ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

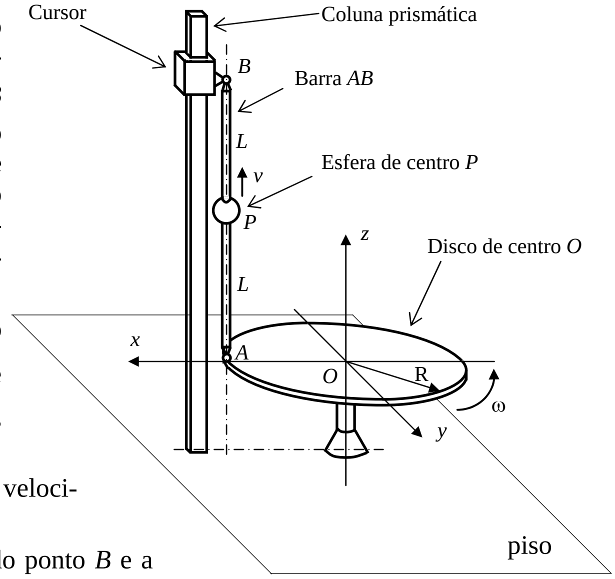
Departamento de Engenharia Mecânica

# PME2100 – Mecânica A

## Prova Substitutiva – 06 de Dezembro de 2005 – Duração: 100 minutos

### Importante: não é permitido o uso de calculadoras

**1 – (4,0 pontos)** O piso é o referencial fixo, e a coluna prismática (paralela ao eixo *Oz*) está fixa neste piso. O centro *O* do disco também não se move em relação ao piso. O vetor de rotação do disco de raio $R$ é $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ ($\omega$ constante). A barra *AB* tem comprimento $2L$, está vinculada em *A* na periferia do disco e em *B* no cursor, por meio de juntas esféricas e, no instante mostrado na figura, é paralela ao eixo *Oz*. A esfera (de centro *P*) se move ao longo da barra *AB*, com velocidade $v$ (constante) e encontra-se no meio da barra, no instante mostrado na figura. Considerando este mesmo instante:




*Oxyz* é fixo em relação ao piso.

a) Determine a velocidade $\vec{v}_A$ do ponto *A*, o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ da barra *AB*, e a velocidade $\vec{v}_B$ do ponto *B*. Considere que a componente de $\vec{\Omega}$ na direção **vertical** seja nula em todos os instantes.

b) Adotando a barra *AB* como referencial móvel, determine as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto *P*.

c) Determine a aceleração $\vec{a}_A$ do ponto *A*, a aceleração $\vec{a}_B$ do ponto *B* e a aceleração angular $\vec{\alpha}$ da barra *AB*

d) Determine as acelerações relativa, de arrastamento, de Coriolis e absoluta do ponto *P*.

**Solução:**

**a)** $\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (A - O) = \vec{0} + \omega \vec{k} \wedge R\vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = \omega R \vec{j}}$

$\vec{v}_B = -v_B \vec{k}$; $\quad \vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j}$; $\quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\Omega} \wedge (B - A)$; $\quad -v_B \vec{k} = \omega R \vec{j} + (\Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j}) \wedge 2L\vec{k}$;

$-v_B \vec{k} = \omega R \vec{j} - 2L\Omega_x \vec{j} + 2L\Omega_y \vec{i} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \vec{0}}$, $\quad \Omega_x = \dfrac{\omega R}{2L}$ e $\Omega_y = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega} = \dfrac{\omega R}{2L} \vec{i}}$

b) $\boxed{\vec{v}_{P,rel} = v\vec{k}}$

$\vec{v}_{P,arr} = \vec{v}_B + \vec{\Omega} \wedge (P - B) = \vec{0} + \dfrac{\omega R}{2L} \vec{i} \wedge L(-\vec{k}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,arr} = \dfrac{\omega R}{2} \vec{j}}$

$\vec{v}_{P,abs} = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{P,abs} = \dfrac{\omega R}{2} \vec{j} + v\vec{k}}$

c) $\vec{a}_A = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A - O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A - O)] = \vec{0} + \vec{0} + \omega \vec{k} \wedge [\omega \vec{k} \wedge R\vec{i}] \Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = -\omega^2 R \vec{i}}$

$\vec{a}_B = -a_B \vec{k}$; $\quad \vec{\alpha} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j}$; $\quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge (B - A) + \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge (B - A)]$;

$-a_B \vec{k} = -\omega^2 R \vec{i} + (\alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j}) \wedge 2L\vec{k} + \dfrac{\omega R}{2L} \vec{i} \wedge \left[\dfrac{\omega R}{2L} \vec{i} \wedge 2L\vec{k}\right]$; $\quad -a_B \vec{k} = -\omega^2 R \vec{i} - 2L\alpha_x \vec{j} + 2L\alpha_y \vec{i} - \dfrac{\omega^2 R^2}{2L} \vec{k}$;

$a_B = \dfrac{\omega^2 R^2}{2L} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = -\dfrac{\omega^2 R^2}{2L} \vec{k}}$; $\quad \alpha_x = 0$ e $\alpha_y = \dfrac{\omega^2 R}{2L} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha} = \dfrac{\omega^2 R}{2L} \vec{j}}$

d) $\vec{a}_{P,rel} = \dot{v}\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,rel} = \vec{0}}$

$$\vec{a}_{P,arr} = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge (P-A) + \vec{\Omega} \wedge \left[\vec{\Omega} \wedge (P-A)\right] = -\omega^2 R\vec{i} + \frac{\omega^2 R}{2L}\vec{j} \wedge L\vec{k} + \frac{\omega R}{2L}\vec{i} \wedge \left[\frac{\omega R}{2L}\vec{i} \wedge L\vec{k}\right] \Rightarrow$$

$$\vec{a}_{P,arr} = -\omega^2 R\vec{i} + \frac{\omega^2 R}{2}\vec{i} - \frac{\omega^2 R^2}{4L}\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,arr} = -\frac{\omega^2 R}{2}\vec{i} - \frac{\omega^2 R^2}{4L}\vec{k}}$$

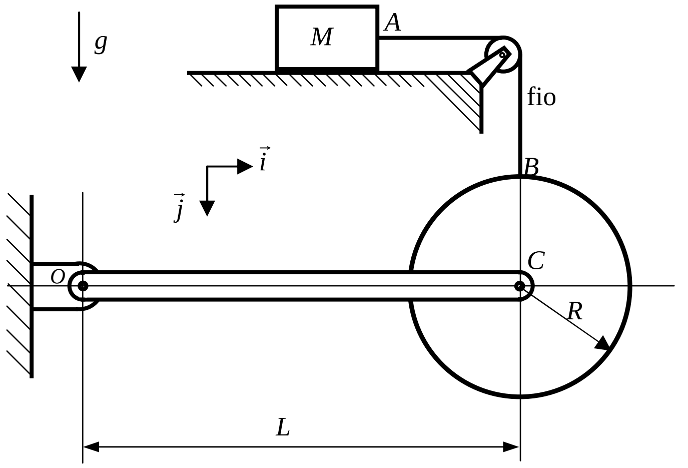
$$\vec{a}_{P,cor} = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{P,rel} = 2\frac{\omega R}{2L}\vec{i} \wedge v\vec{k} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,cor} = -\frac{\omega R v}{L}\vec{j}}$$

$$\vec{a}_{P,abs} = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + \vec{a}_{P,cor} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{P,abs} = -\frac{\omega^2 R}{2}\vec{i} - \frac{\omega R v}{L}\vec{j} - \frac{\omega^2 R^2}{4L}\vec{k}}$$

# PME2100 – Mecânica A

## Prova Substitutiva – 06 de Dezembro de 2005 – Duração: 100 minutos

### Importante: não é permitido o uso de calculadoras




**2 - (6,0 pontos)** A figura mostra uma barra homogênea de massa $m$ e comprimento $L$, articulada em $O$ e $C$ e um disco homogêneo de massa $m$ , raio $R$ e articulado em $C$. O sistema "barra e disco" é mantido em repouso na posição horizontal por um fio ideal ligado ao disco no ponto $B$ e cuja outra extremidade está ligada a um bloco de massa $M$ no ponto $A$. O coeficiente de atrito entre o bloco e sua superfície de apoio é $\mu$, mas nas articulações e na polia o atrito é nulo. Na situação apresentada:

a) Determine as reações do vínculo em $O$ e a tração no fio, e determine o eixo central do sistema de forças externas que atuam no sistema "barra e disco".

b) Calcule o mínimo coeficiente de atrito $\mu$ compatível com o equilíbrio.

Nos itens seguintes considere que o fio foi cortado:

c) Considerando o instante imediatamente posterior ao corte do fio, determine as reações do vínculo em $O$ e determine o eixo central do sistema de forças externas que atuam no sistema "barra e disco".

d) Usando o Teorema do Momento Angular, determine o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ do disco.

e) Usando o Teorema da Energia Cinética, determine o vetor de rotação $\vec{\omega}$ da barra no instante em que o centro do disco atinge o ponto mais baixo de sua trajetória.

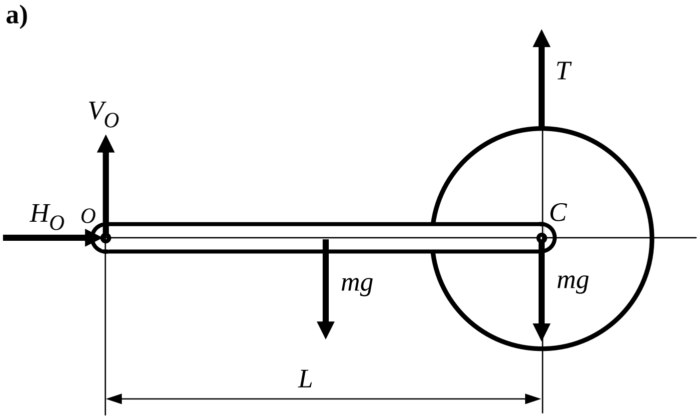
f) Determine as reações da articulação em $O$ no instante em que o centro do disco atinge o ponto mais baixo de sua trajetória.

Eixo central: lugar geométrico dos pólos para os quais o momento do sistema de forças é mínimo.

Disco homogêneo de massa $m$ e raio $R$: $J_{Gz} = \dfrac{mR^2}{2}$  Barra homogênea de massa $m$ e comprimento $L$: $J_{Gz} = \dfrac{mL^2}{12}$

**Solução:**

**a)**




$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{H_0 = 0}$$

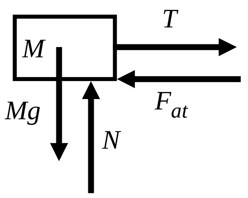
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow mg + mg - V_O - T = 0$$

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow mg\frac{L}{2} + mgL - TL = 0 \Rightarrow \boxed{T = \frac{3}{2}mg}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_O = \frac{1}{2}mg}$$

Como o sistema é equilibrado ( $\vec{R} = \vec{0}$ ), o eixo central não está definido.

**b)**

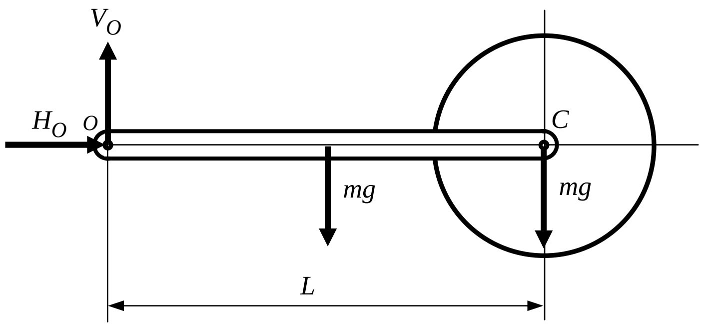



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T - F_{at} = 0 \Rightarrow F_{at} = T = \frac{3}{2}mg$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Mg - N = 0 \Rightarrow N = Mg$$

No limite, pela lei de Coulomb, $F_{at} \le \mu N \Rightarrow \frac{3}{2}mg \le \mu Mg \Rightarrow \boxed{\mu_{mín} = \frac{3m}{2M}}$

**c)**




TMA para o conjunto com pólo em *O*:

$$J_O\,\dot{\omega} = mg\frac{L}{2} + mgL \Rightarrow \left(\frac{mL^2}{3} + mL^2\right)\dot{\omega} = \frac{3}{2}mgL \Rightarrow$$

$$\dot{\omega} = \frac{9g}{8L}$$

TMA para o conjunto com pólo no baricentro do conjunto:

$$J_G\,\dot{\omega} = V_O\frac{3}{4}L \Rightarrow \left(\frac{mL^2}{12} + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2\right) = V_O\frac{3}{4}L$$

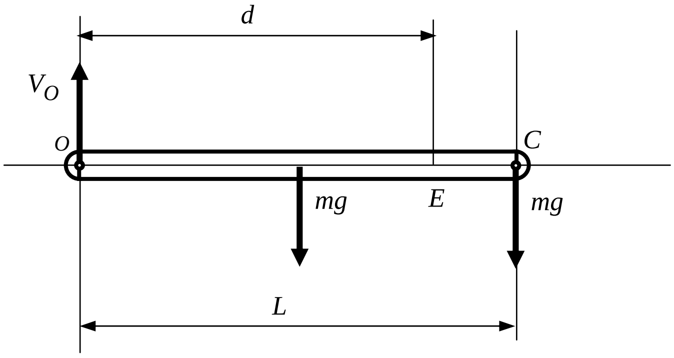
$$\Rightarrow \frac{5}{24}mL^2\frac{9g}{8L} = V_O\frac{3}{4}L \Rightarrow \boxed{V_O = \frac{5}{16}mg}$$

TMB para o conjunto:

$$H_O\vec{i} + \left(2mg - V_O\right)\vec{j} = m\vec{a}_G;\quad \vec{a}_G = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \wedge (G-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G-O)] = \vec{0} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \frac{3}{4}L\vec{i} + \omega\vec{k} \wedge \left[\omega\vec{k} \wedge \frac{3}{4}L\vec{i}\right] \Rightarrow$$

$\vec{a}_G = \dot{\omega}\frac{3}{4}L\,\vec{j} - \omega^2\frac{3}{4}L\vec{i}$ e, como $\omega = 0$ no instante inicial, então a componente de $\vec{a}_G$ na direção de $\vec{i}$ é nula nesse mesmo instante $\Rightarrow \boxed{H_O = 0}$

O sistema de forças é um sistema de forças paralelas e, portanto, o momento mínimo é nulo e o eixo central terá a direção do campo de forças paralelas. Como o sistema de forças é um sistema plano, o eixo central será, então, ortogonal à barra, estará no plano do sistema de forças e passará pelo ponto *E* da barra em relação ao qual o momento é nulo:




$$\sum M_E = 0 \Rightarrow V_O d - mg\left(d - \frac{L}{2}\right) + mg\left(L - d\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{16}mgd - 2mgd + \frac{3}{2}Lmg = 0 \Rightarrow \boxed{d = \frac{8}{9}L}$$

**d) Teorema do Momento Angular para o disco:**

Considerando que não há atrito na articulação, as linhas de ação de todas as forças que atuam no disco passam pelo seu baricentro *C*. Assim, o momento das forças externas ao disco é nulo, portanto o momento angular do disco se mantém constante. Como o sistema parte do repouso, o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ do disco é sempre igual ao vetor nulo.

$$\dot{\vec{H}}_C = \vec{M}_C^{ext} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_C = \text{constante}$$

Como o sistema parte do repouso:

$$\vec{H}_C = \vec{0} \quad \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega} = \vec{0}}$$

**e) Teorema da Energia Cinética**

Como o vetor de rotação $\vec{\Omega}$ do disco é sempre nulo, o disco possui apenas movimento de translação, logo a velocidade de todos os seus pontos são iguais entre si, em particular iguais à velocidade do ponto *C*, que também pertence à barra. Desse modo, tudo se passa como se o disco fosse um ponto material em *C*. Portanto, o sistema pode ser reduzido à barra com uma massa adicional (a massa do disco) concentrada na extremidade em *C*, e o momento de inércia em relação ao eixo da articulação no suporte pode ser calculado como:

$$J_{Oz} = J_{Gz} + m \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 + mL^2 \quad \Rightarrow \quad m\frac{L^2}{12} + m \cdot \frac{L^2}{4} + mL^2 \quad \Rightarrow \quad J_{Oz} = \frac{4mL^2}{3}$$

Energia cinética do sistema:

$$E = \frac{1}{2} J_{Oz}\omega^2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2}\frac{4mL^2}{3}\omega^2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{2mL^2}{3}\omega^2$$

Trabalho das forças:

Como não há atrito nas articulações, as únicas forças que realizam trabalho são as forças peso, portanto, no ponto mais baixo da trajetória:

$$W = mg \cdot \frac{L}{2} + mg \cdot L \quad \Rightarrow \quad W = \frac{3mgL}{2}$$

Usando o Teorema da Energia Cinética, e considerando que o sistema parte do repouso:

$$E - E_0 = W \quad \Rightarrow \quad E - 0 = W$$

$$\frac{2mL^2}{3}\omega^2 = \frac{3mgL}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{9g}{4L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{L}}\,\vec{k}}$$

**f) Reações na articulação**

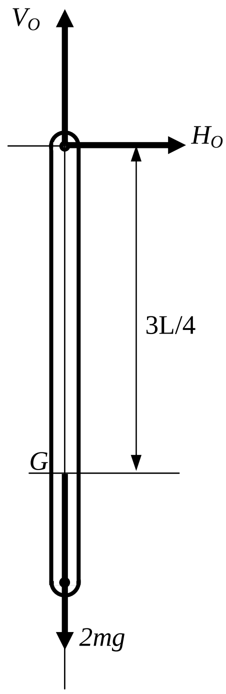
Localização do baricentro:

No eixo da barra, a distância entre o ponto *O* e o baricentro *G* do conjunto pode ser determinada por:

$$d = \frac{m\frac{L}{2} + mL}{m + m} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3L}{4}$$

Com relação à articulação em *O*, o sistema se comporta como uma barra de massa m com uma massa m concentrada em *C*.

No ponto mais baixo da trajetória, temos o seguinte diagrama de corpo livre (o disco não está representado na figura):




A trajetória do baricentro *G* é circular, com raio 3*L*/4. No ponto mais baixo da trajetória, a energia cinética é máxima, portanto, a velocidade angular é máxima. Sendo um ponto de máximo local, a aceleração angular é nula.

Aceleração do baricentro:

$$\vec{a}_G = -\dot{\omega}\frac{3L}{4}\vec{i} - \omega^2\frac{3L}{4}\vec{j}$$

como, neste instante, $\dot{\omega} = 0$ e $\omega^2 = \dfrac{9g}{4L}$:

$$\vec{a}_G = -\frac{9g}{4L}\frac{3L}{4}\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_G = -\frac{27g}{16}\vec{j}$$

Teorema do Movimento do Baricentro:

$$2m\vec{a}_G = \vec{R}$$

$$-2m\frac{27g}{16}\vec{j} = H_O\vec{i} + \left(2mg - V_O\right)\vec{j}$$

$$\boxed{H_O = 0}$$

$$V_A = 2m\frac{27g}{16} + 2mg \Rightarrow \boxed{V_O = \frac{43}{8}mg}$$