ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

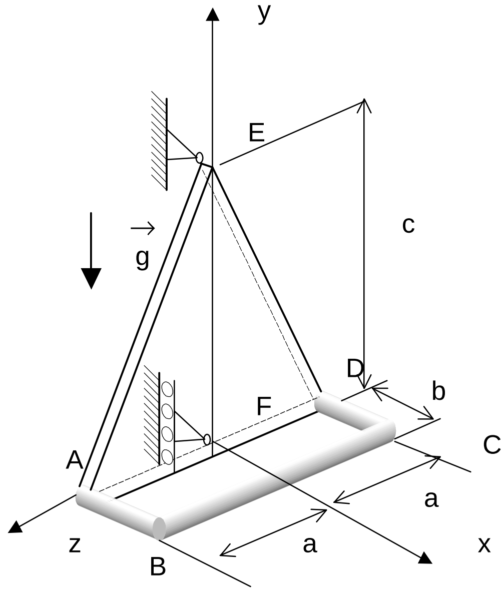
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Prova Substitutiva – 14 de dezembro de 2009

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

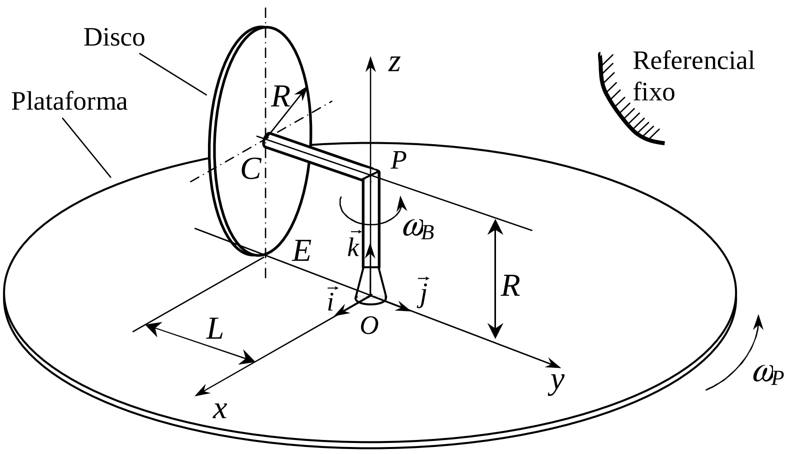
1ª Questão (3,0 pontos) A placa triangular *AED* de massa 3m está ligada às barras *AB* e *CD*, cada uma de massa m, e à barra *BC* de massa 2m. Todos os sólidos são homogêneos. O conjunto está suspenso pela articulação em *E* e pelo apoio simples em *F*. Adotando o sistema de coordenadas indicado na figura:



a) Determine as coordenadas do baricentro da placa triangular *AED*;
b) Determine as coordenadas do baricentro da barra *ABCD*;
c) Determine as coordenadas do baricentro do sólido composto pela placa *AED* e pela barra *ABCD*;
d) Faça o diagrama de corpo livre do conjunto;
e) Determine as componentes das reações em *E* e *F* que sustentam o conjunto.

2ª Questão (3,5 pontos)

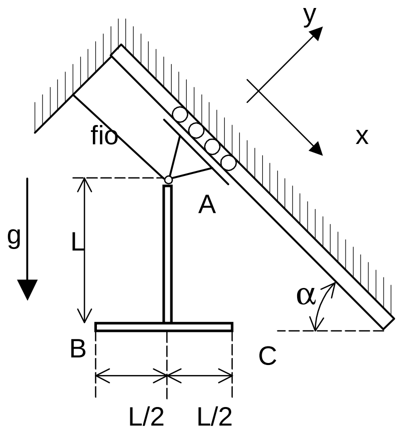
O disco de centro *C* e raio *R* rola sem escorregar sobre a plataforma de centro *O*. O mancal em *C*, que conecta o disco à peça *CPO*, impõe que a face do disco se mantenha sempre ortogonal ao segmento *CP* durante o movimento. O eixo *Oy* está sempre na direção do segmento *OE*, onde *E* é o ponto de contato entre o disco e a plataforma, sendo os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ solidários à peça *CPO*. Em relação ao referencial fixo, os vetores de rotação da peça *CPO* e da plataforma são, respectivamente, $\vec{\omega}_B = \omega_B \vec{k}$ e $\vec{\omega}_P = \omega_P \vec{k}$, ambos constantes, e os pontos *P* e *O* são fixos. Adotando a peça *CPO* como referencial móvel, determine:



a) A velocidade $\vec{v}_C$ e a aceleração $\vec{a}_C$ absolutas do ponto C.
b) Os vetores de rotação absoluto $\vec{\omega}_D$, relativo $\vec{\omega}_{Dr}$, e de arrastamento $\vec{\omega}_{Da}$ do disco.
c) As acelerações absoluta $\vec{a}_E$, de arrastamento $\vec{a}_{Ea}$ e de Coriolis $\vec{a}_{Ec}$ do ponto E do disco.

3ª Questão (3,5 pontos)

No sistema mostrado na figura ao lado, a peça homogênea *ABC* tem massa total $2\boldsymbol{m}$. Em um dado instante, o fio que mantém o sistema em equilíbrio é cortado, permitindo que a peça deslize sem atrito ao longo do plano de inclinação α. Determinar, para a peça *ABC*:



a) A posição do baricentro *G*;
b) O momento de inércia $\boldsymbol{J}_{ZG}$;
c) O diagrama de corpo livre;

Pede-se, para o instante imediatamente após o rompimento do fio, para a peça *ABC*:

d) A aceleração do baricentro *G*;
e) O vetor aceleração angular.

4ª Questão Opcional (1,0 ponto)

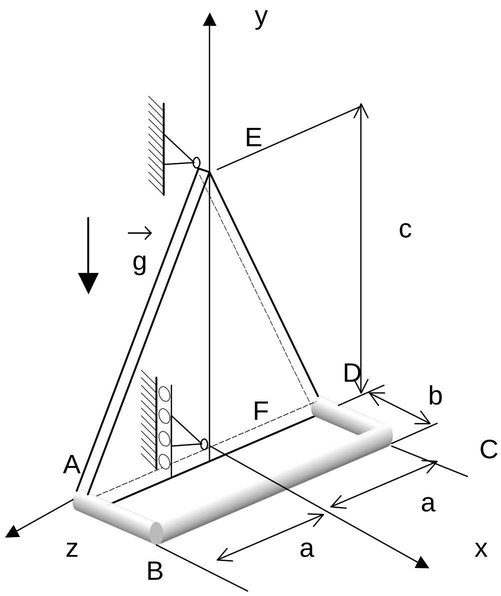
Dado um sistema de pontos materiais P_i, para $i = 1...N$, de massas m_i e velocidades $\vec{v}_i$, e sabendo que a energia cinética de um ponto material P_i é dada por $T_i = (m_i v_i^2)/2$, deduza a expressão do Teorema da Energia Cinética (*TEC*) para o sistema de pontos materiais, $\Delta T = \tau$ onde τ é o trabalho de todas as forças atuantes no sistema.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

RESOLUÇÃO DA PROVA SUBSTITUTIVA – 14 de dezembro de 2009



Resolução da 1ª Questão (3,0 pontos) A placa triangular *AED* de massa 3m está ligada às barras *AB* e *CD*, cada uma com massa m, e à barra *BC* de massa 2m. Todos os sólidos são homogêneos. O conjunto está suspenso pela articulação em *E* e pelo apoio simples em *F*.

Adotando o sistema de coordenadas indicado na figura:

a) Determine as coordenadas do baricentro da placa triangular *AED*;
b) Determine as coordenadas do baricentro da barra *ABCD*;
c) Determine as coordenadas do baricentro do sólido composto pela placa *AED* e pela barra *ABCD*;
d) Faça o diagrama de corpo livre do conjunto;
e) Determine as componentes das reações em *E* e *F* que sustentam o conjunto.

a) Placa *AED*. (0,5):	b) Barra *ABCD*. (0,5):	c) Sólido composto (0,5):
$\bar{x}_P = 0$ $\bar{y}_P = \frac{c}{3}$ $\bar{z}_P = 0$	$\bar{x}_B = \frac{m \cdot \frac{b}{2} + 2m \cdot b + m \cdot \frac{b}{2}}{m + 2m + m} = \frac{3mb}{4m}$ $\bar{x}_B = \frac{3b}{4}$ $\bar{y}_B = 0$ $\bar{z}_B = 0$	$\bar{y}_S = \frac{3m \cdot \frac{c}{3} + 4m \cdot 0}{3m + 4m} = \frac{mc}{7m}$ $\bar{y}_S = \frac{c}{7}$ $\bar{x}_S = \frac{3m \cdot 0 + 4m \cdot \frac{3b}{4}}{3m + 4m} = \frac{3mb}{7m}$ $\bar{x}_S = \frac{3b}{7}$ $\bar{z}_S = 0$

c) Diagrama de corpo livre (0,5):

d) Reações: usando as equações universais de equilíbrio

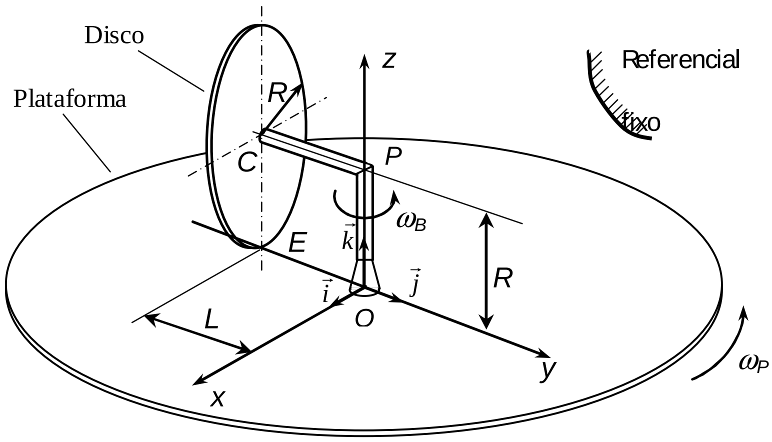
$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = 0; \boxed{E_y = 7mg};$$

$$\vec{M}_O = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = 0; \quad \rightarrow \quad \vec{M}_F = [(3b/7)\vec{i} + (c/7)\vec{j}] \wedge (-7mg)\vec{j} + c\vec{j} \wedge E_x \vec{i} = 0$$

$$\boxed{E_x = -3mgb/c}; \quad \rightarrow \quad \boxed{E_z = 0}; \quad \rightarrow \quad \boxed{F_x = 3mgb/c} \text{ (1,0):}$$

Resolução da 2ª Questão (3,5 pontos**)**

O disco de centro C e raio R rola sem escorregar sobre a plataforma de centro O. O mancal em C, que conecta o disco à peça CPO, impõe que a face do disco se mantenha sempre ortogonal ao segmento CP durante o movimento. O eixo Oy está sempre na direção do segmento OE, onde E é o ponto de contato entre o disco e a plataforma, sendo os versores $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ solidários à peça CPO. Em relação ao referencial fixo, os vetores de rotação da peça CPO e da plataforma são, respectivamente, $\vec{\omega}_B = \omega_B \vec{k}$ e $\vec{\omega}_P = \omega_P \vec{k}$, ambos constantes, e os pontos P e O são fixos. Adotando a peça CPO como referencial móvel, determine:



a) A velocidade $\vec{v}_C$ e a aceleração $\vec{a}_C$ absolutas do ponto C.

b) Os vetores de rotação absoluto $\vec{\omega}_D$, relativo $\vec{\omega}_{Dr}$, e de arrastamento $\vec{\omega}_{Da}$ do disco.

c) As acelerações absoluta $\vec{a}_E$, de arrastamento $\vec{a}_{Ea}$ e de Coriolis $\vec{a}_{Ec}$ do ponto E do disco.

a) Como o enunciado informa que os pontos P e O são fixos e que o vetor de rotação absoluta da peça CPO é $\vec{\omega}_B = \omega_B \vec{k}$, constante, temos:

$\vec{v}_C = \vec{v}_P + \vec{\omega}_B \wedge (C-P) = \omega_B \vec{k} \wedge (-L\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_C = \omega_B L \vec{i}}$ (0,5) $\vec{a}_C = \vec{a}_P + \dot{\vec{\omega}}_B \wedge (C-P) + \vec{\omega}_B \wedge [\vec{\omega}_B \wedge (C-P)]$

$\vec{a}_C = \omega_B \vec{k} \wedge [\omega_B \vec{k} \wedge (-L\vec{j})] = \omega_B \vec{k} \wedge \omega_B L \vec{i}$ $\boxed{\vec{a}_C = \omega_B^2 L \vec{j}}$ (0,5)

b) Pela definição de movimento de arrastamento, $\vec{\omega}_{Da} = \vec{\omega}_B = \omega_B \vec{k}$

No movimento absoluto temos:

Plataforma: $\vec{v}_E = \vec{v}_O + \vec{\omega}_P \wedge (E-O) = \omega_P \vec{k} \wedge (-L\vec{j}) \Rightarrow \vec{v}_E = \omega_P L \vec{i}$

Disco: $\vec{v}_E = \vec{v}_C + \vec{\omega}_D \wedge (E-C) = \omega_B L \vec{i} + (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \wedge (-R\vec{k}) \Rightarrow \vec{v}_E = \omega_B L \vec{i} + \omega_x R \vec{j} - \omega_y R \vec{i}$

Comparando: $\omega_P L \vec{i} = \omega_B L \vec{i} + \omega_x R \vec{j} - \omega_y R \vec{i} \Rightarrow \begin{cases} \omega_x = 0 \\ \omega_y = \dfrac{(\omega_B - \omega_P)L}{R} \end{cases}$

A parcela $\vec{\omega}_y = \dfrac{(\omega_B - \omega_P)L}{R} \vec{j}$ é a parcela correspondente ao movimento relativo. Portanto:

Vetor de rotação relativa do disco: $\boxed{\vec{\omega}_{Dr} = \dfrac{(\omega_B - \omega_P)L}{R} \vec{j}}$ (0,5)

Vetor de rotação de arrastamento do disco: $\boxed{\vec{\omega}_{Da} = \omega_B \vec{k}}$ (0,5)

Vetor de rotação absoluta do disco: $\boxed{\vec{\omega}_D = \dfrac{(\omega_B - \omega_P)L}{R} \vec{j} + \omega_B \vec{k}}$

c) Observando a figura, temos que a aceleração de arrastamento dos pontos *C* e *E* são iguais:
Aceleração de arrastamento do ponto *E*:

$\boxed{\vec{a}_{Ea} = \omega_B^2 L\vec{j}}$ (0,5)

Aceleração relativa do ponto *E*:

$$\vec{a}_{Er} = \vec{a}_{Cr} + \left(\dot{\vec{\omega}}_{Dr}\right)_r \wedge (E-C) + \vec{\omega}_{Dr} \wedge \left[\vec{\omega}_{Dr} \wedge (E-C)\right] = \frac{(\omega_B-\omega_P)L}{R}\vec{j} \wedge \left[\frac{(\omega_B-\omega_P)L}{R}\vec{j} \wedge \left(-R\vec{k}\right)\right] =$$

$$\frac{(\omega_B-\omega_P)L}{R}\vec{j} \wedge \left[-(\omega_B-\omega_P)L\vec{i}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{Er} = \frac{[(\omega_B-\omega_P)L]^2}{R}\vec{k}} \quad (0,5)$$

Aceleração de Coriolis do ponto *E*:

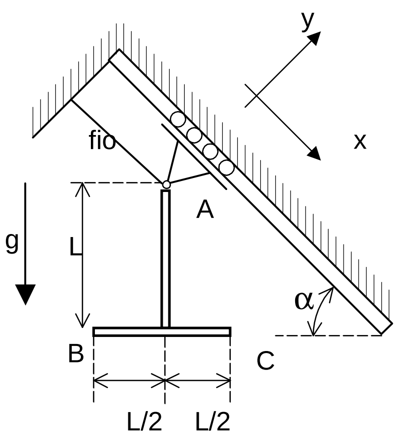
$$\vec{a}_{Ec} = 2\cdot\vec{\omega}_{Da} \wedge \vec{v}_{Dr} = 2\omega_B\vec{k} \wedge \left[\frac{(\omega_B-\omega_P)L}{R}\vec{j} \wedge \left(-R\vec{k}\right)\right] = 2\omega_B\vec{k} \wedge \left[-(\omega_B-\omega_P)L\vec{i}\right] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{Ec} = -2\omega_B(\omega_B-\omega_P)L\vec{j}} \quad (0,5)$$

Aceleração absoluta do ponto *E*:

$$\vec{a}_E = \vec{a}_{Ea} + \vec{a}_{Er} + \vec{a}_{Ec} = \omega_B^2 L\vec{j} + \frac{[(\omega_B-\omega_P)L]^2}{R}\vec{k} - 2\omega_B(\omega_B-\omega_P)L\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_E = -\left(\omega_B^2 + 2\omega_B\omega_P\right)L\vec{j} + \frac{[(\omega_B-\omega_P)L]^2}{R}\vec{k}}$$

Resolução da 3ª Questão (3,5 pontos)

No sistema mostrado na figura ao lado, a peça homogênea *ABC* tem massa total 2***m***. Em um dado instante, o fio que mantém o sistema em equilíbrio é cortado, permitindo que a peça deslize sem atrito ao longo do plano de inclinação α. Determinar para a peça *ABC*:



a) A posição do baricentro *G*:

$$2mx_G = sen\alpha(\frac{mL}{2} + mL) \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{3L}{4}sen\alpha}$$

(0,5)

$$2my_G = -\cos\alpha(\frac{mL}{2} + mL) \Rightarrow \boxed{y_G = -\frac{3L}{4}\cos\alpha}$$

b) O momento de inércia $\boldsymbol{J}_{zG}$:

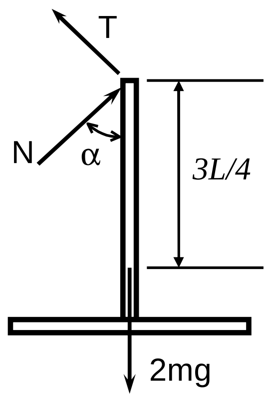
$$J_{zG} = J_{zG\,(barra\ vertical)} + J_{zG\,(BC)}$$

onde $J_{zG\,(barra\ vertical)} = \dfrac{mL^2}{12} + m\left(\dfrac{L}{2} - \dfrac{3L}{4}\right)^2 = \dfrac{7mL^2}{48}$

e $J_{zG\,(BC)} = \dfrac{mL^2}{12} + m\left(\dfrac{L}{4}\right)^2 = \dfrac{7mL^2}{48}$

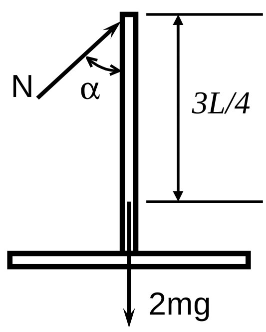
$$\Rightarrow \boxed{J_{zG} = \frac{7mL^2}{24}} \quad (1,0)$$

c) O diagrama de força do corpo livre; (0,5)



Com fio

ou



Sem fio

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

d) A aceleração do baricentro G no instante imediatamente após o rompimento do fio: usando o TMB para a peça ABC:

(0,5)

$$\begin{cases} \sum F_x = 2ma_{Gx} \Rightarrow 2mg\,\text{sen}\,\alpha = 2ma_{Gx} \\ \sum F_y = 2ma_{Gy} \Rightarrow N - 2mg\cos\alpha = 2ma_{Gy} \end{cases} \quad \text{e} \quad \boxed{\begin{array}{l} a_{Gx} = g\,\text{sen}\,\alpha \\ N = 2m(a_{Gy} + g\cos\alpha) \end{array}}$$

(0,5)

$$\vec{a}_G = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-A)]$$

$$a_{Gy} = a_{Ay} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge (3L/4)(\text{sen}\,\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j}) - \omega^2(3L/4)(\text{sen}\,\alpha\,\vec{i} - \cos\alpha\,\vec{j})$$

$$a_{Gy} = 0 + \dot{\omega}(3L/4)\,\text{sen}\,\alpha + \omega^2(3L/4)\cos\alpha$$

e) O vetor aceleração angular: usando oTMA para o polo G da peça ABC:

$$\frac{d}{dt}[I_G]\{\vec{\omega}\} + 2m(G-G) \wedge \vec{a}_G = \vec{M}_G \qquad (0,5)$$

$$J_{zG}\dot{\omega}\vec{k} = -\frac{3L}{4}\,\text{sen}\,\alpha\, N\,\vec{k} \quad \rightarrow \quad J_{zG}\,\dot{\omega} = -\frac{3L}{4}\,\text{sen}\,\alpha\, 2m(a_{Gy} + g\cos\alpha)$$

$$J_{zG}\,\dot{\omega} = -\frac{3L}{4}\,\text{sen}\,\alpha\, 2m[\dot{\omega}(3L/4)\,\text{sen}\,\alpha + \omega^2(3L/4)\cos\alpha + g\cos\alpha] \quad \rightarrow$$

$$\boxed{\dot{\omega} = -\frac{6mL}{4}\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha[\omega^2(3L/4) + g]\Big/\left(\frac{7mL^2}{24} + \frac{18mL^2}{16}\,\text{sen}^2\,\alpha\right)}$$

Resolução da 4ª Questão Opcional (1,0 ponto)

Dado um sistema de pontos materiais P_i, para $i = 1..N$, de massas m_i e velocidades $\vec{v}_i$, e sabendo que a energia cinética de um ponto material P_i é dada por $T_i = (m_i v_i^2)/2$, deduza a expressão do Teorema da Energia Cinética (TEC) para o sistema de pontos materiais, $\Delta T = \tau$ onde τ é o trabalho de todas as forças atuantes no sistema.

Temos:

$$T = \sum_i m_i v_i^2/2 \;=>\; \dot{T} = \frac{d}{dt}[\sum_i m_i v_i^2/2] = \frac{d}{dt}[\sum_i m_i \vec{v}_i.\vec{v}_i/2] = \sum_i m_i \vec{a}_i.\vec{v}_i = \sum_i \vec{F}_i.\vec{v}_i$$

Integrando de 0 a t:

$$\int_0^t \dot{T}dt = \Delta T = \int_0^t \sum_i \vec{F}_i.\vec{v}_i\,dt = \sum_i \left(\int_0^t \vec{F}_i.\vec{v}_i dt\right) = \sum_i \tau_i = \tau \;=>\; \boxed{\Delta T = \tau}$$