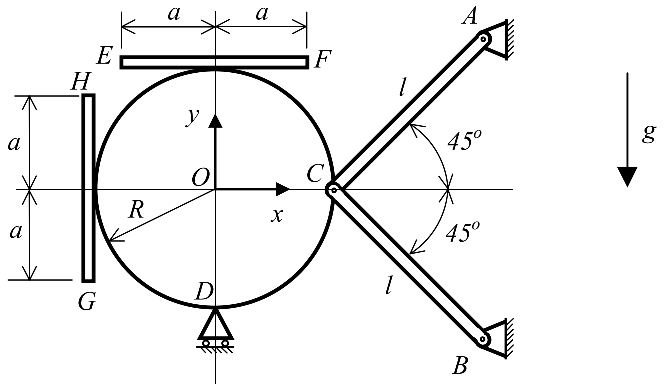
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME2100 – Mecânica A
Prova Substitutiva – 17 de Dezembro de 2004 – Duração: 100 minutos
GABARITO

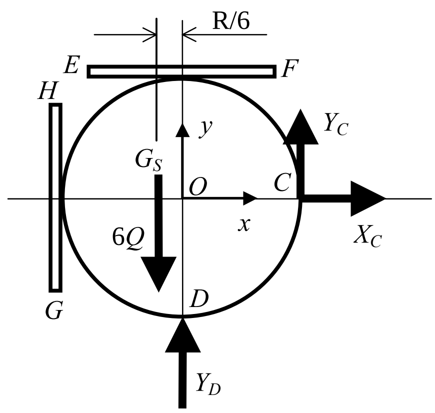
Questão 1 (3,0 pontos) – A barra homogênea *EF*, de peso *Q*, e a barra homogênea *GH*, de peso *Q*, estão soldadas ao disco de centro *O*, raio *R* e peso 4*Q*. As barras *AC* e *CB* têm massa desprezível, comprimento *l* e estão articuladas nas duas extremidades.
a – Determine o baricentro do sólido formado pelo disco e pelas barras *EF* e *GH*.
b – Calcule as forças nas barras *AC* e *CB*.



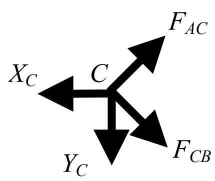
Solução:
Item (a):
Considerando o sistema de coordenadas *Oxy*, as coordenadas do baricentro do sólido são:

$$\bar{x} = \frac{Q\cdot(-R) + Q\cdot 0 + 4Q\cdot 0}{Q+Q+4Q} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = -\frac{R}{6}} \qquad \bar{y} = \frac{Q\cdot R + Q\cdot 0 + 4Q\cdot 0}{Q+Q+4Q} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = \frac{R}{6}}$$

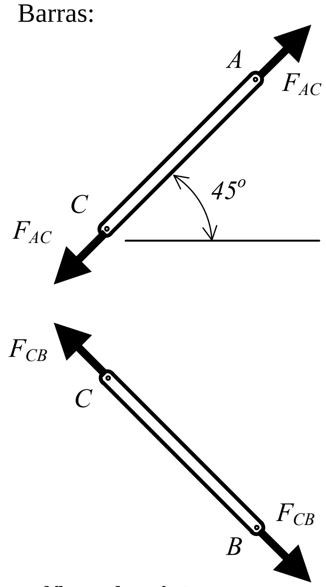
Item (b):
Diagramas de corpo livre:
Sólido:



Nó:



Barras:



Condições de equilíbrio do sólido:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_C = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_C + Y_D - 6Q = 0$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 6Q\cdot\left(\frac{R}{6} + R\right) - Y_D\cdot R = 0$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow 6Q\cdot\frac{7R}{6} - Y_D\cdot R = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_D = 7Q$$

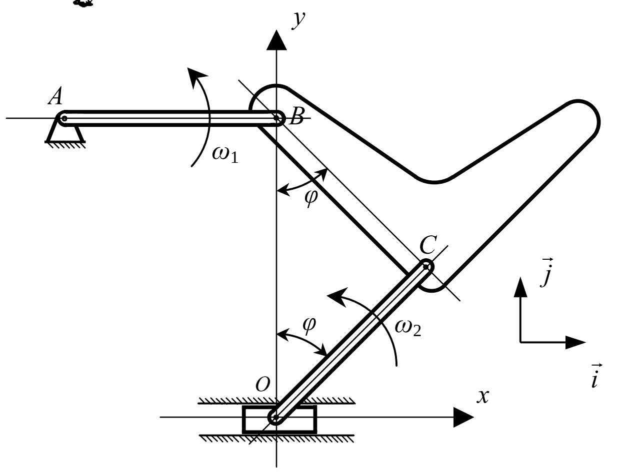
Como $Y_C + Y_D - 6Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_C = -Q$

Condições de equilíbrio do nó C:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AC}\frac{\sqrt{2}}{2} + F_{CB}\frac{\sqrt{2}}{2} - \underbrace{X_C}_{0} = 0 \Rightarrow F_{AC} = -F_{CB}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AC}\frac{\sqrt{2}}{2} - F_{CB}\frac{\sqrt{2}}{2} - \underbrace{Y_C}_{-Q} = 0 \Rightarrow F_{AC}\sqrt{2} = -Q$$

$$\boxed{F_{AC} = -Q\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \boxed{F_{CB} = Q\frac{\sqrt{2}}{2}}$$



Questão 2 (3,5 pontos) – O sistema mostrado na figura é composto pelas barras *AB* e *CO*, de comprimento *l*, e pela peça articulada em *B* e *C*. No instante analisado, o vetor de rotação da barra *AB* é $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$, e a velocidade do ponto *O* é $\vec{v}_O = v\vec{i}$. Pede-se:

a – A velocidade do ponto *B*.

b – Assumindo que a velocidade angular da barra *OC* seja positiva, determinar se o centro instantâneo de rotação (CIR) da barra *OC* está localizado acima ($y > 0$) ou abaixo ($y < 0$) do eixo *Ox*.

c – O vetor de rotação $\vec{\omega}_2$ da barra *OC*.

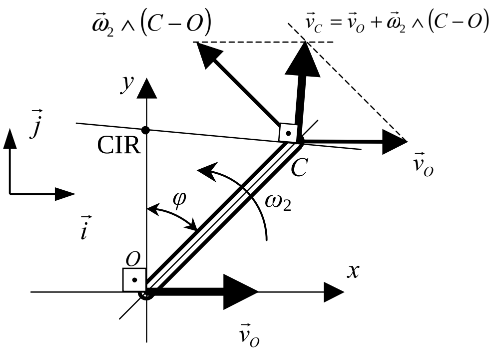
Solução:

Item (a):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_1 \wedge (B - A) \Rightarrow \vec{v}_B = \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge l\,\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_B = \omega_1 \cdot l\,\vec{j}}$$

Item (b):

Observe que $\vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega}_2 \wedge (C - O)$, e que $\vec{\omega}_2 \wedge (C - O)$ é perpendicular a $(C - O)$. Portanto, para $\omega_2 > 0$, e $v > 0$, a reta perpendicular a $\vec{v}_C$ é concorrente à reta perpendicular a $\vec{v}_O$ em um ponto acima do eixo *Ox*, como se pode perceber na figura:



Item (c):

O ponto *C* pertence à barra *OC* e à peça *BC* (cujo vetor de rotação denominaremos $\vec{\omega}_3$), portanto:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega}_2 \wedge (C - O)$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{\omega}_3 \wedge (C - B)$$

$$\vec{v}_O + \vec{\omega}_2 \wedge (C - O) = \vec{v}_B + \vec{\omega}_3 \wedge (C - B) \Rightarrow v\vec{i} + \omega_2 \vec{k} \wedge \left(l\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{i} + l\cos\varphi\,\vec{j}\right) = \omega_1 \cdot l\,\vec{j} + \omega_3 \vec{k} \wedge \left(l\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{i} - l\cos\varphi\,\vec{j}\right)$$

$$v\vec{i} + \omega_2 \cdot l\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{j} - \omega_2 \cdot l\cos\varphi\,\vec{i} = \omega_1 \cdot l\,\vec{j} + \omega_3 \cdot l\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{j} + \omega_3 \cdot l\cos\varphi\,\vec{i}$$

$$(v - \omega_2 \cdot l\cos\varphi)\vec{i} + \omega_2 \cdot l\,\text{sen}\,\varphi\,\vec{j} = \omega_3 \cdot l\cos\varphi\,\vec{i} + (\omega_1 \cdot l + \omega_3 \cdot l\,\text{sen}\,\varphi)\vec{j}$$

Portanto:

$$\begin{cases} v - \omega_2 \cdot l\cos\varphi = \omega_3 \cdot l\cos\varphi \\ \omega_2 \cdot l\,\text{sen}\,\varphi = \omega_1 \cdot l + \omega_3 \cdot l\,\text{sen}\,\varphi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (-\text{sen}\,\varphi)\cdot(v - \omega_2 \cdot l\cos\varphi) = (\omega_3 \cdot l\cos\varphi)\cdot(-\text{sen}\,\varphi) \\ (\cos\varphi)\cdot(\omega_2 \cdot l\,\text{sen}\,\varphi) = (\omega_1 \cdot l + \omega_3 \cdot l\,\text{sen}\,\varphi)\cdot(\cos\varphi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -v\,\text{sen}\,\varphi + \omega_2 \cdot l\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi = -\omega_3 \cdot l\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi \\ \omega_2 \cdot l\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi = \omega_1 \cdot l\cos\varphi + \omega_3 \cdot l\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

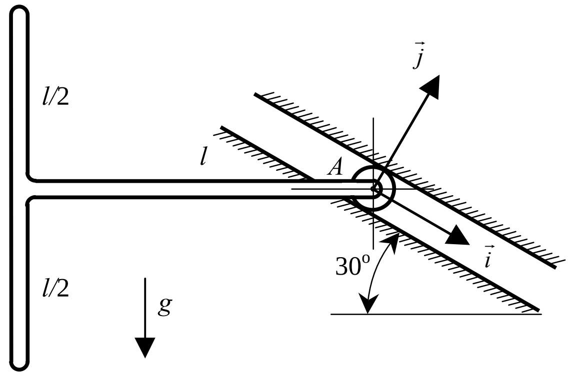
Somando as equações:

$$\Rightarrow \quad -v\,\text{sen}\,\varphi + 2\omega_2 \cdot l\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi = \omega_1 \cdot l\cos\varphi \Rightarrow \omega_2 = \frac{v\,\text{sen}\,\varphi + \omega_1 \cdot l\cos\varphi}{2l\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega}_2 = \frac{v\,\text{sen}\,\varphi + \omega_1 \cdot l\cos\varphi}{2l\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi}\vec{k}}$$

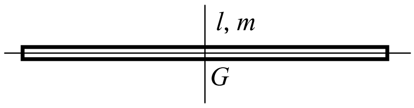
Questão 3 (3,5 pontos) – O corpo de massa *M,* em formato de *T,* é composto de duas barras homogêneas, idênticas, de comprimento *l*, soldadas uma à outra. O corpo move-se apenas no plano vertical, e é solto do repouso na posição mostrada na figura. Desprezando o atrito e a massa do rolete em *A,* determine:

a – O momento de inércia em relação ao baricentro do corpo em forma de *T*.

b – A aceleração do ponto *A* no momento em que o corpo é solto.



Momento de inércia baricêntrico de uma barra de comprimento *l* e massa *m*:



$$J_G = \frac{ml^2}{12}$$

Solução:

Item (a):

Distância do baricentro *G* do corpo em forma de *T* ao ponto *A*:

$$d = \frac{\frac{M}{2}l + \frac{M}{2}\cdot\frac{l}{2}}{\frac{M}{2}+\frac{M}{2}} = \frac{l}{2}+\frac{l}{4} = \frac{3l}{4}$$

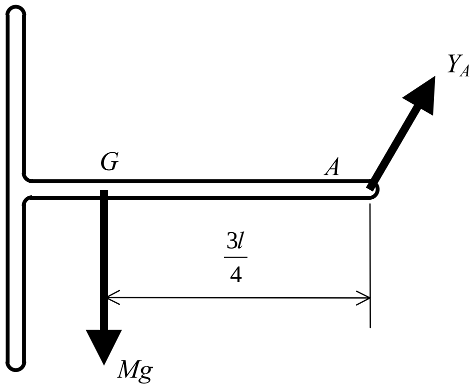
Translação de eixos para momentos de inércia:

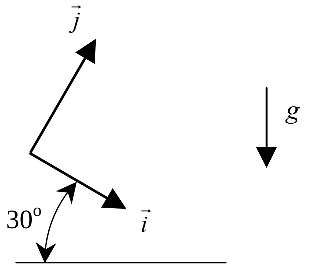
$$J_{Gz} = \frac{M}{2}\cdot\frac{l^2}{12} + \frac{M}{2}\cdot\left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{M}{2}\cdot\frac{l^2}{12} + \frac{M}{2}\cdot\left(\frac{l}{4}\right)^2 = M\cdot\left(\frac{l^2}{12}+\frac{l^2}{16}\right) = M\cdot\left(\frac{4l^2}{48}+\frac{3l^2}{48}\right) \Rightarrow \boxed{J_{Gz} = \frac{7Ml^2}{48}}$$

Item (b):

Diagrama de corpo livre:

Como não há atrito entre o rolete e a guia, no ponto *A* existe apenas a força normal Y_A:





Teorema do movimento do baricentro:

$$M\vec{a}_G = Y_A\,\vec{j} + Mg\,\text{sen}\,30^o\,\vec{i} - Mg\cos 30^o\,\vec{j}$$

$$M\left(a_{Gx}\,\vec{i} + a_{Gy}\,\vec{j}\right) = Y_A\,\vec{j} + Mg\,\text{sen}\,30^o\,\vec{i} - Mg\cos 30^o\,\vec{j}$$

$$Ma_{Gx} = Mg\,\text{sen}\,30^o \quad \Rightarrow \quad a_{Gx} = \frac{g}{2} \qquad (1)$$

$$Ma_{Gy} = Y_A - Mg\cos 30^o \quad \Rightarrow \quad Ma_{Gy} = Y_A - Mg\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

Teorema do momento angular:

$$J_{Gz}\dot{\omega} = Y_A \frac{3l}{4}\cos 30^o \Rightarrow \frac{7Ml^2}{48}\dot{\omega} = Y_A \frac{3l}{4}\cos 30^o \Rightarrow \frac{7Ml}{36}\dot{\omega} = Y_A \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{7\cdot 2\cdot\sqrt{3}Ml}{36\cdot 3}\dot{\omega} = Y_A$$

$$\frac{7\sqrt{3}Ml}{54}\dot{\omega} = Y_A \qquad (3)$$

Relação cinemática e restrição do movimento imposta pelo vínculo (o ponto A pode se mover apenas na direção $\vec{i}$):

$$\vec{a}_A = \vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A-G) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (A-G)] = a_A \vec{i}$$

Observe que no instante em que o corpo é solto do repouso temos $\vec{\omega} = \vec{0}$, portanto: $\vec{a}_G + \dot{\vec{\omega}} \wedge (A-G) = a_A \vec{i}$

$$a_{Gx}\vec{i} + a_{Gy}\vec{j} + \dot{\omega}\vec{k} \wedge \left(\frac{3l}{4}\cos 30^o \vec{i} + \frac{3l}{4}\text{sen}\, 30^o \vec{j}\right) = a_A \vec{i}$$

$$a_{Gx}\vec{i} + a_{Gy}\vec{j} + \dot{\omega}\frac{3l}{4}\cos 30^o \vec{j} - \dot{\omega}\frac{3l}{4}\text{sen}\, 30^o \vec{i} = a_A \vec{i}$$

$$a_{Gx} - \dot{\omega}\frac{3l}{4}\text{sen}\, 30^o = a_A \quad \Rightarrow \quad a_A = a_{Gx} - \dot{\omega}\frac{3l}{8} \qquad (4)$$

$$a_{Gy} + \dot{\omega}\frac{3l}{4}\cos 30^o = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{Gy} + \dot{\omega}\frac{3\sqrt{3}l}{8} = 0 \qquad (5)$$

Usando a equação (3) na equação (2):

$$Ma_{Gy} = Y_A - Mg\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow Ma_{Gy} = \frac{7\sqrt{3}Ml}{54}\dot{\omega} - Mg\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_{Gy} = \frac{7\sqrt{3}l}{54}\dot{\omega} - g\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_{Gy} = \left(\frac{7l}{27}\dot{\omega} - g\right)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Substituindo este resultado na equação (5):

$$a_{Gy} + \dot{\omega}\frac{3\sqrt{3}l}{8} = 0 \Rightarrow \left(\frac{7l}{27}\dot{\omega} - g\right)\frac{\sqrt{3}}{2} + \dot{\omega}\frac{3\sqrt{3}l}{4\cdot 2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{7l}{27}\dot{\omega} - g\right) + \dot{\omega}\frac{3l}{4} = 0 \Rightarrow \left(\frac{7l}{27} + \frac{3l}{4}\right)\dot{\omega} = g$$

$$\left(\frac{7\cdot 4l}{27\cdot 4} + \frac{3\cdot 27l}{4\cdot 27}\right)\dot{\omega} = g \quad \Rightarrow \quad \frac{109l}{108}\dot{\omega} = g \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = \frac{108g}{109l}$$

Substituindo este resultado e a equação (1) na equação (4) obtemos:

$$a_A = a_{Gx} - \dot{\omega}\frac{3l}{8} \quad \Rightarrow \quad a_A = \frac{g}{2} - \frac{108g}{109l}\cdot\frac{3l}{8} \quad \Rightarrow \quad a_A = \frac{g}{2} - \frac{27g}{109}\cdot\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad a_A = \left(\frac{109}{2\cdot 109} - \frac{27}{109}\cdot\frac{3}{2}\right)g \quad \Rightarrow \quad a_A = \left(\frac{109-81}{218}\right)g$$

$$a_A = \frac{28}{218}g \Rightarrow a_A = \frac{14}{109}g$$

$$\boxed{\vec{a}_A = \frac{14}{109}g\,\vec{i}}$$