ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

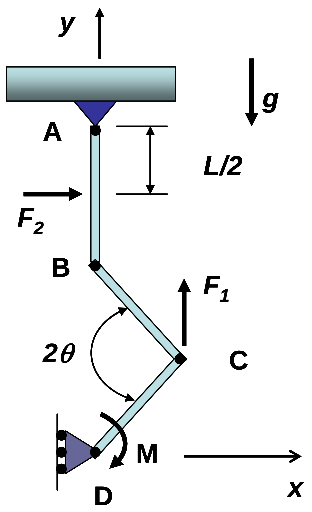
PME 2100 – MECÂNICA A –Prova Substitutiva – 15 de dezembro de 2006

Duração da Prova: 100 minutos (não é permitido uso de calculadoras)

1ª Questão (3,0 pontos) Três barras homogêneas idênticas, de massa m e comprimento L, estão submetidas a esforços $\vec{F}_1 = F_1\vec{j}$, $\vec{F}_2 = F_2\vec{i}$ e $\vec{M} = -M\vec{k}$, conforme indicado na figura ao lado. Pede-se:

a) A posição do baricentro do sistema, para um valor genérico do ângulo θ;

b) As reações em A e D, supondo o sistema equilibrado.

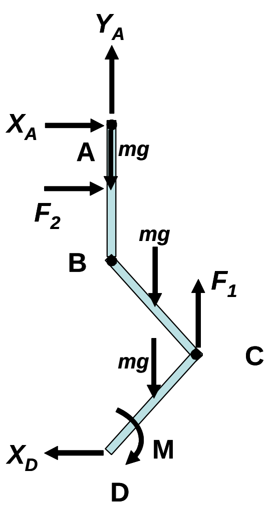


(a)

$$x_G = \frac{0m + \frac{L}{2}\cos\theta\, m + \frac{L}{2}\cos\theta\, m}{3m} \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{L\cos\theta}{3}} \quad \textbf{(0,5)}$$

$$y_G = \frac{\left(2L\,\text{sen}\,\theta + \frac{L}{2}\right)m + \frac{3L}{2}\text{sen}\,\theta\, m + \frac{L}{2}\text{sen}\,\theta\, m}{3m} \Rightarrow \boxed{y_G = \frac{4L\,\text{sen}\,\theta}{3} + \frac{L}{6}} \quad \textbf{(0,5)}$$

(b) DCL do sistema:



Equilíbrio:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow X_A + F_2 - X_D = 0 \quad \textbf{(0,5)}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Y_A + F_1 - 3mg = 0 \Rightarrow \boxed{Y_A = 3mg - F_1} \quad \textbf{(0,5)}$$

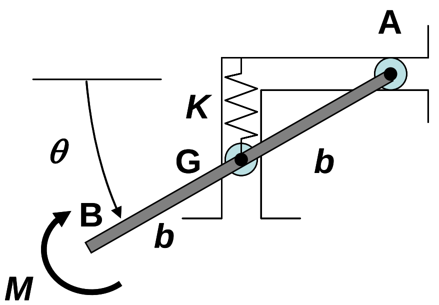
$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F_2\frac{L}{2} - mg\frac{L}{2}\cos\theta - mg\frac{L}{2}\cos\theta + F_1 L\cos\theta - X_D\left(L + 2L\,\text{sen}\,\theta\right) - M = 0 \quad \textbf{(0,5)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \boxed{X_D = \frac{F_2 L + 2L\cos\theta\left(F_1 - mg\right) - 2M}{2L\left(1 + 2\,\text{sen}\,\theta\right)}} \\ &\Rightarrow \boxed{X_A = \frac{-F_2 L\left(1 + 4L\,\text{sen}\,\theta\right) + 2L\cos\theta\left(F_1 - mg\right) - 2M}{2L\left(1 + 2\,\text{sen}\,\theta\right)}} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(0,5)}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

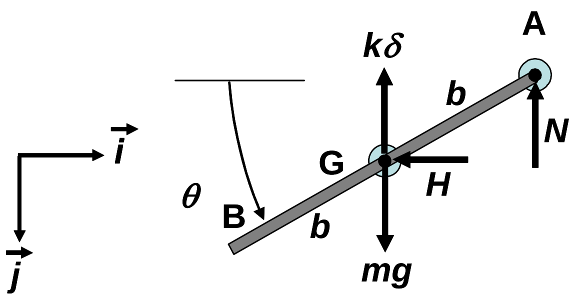
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica



2ª Questão (3,5 pontos) Uma barra esbelta e uniforme, de massa m e comprimento $2b$, é mostrada na sua posição de equilíbrio no plano vertical, antes que o binário de momento M seja a ela aplicado, conforme ilustrado na figura. Determine a aceleração angular inicial α da barra ao se aplicar o binário. Os pinos-guia são ideais: tem massa desprezível e podem deslizar sem atrito nas guias. A mola linear é ideal e tem constante elástica K.

DCL para a barra antes da aplicação de M:



Equilíbrio:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{H = 0}$

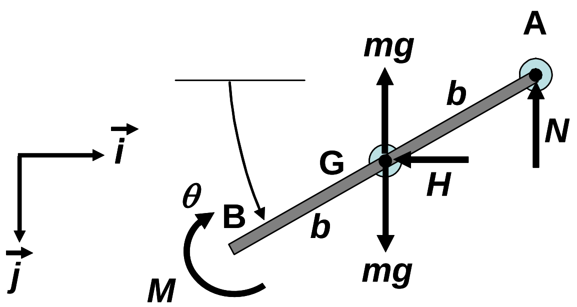
$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \quad mg - k\delta - N = 0$

$\Sigma M_G = 0 \Rightarrow \quad N b \cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{N = 0}$

$\Rightarrow \boxed{k\delta = mg}$

(0,5)

DCL para a barra após a aplicação de M:



(0,5)

i) TMA, usando G como pólo:

$$M_G = J_G\dot{\omega}\ ; \quad J_G = \frac{1}{12}m(2b)^2 = \frac{1}{3}mb^2$$

$$M_G = M - Nb\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{M - Nb\cos\theta = \frac{1}{3}mb^2\dot{\omega}} \ (1)$$ **(1,0)**

ii) TMB, na direção vertical: $\boxed{N = m a_G}$ (2) **(0,5)**

iii) Relações cinemáticas: **(0,5)**

$\vec{a}_A = \vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - G)$ e, como $\vec{a}_A = a_A\vec{i}$ e $\vec{a}_G = a_G\vec{j}$,então:

$$a_A\vec{i} = a_G\vec{j} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge b(\cos\theta\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\vec{j})$$

$$\Rightarrow a_A\vec{i} = a_G\vec{j} - \dot{\omega}b\cos\theta\vec{j} + \dot{\omega}b\operatorname{sen}\theta\vec{i}$$

Portanto:

$\boxed{a_A = \dot{\omega}b\operatorname{sen}\theta}$ e $\boxed{a_G = \dot{\omega}b\cos\theta}$ (3)

Substituindo (3) em (2) $\Rightarrow \boxed{N = m\dot{\omega}b\cos\theta}$ (4)

Substituindo (4) em (1) $\Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = \dfrac{M}{mb^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{3}\right)}}$

(0,5)

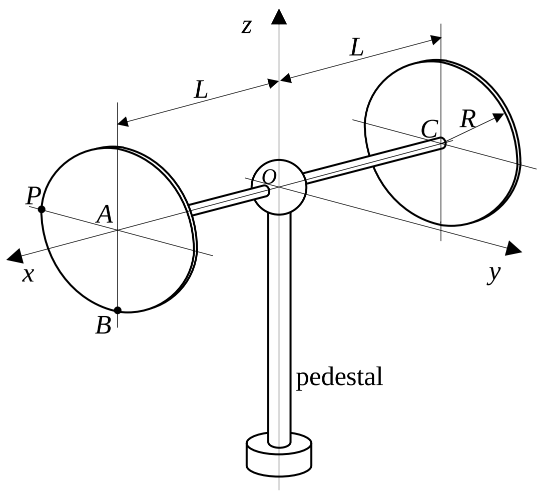
-

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

3ª Questão (3,5 pontos) O sistema de coordenadas *Oxyz*, orientado pelos versores $(\vec i, \vec j, \vec k)$ está fixo na barra *AOC* que, por sua vez, está articulada em *O* por meio de uma junta esférica. Os discos de raio *R* e centros *A* e *C* são perpendiculares à barra e em torno delas podem girar. Considere o *pedestal como referencial fixo* e a barra *AOC* como *referencial móvel*. No instante mostrado na figura, as velocidades dos pontos *P* e *B*, relativas à *AOC*, são respectivamente: $\vec v_{Pr} = v\vec k$ e $\vec v_{Br} = -v\vec j$, com v constante. Neste mesmo instante o vetor de rotação da barra *AOC* é $\vec\Omega = \Omega(\vec j + \vec k)$, medido relativamente ao pedestal, com Ω constante. Determine, no instante mostrado na figura:



a) O vetor de rotação *relativo*, $\vec\omega_r$, do disco de centro *A*;

b) Os vetores de rotação, $\vec\omega$ e de aceleração angular, $\vec\alpha$, *absolutos*, do disco de centro *A*;

c) As acelerações: relativa, $\vec a_{Pr}$, de arrastamento, $\vec a_{Pa}$, de Coriolis $\vec a_{Pc}$ e absoluta, $\vec a_P$ do ponto *P*.

a) $\vec v_{P,rel} = \vec v_{A,rel} + \vec\omega_{rel} \wedge (P-A) \Rightarrow v\vec k = \vec 0 + \left(\omega_x \vec i + \omega_y \vec j + \omega_z \vec k\right) \wedge \left(-R\vec j\right) \Rightarrow v\vec k = -\omega_x R\vec k + \omega_z \vec i$

$\vec v_{B,rel} = \vec v_{A,rel} + \vec\omega_{rel} \wedge (B-A) \Rightarrow -v\vec j = \vec 0 + \left(\omega_x \vec i + \omega_y \vec j + \omega_z \vec k\right) \wedge \left(-R\vec k\right) \Rightarrow -v\vec j = \omega_x R\vec j - \omega_y R\vec i$

$\therefore \quad \omega_x = -\dfrac{v}{R}, \ \omega_y = 0$ e $\omega_z = 0 \Rightarrow \boxed{\vec\omega_{rel} = -\dfrac{v}{R}\vec i}$ **(1,0)**

b) $\vec\omega_{abs} = \vec\omega_{rel} + \vec\omega_{arr} \Rightarrow \boxed{\vec\omega_{abs} = -\dfrac{v}{R}\vec i + \Omega\vec j + \Omega\vec k}$ **(0,5)**

$\vec\alpha_{abs} = \vec\alpha_{rel} + \vec\alpha_{arr} + \vec\alpha_{res}$; $\vec\alpha_{rel} = \vec 0$; $\vec\alpha_{arr} = \Omega\dot{\vec j} + \Omega\dot{\vec k} = \Omega\left(\Omega\vec j + \Omega\vec k\right)\wedge\vec j + \Omega\left(\Omega\vec j + \Omega\vec k\right)\wedge\vec k = -\Omega^2\vec i + \Omega^2\vec i = \vec 0$;

$\vec\alpha_{res} = \vec\omega_{arr} \wedge \vec\omega_{rel} = \left(\Omega\vec j + \Omega\vec k\right)\wedge\left(-\dfrac{v}{R}\vec i\right) = \left(\Omega\dfrac{v}{R}\vec k - \Omega\dfrac{v}{R}\vec j\right) \Rightarrow \boxed{\vec\alpha_{abs} = \Omega\dfrac{v}{R}\vec k - \Omega\dfrac{v}{R}\vec j}$ **(0,5)**

c) $\vec a_{P,rel} = \vec a_{A,rel} + \vec\alpha_{rel}\wedge(P-A) + \vec\omega_{rel}\wedge\left[\vec\omega_{rel}\wedge(P-A)\right] = -\dfrac{v}{R}\vec i \wedge \left[-\dfrac{v}{R}\vec i \wedge -R\vec j\right] \Rightarrow \boxed{\vec a_{P,rel} = \dfrac{v^2}{R}\vec j}$ **(0,5)**

$\vec a_{P,arr} = \vec a_O + \vec\alpha_{arr}\wedge(P-A) + \vec\omega_{arr}\wedge\left[\vec\omega_{arr}\wedge(P-A)\right] = \left(\Omega\vec j + \Omega\vec k\right)\wedge\left[\left(\Omega\vec j + \Omega\vec k\right)\wedge\left(L\vec i - R\vec j\right)\right] \Rightarrow$

$\boxed{\vec a_{P,arr} = \Omega^2\left(-2L\vec i + R\vec j - R\vec k\right)}$ **(0,5)**

$\vec a_{P,Cor} = 2\vec\omega_{arr}\wedge\vec v_{P,rel} = 2\left(\Omega\vec j + \Omega\vec k\right)\wedge v\vec k \Rightarrow \boxed{\vec a_{P,Cor} = 2\Omega v\vec i}$

$\vec a_{P,abs} = \vec a_{P,rel} + \vec a_{P,arr} + \vec a_{P,Cor} \Rightarrow \boxed{\vec a_{P,abs} = 2\Omega(v - \Omega L)\vec i + \left(\dfrac{v^2}{R} + \Omega^2 R\right)\vec j - \Omega^2 R\vec k}$ **(0,5)**