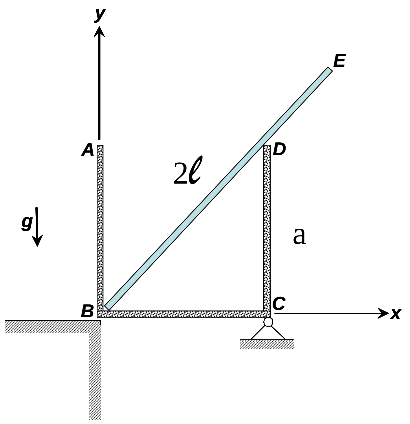
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Prova Substitutiva – 9 de dezembro de 2008

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

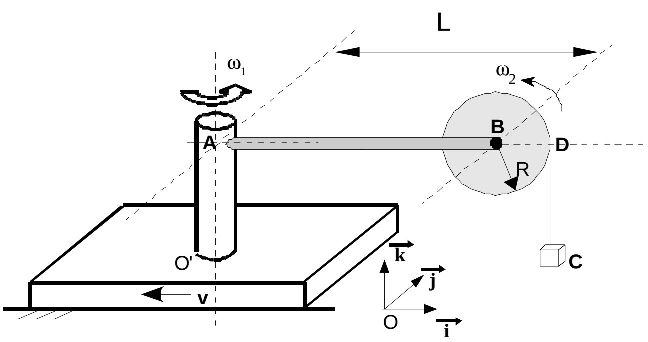


1ª. Questão (3,0 pontos) O sistema da figura é composto pela caixa *ABCD*, formada por barras de massa *m* e comprimento *a*, e pela barra *BE*, de massa 3*m* e comprimento 2ℓ. A caixa está articulada no ponto *C* e apoiada em uma quina em *B*. Pede-se:

a) calcule as coordenadas do baricentro do conjunto;

b) calcule as reações em *B* e *C* admitindo que o sistema esteja em equilíbrio;

c) determinar a relação entre ℓ e *a* para que este equilíbrio seja possível.

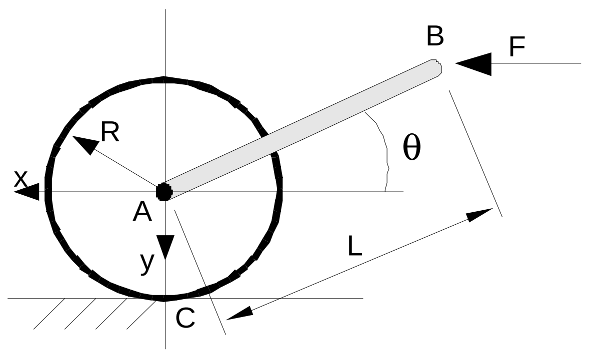


2ª. Questão (3,5 pontos) A figura ao lado mostra uma plataforma de transporte de carga que se move com velocidade constante $\vec{v} = -v\vec{i}$. A barra horizontal **AB** é soldada em **A** ao eixo **O'A** e gira com velocidade angular constante $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k}$ em torno desse eixo. Nesse mesmo instante, a polia de raio **R** e centro em **B** gira com velocidade angular constante $\vec{\omega}_2 = -\omega_2\vec{j}$, causando a elevação vertical da carga em **C**. Determine, para a posição mostrada, adotando a barra AB como referencial móvel e expressando os resultados em relação à base fixa $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

a) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do corpo em C;

b) as acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do corpo em C;

c) o vetor de rotação e a aceleração angular absoluta da polia.



3ª. Questão (3,5 pontos) Na figura ao lado, o disco homogêneo de massa ***M*** e raio ***R*** está ligado por um pino à barra homogênea **AB**, que possui massa ***m*** e comprimento **L**. O disco rola sobre o plano horizontal, escorregando, e o coeficiente de atrito dinâmico no contato é **μ**. Na extremidade **B** da barra atua uma força de módulo **F,** horizontal e constante, conforme indicado. Sabe-se que o ângulo **θ** formado entre a direção da barra e a horizontal é constante. São dados $J_{Gz}=mR^2/2$ (disco) e $J_{Gz}=mL^2/12$ (barra). Pedem-se:

a) o diagrama de corpo livre para a barra e para o disco;

b) a aceleração do ponto A;

c) a aceleração angular do disco;

d) qual é a relação entre F, M, m, g e θ que permite o movimento descrito?

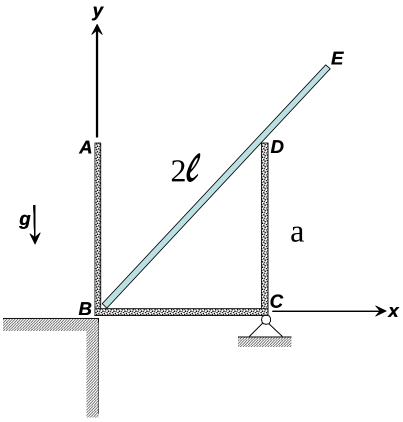
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 2100 – MECÂNICA A – Prova Substitutiva – 9 de dezembro de 2008

Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de calculadoras)



1ª. Questão (3,0 pontos) O sistema da figura é composto pela caixa *ABCD*, formada por barras de massa *m* e comprimento *a*, e pela barra *BE*, de massa 3*m* e comprimento 2ℓ. A caixa está articulada no ponto *C* e apoiada em uma quina em *B*. Pede-se:

a) calcule as coordenadas do baricentro do conjunto;

b) calcule as reações em *B* e *C* admitindo que o sistema esteja em equilíbrio;

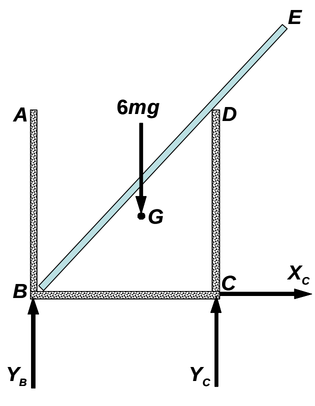
c) determinar a relação entre ℓ e a para este equilíbrio seja possível.

Resolução:

a) $$(m+m+m+3m)x_G = m.0 + m.\frac{a}{2} + m.a + 3m.\frac{\ell\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{a}{4} + \frac{\ell\sqrt{2}}{4}}$$ (0,5 pontos)

$$(m+m+m+3m)y_G = m.\frac{a}{2} + m.0 + m.\frac{a}{2} + 3m.\frac{\ell\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{y_G = \frac{a}{6} + \frac{\ell\sqrt{2}}{4}}$$ (0,5 pontos)

b) DCL:



$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \Rightarrow X_C = 0 \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow Y_B + Y_C = 6mg \\ \sum M_B = 0 \Rightarrow -6mg\left(\frac{a}{4} + \frac{\ell\sqrt{2}}{4}\right) + Y_C.a = 0 \end{cases}$$ (0,5 pontos)

$$\Rightarrow \boxed{Y_C = \frac{3}{2}mg\left(1 + \frac{\ell\sqrt{2}}{a}\right)} \Rightarrow \boxed{Y_B = \frac{3}{2}mg\left(3 - \frac{\ell\sqrt{2}}{a}\right)}$$ (0,5 pontos)

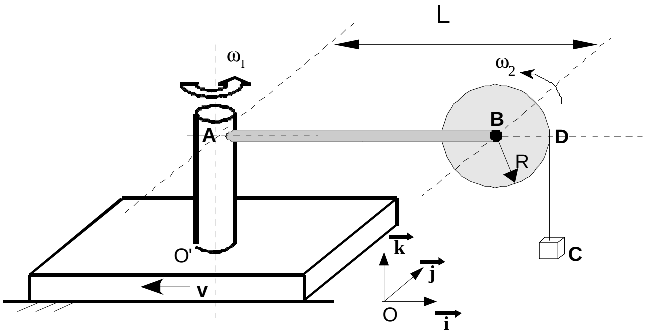
c) O sistema deixa de estar em equilíbrio quando a coordenada x_G do baricentro é suficientemente elevada para causar a rotação em torno do ponto *C*. Isso ocorre pois o vínculo *B* é incapaz de restringir o movimento no sentido positivo de *y*. Assim, para haver equilíbrio é necessário que $Y_B \geq 0$, ou seja, (0,5 pontos a explicação acima)

$$\boxed{\ell \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}a}$$ (0,5 pontos)

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



2ª. Questão (3,5 pontos) A figura ao lado mostra uma plataforma de transporte de carga que se move com velocidade constante $\vec{v} = -v\vec{i}$. A barra horizontal **AB** é soldada em **A** ao eixo **O'A** e gira com velocidade angular constante $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k}$ em torno desse eixo. Nesse mesmo instante, a polia de raio **R** e centro em **B** gira com velocidade angular constante $\vec{\omega}_2 = -\omega_2\vec{j}$, causando a elevação vertical da carga em **C**. Determine, adotando a barra AB como referencial móvel e expressando os resultados em relação à base fixa $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

a) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do corpo em C;
b) as acelerações relativa, de arrastamento e absoluta do corpo em C;
c) o vetor de rotação e a aceleração angular absoluta da polia.

Resolução:

a) (1 ponto)

$$\vec{v}_c = \vec{v}_{c,rel} + \vec{v}_{c,arr}$$

$$\vec{v}_{c,rel} = \vec{v}_{D,rel} = -\omega_2\vec{j} \wedge (D-B) = -\omega_2\vec{j} \wedge R\vec{i}$$

$$\underline{\vec{v}_{c,rel} = \omega_2 R\vec{k}}$$

$$\vec{v}_{c,arr} = \vec{v}_{D,arr} = -v\vec{i} + \omega_1\vec{k} \wedge (D-A) = -vi + \omega_1\vec{k} \wedge (L+R)\vec{i}$$

$$\underline{\vec{v}_{c,arr} = -v\vec{i} + \omega_1(L+R)\vec{j}}$$

$$\underline{\vec{v}_c = -v\vec{i} + \omega_1(L+R)\vec{j} + \omega_2 R\vec{k}}$$

b) (1,5 pontos)

$$\vec{a}_c = \vec{a}_{c,rel} + \vec{a}_{c,arr} + \vec{a}_{c,Cor}$$

$$\underline{\vec{a}_{c,rel} = \vec{0}} \quad (|\,\vec{\omega}_2\,|\ cte.)$$

$$\vec{a}_{c,arr} = \vec{a}_{D,arr} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}1 \wedge (D-A) + \vec{\omega}_1 \wedge [\vec{\omega}_1 \wedge (D-A)]$$

$$\vec{a}_{c,arr} = \omega_1\vec{k} \wedge \omega_1(L+R)\vec{j}$$

$$\underline{\vec{a}_{c,arr} = -\omega^2{}_1(L+R)\vec{i}}$$

$$\vec{a}_{c,Cor} = 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_{C,rel} = 2\omega_1\vec{k} \wedge \omega_2 R\vec{k} = \vec{0}$$

$$\underline{\vec{a}_c = -\omega^2{}_1(L+R)\vec{i}}$$

c) (1 ponto)

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \omega_1\vec{k} - \omega_2\vec{j}$$

$$\dot{\vec{\Omega}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2\right) = \dot{\omega}_1\vec{k} + \omega_1\dot{\vec{k}} - \dot{\omega}_2\vec{j} - \omega_2\dot{\vec{j}}$$

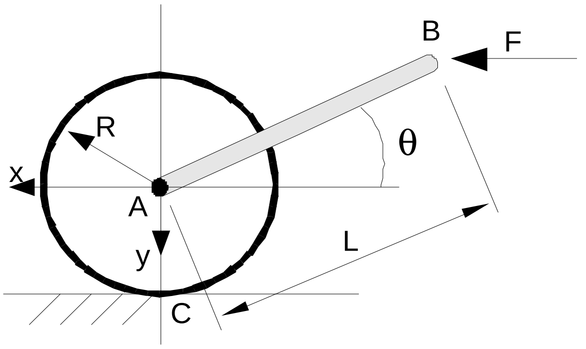
$$\dot{\vec{\Omega}} = -\omega_2\dot{\vec{j}} = \omega_1\vec{k} \wedge (-\omega_2\vec{j})$$

$$\underline{\dot{\vec{\Omega}} = \omega_1\omega_2\vec{i}}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. CEP 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



3ª. Questão (3,5 pontos) Na figura ao lado, o disco homogêneo de massa ***M*** e raio ***R*** está ligado por um pino à barra homogênea **AB**, que possui massa ***m*** e comprimento **L**. O disco rola sobre o plano horizontal, escorregando, e o coeficiente de atrito dinâmico no contato é **μ**. Na extremidade **B** da barra atua uma força de módulo **F,** horizontal e constante, conforme indicado. Sabe-se que o ângulo **θ** formado entre a direção da barra e a horizontal é constante. São dados $J_{Gz}=mR^2/2$ (disco) e $J_{Gz}=mL^2/12$ (barra).

Pedem-se:

a) o diagrama de corpo livre para a barra e para o disco;

b) a aceleração do ponto A;

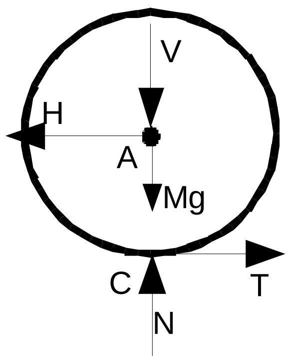
c) a aceleração angular do disco;

d) qual é a relação entre F, M, m, g e θ que permite o movimento descrito?

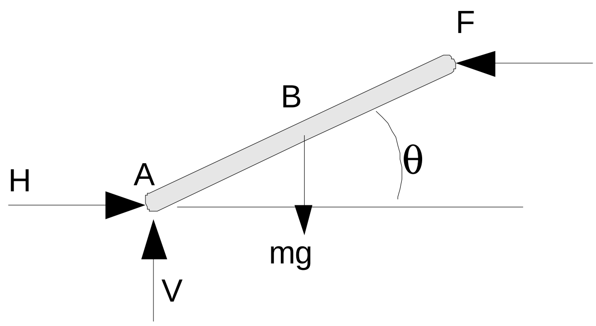
Resolução:

a) (0,5 pontos)

DCL disco



DCL barra



b) e c)

TMB para a barra (que executa ato de movimento de translação)

$$x: \; F - H = ma_B \; (1)$$

$$y: \; mg - V = 0 \Rightarrow V = mg \; (2)$$

TMB para o disco: (0,5 pontos)

$$x: \; H - T = Ma_A \; (3)$$

$$y: \; -N + V + Mg = 0 \Rightarrow N = (m+M)g \quad (4)$$

TMA para o disco em relação ao seu centro de massa, em A:

$$J_{Az}\,\dot{\omega}\vec{k} = (C - A) \wedge (-T\vec{i}) = R\vec{j} \wedge (-T\vec{i}) \Rightarrow$$

$$J_{Az}\,\dot{\omega}\vec{k} = TR\vec{k}$$

(0,5 pontos)

Notando que $T = \mu N$ e utilizando (4) obtém-se

$$\frac{MR^2}{2}\dot{\omega}\vec{k} = \mu(M + m)gR\vec{k} \Rightarrow$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{2\mu g(M + m)}{MR}\vec{k}$$

(0,5 pontos)

O sistema formado por (1) e (3) é:

$x:\ F - H = ma_B$ (1)

$x:\ H - T = Ma_A$ (3)

Como o movimento da barra é de translação, $a_B = a_A = a$. Assim, resolvendo o sistema acima, obtém-se

$$\vec{a} = \frac{F - \mu(M + m)g}{(M + m)}\vec{i} \qquad (5)$$

(0,5 pontos)

d) Como já discutido, a barra executa movimento de translação. Portanto, o TMA para o seu centro de massa (ponto B) fornece, com V dado por (2):

$$\vec{M}_B^{ext} = \vec{0} \Rightarrow H\frac{L}{2}sen\,\theta - V\frac{L}{2}\cos\theta + F\frac{L}{2}sen\,\theta = 0$$

$$H = \frac{mg\cos\theta - Fsen\,\theta}{sen\,\theta} \qquad (6)$$

(0,5 pontos)

Substituindo (6) em (1) e notando que a_B é dada por (5) temos:

$$F - \left(\frac{mg\cos\theta - Fsen\theta}{sen\theta}\right) = m\left(\frac{F - \mu(M + m)g}{(M + m)}\right) \Rightarrow$$

$$F(M + m)sen\theta - (M + m)mg\cos\theta + F(M + m)sen\theta = F.m.sen\theta - \mu(M + m)mg.sen\theta \Rightarrow$$

$$2F.M.sen\theta + 2F.m.sen\theta - F.m.sen\theta = mg(M + m)(\cos\theta - \mu sen\theta) \Rightarrow$$

(0,5 pontos)

$$(2M + m)F.sen\theta = mg(M + m)(\cos\theta - \mu sen\theta) \Rightarrow$$

$$F = \frac{mg(M + m)(\cos\theta - \mu sen\theta)}{(2M + m)sen\theta} \qquad \left(desde\ \ que\ \ \frac{1}{\mu} > tg(\theta)\right)$$