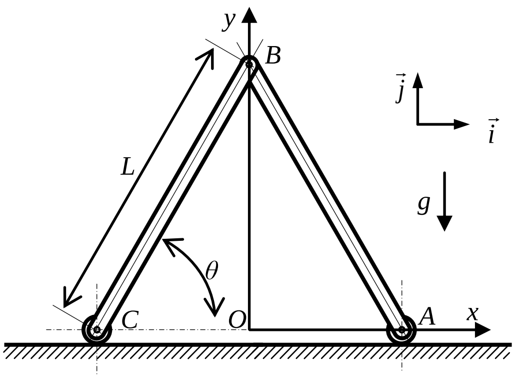
$$m\left(a\cos\theta - \ddot{\theta}\frac{L}{2}\right) = A_x + mg\,\text{sen}\,\theta \Rightarrow \boxed{A_x = m\left(a\cos\theta - \ddot{\theta}\frac{L}{2}\right) - mg\,\text{sen}\,\theta}$$ **(0,5)**

$$m\left(a\,\text{sen}\,\theta + \dot{\theta}^2\frac{L}{2}\right) = A_y - mg\cos\theta \Rightarrow \boxed{A_y = m\left(a\,\text{sen}\,\theta + \dot{\theta}^2\frac{L}{2}\right) + mg\cos\theta}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

Questão 2 (3,0 pontos):



O sistema é composto pelas barras homogêneas *AB* e *BC*, articuladas em *B*, e pelos roletes em *C* e *A*. As barras têm a mesma massa *m* e o mesmo comprimento *L*, e os roletes têm massa desprezível. Não há atrito nas articulações e nem entre os roletes e o solo. Sabe-se que o sistema parte do repouso para $\theta = \theta_0$ $\left(0 < \theta_0 < 90^o\right)$. Usando o sistema de coordenadas *Oxyz* fixo em relação ao solo, determine:

a) o diagrama de corpo livre do sistema como um todo;

b) a localização e a trajetória do baricentro G do sistema;

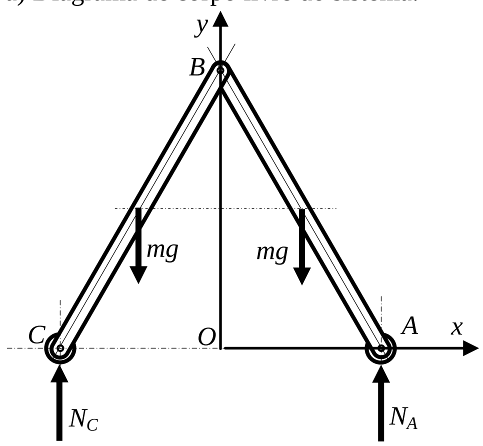
c) a energia cinética E do sistema em função de $\dot{\theta}$;

d) a velocidade angular $\dot{\theta}$ e a aceleração angular $\ddot{\theta}$ da barra *AB* em função de θ.

Dado: $J_{Gz} = \dfrac{mL^2}{12}$

Solução:

a) Diagrama de corpo livre do sistema:



(0,5)

b) Pela simetria em torno do eixo *Oy*, temos que: $\boxed{x_G = 0}$

Pela propriedade do baricentro, sabe-se que o baricentro do sistema está na linha que une os baricentros das barras, logo:

$$\boxed{y_G = \frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta}$$ **(0,5)**

E considerando figura plana: $\boxed{z_G = 0}$

Teorema do movimento do baricentro:

$ma_{Gx} = 0$

$ma_{Gy} = N_A + N_C - 2mg$

Como o sistema parte do repouso e a aceleração do baricentro na direção $\vec{i}$ é nula, então a trajetória do baricentro é vertical, percorrendo o eixo *Oy*. **(0,5)**

c) Energia cinética do sistema:

Para a barra *AB*: $E_{AB} = \frac{1}{2}mv_{GAB}^2 + \frac{1}{2}J_{Gz}\omega_{AB}^2$

Localizando o *CIR* da barra *AB* na figura ao lado, observamos que:

$$\left|v_{GAB}\right| = \left|\omega_{AB}\right|\frac{L}{2}$$

Pela simetria em torno do eixo *Oy*, notamos ainda que:

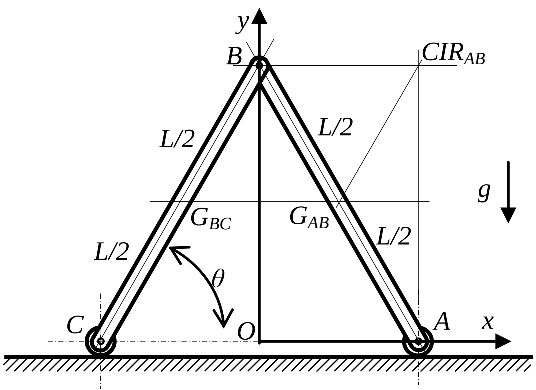
$$\left|v_{GBC}\right| = \left|\omega_{BC}\right|\frac{L}{2} = \left|v_{GAB}\right| = \left|\omega_{AB}\right|\frac{L}{2}$$

Além disso: $\left|\omega_{AB}\right| = \dot{\theta}$

Logo:

$$E_{AB} = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mL^2}{12}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2 \Rightarrow$$

$$E = E_{BC} + E_{AB} = 2E_{AB} \Rightarrow \boxed{E = \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2}$$ **(0,5)**



d) O trabalho das forças normais nos contatos com o solo em A e C é nulo, pois as velocidades dos pontos de aplicação das forças são perpendiculares às forças de contato. Resta o trabalho das forças peso: $W = 2mg\frac{L}{2}\left(\mathrm{sen}\,\theta_0 - \mathrm{sen}\,\theta\right)$

TEC:

$\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}^2 = 2mg\frac{L}{2}\left(\mathrm{sen}\,\theta_0 - \mathrm{sen}\,\theta\right) \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3g}{L}\left(\mathrm{sen}\,\theta_0 - \mathrm{sen}\,\theta\right)}}$ (velocidade angular) **(0,5)**

Derivando $\dot{\theta}^2$ em relação ao tempo:

$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\frac{3g}{L}\cos\theta\dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2L}\cos\theta}$ (aceleração angular) **(0,5)**

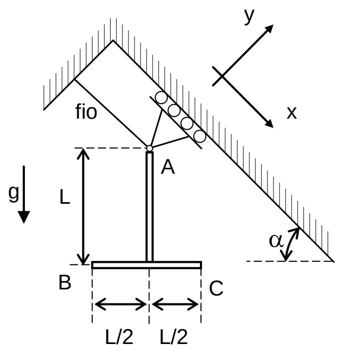
Questão 3 (4,0 pontos):

No sistema mostrado na figura ao lado, a peça homogênea *ABC* tem massa total 2***m***. O sistema está inicialmente em repouso. Em um dado instante, o fio que mantém o sistema em equilíbrio é cortado, permitindo que a peça deslize sem atrito ao longo do plano com inclinação α. Determinar, para a peça *ABC*, sendo *G* o seu baricentro:

a) o vetor (*G-A*);
b) o momento de inércia J_{ZG};

e, para o instante imediatamente após o corte do fio:

c) o diagrama de corpo livre;
d) a aceleração do baricentro *G* e a reação vincular em *A* em função da aceleração angular $\dot{\omega}$;
e) o vetor aceleração angular.



Solução:

a) O baricentro estará no eixo de simetria da peça, a uma distância *d* do ponto *A*, tal que

$$2md = \frac{mL}{2} + m \Rightarrow d = \frac{3L}{4}$$

O vetor (G-A) pode ser escrito como:

$$(G-A) = d(\text{sen}\,\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j})$$

Então:

$$\boxed{(G-A) = \frac{3}{4}L(\text{sen}\,\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j})}$$ **(0,5)**

b)

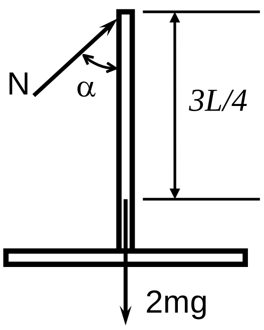
$$J_{zG} = J_{zG(barravertical)} + J_{zG(BC)}$$

onde $J_{zG(barravertical)} = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{2} - \frac{3L}{4}\right)^2 = \frac{7mL^2}{48}$

e $J_{zG(BC)} = \frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7mL^2}{48}$ **(0,5)**

$$\Rightarrow \boxed{J_{zG} = \frac{7mL^2}{24}}$$ **(0,5)**

c) Diagrama de corpo livre



(0,5)

d) TMB para o conjunto:

$$\sum F_x = 2ma_{Gx} \Rightarrow 2mg\,sen\alpha = 2ma_{Gx} \Rightarrow \boxed{a_{Gx} = g\,sen\,\alpha}$$

$$\sum F_y = 2ma_{Gy} \Rightarrow N - 2mg\cos\alpha = 2ma_{Gy} \Rightarrow N = 2m(a_{Gy} + g\cos\alpha)$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-A)];\ \vec{a}_A = a\vec{i}\ ;\ \vec{\omega} = \vec{0}\ ;\ \dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k}$$

$$\vec{a}_G = a\vec{i} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \left(\frac{3}{4}L(\text{sen}\,\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j})\right) \Rightarrow \vec{a}_G = a\vec{i} + \frac{3}{4}L\dot{\omega}(\cos\alpha\,\vec{i} + \text{sen}\,\alpha\,\vec{j})$$ **(0,5)**

$$\Rightarrow \boxed{a_{Gy} = \frac{3}{4}L\dot{\omega}\,\text{sen}\,\alpha} \Rightarrow \boxed{N = 2m\left(\frac{3}{4}L\dot{\omega}\,\text{sen}\,\alpha + g\cos\alpha\right)}$$ **(0,5)**

e) TQMA polo G

$$\frac{d}{dt}([I_G]\{\vec{\omega}\}) = \vec{M}_G \Rightarrow J_{Gz}\dot{\omega} = -Nd\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow \frac{7mL^2}{24}\dot{\omega} = -2m\left(\frac{3}{4}L\dot{\omega}\,\text{sen}\,\alpha + g\cos\alpha\right)\frac{3L}{4}\text{sen}\,\alpha$$ **(0,5)**

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = -\frac{36g\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{L(7 + 27\,\text{sen}^2\alpha)}}$$ **(0,5)**