ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 – Reoferecimento – Primeira Prova – 25 de julho de 2019 – Duração: 110 minutos
(Não é permitido o uso de celulares, *tablets*, calculadoras e dispositivos similares)

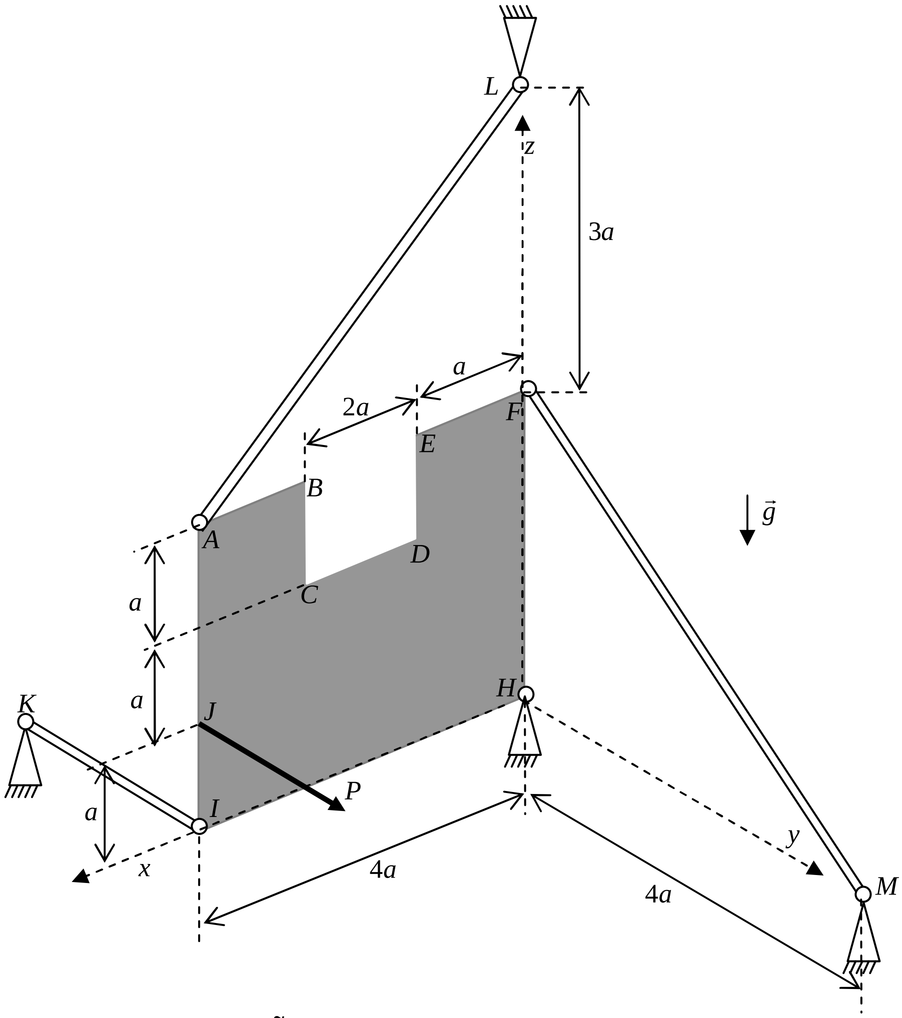
1ª Questão (3,5 pontos). O sistema mecânico ilustrado na figura é constituído pela placa homogênea $ABCDEFHIA$, de peso $2P$, pela barra delgada FM, de peso P, e por duas barras delgadas, AL e KI, ambas de peso desprezível. Ao ponto J da placa $ABCDEFHIA$ aplica-se uma força externa $P\vec{j}$. O conjunto se mantém em equilíbrio graças aos vínculos indicados nos pontos A, F, H, I, K, L e M. Nessas condições, pede-se:

(a) determinar as coordenadas do centro de massa da placa, utilizando o sistema de eixos xyz mostrado na figura;

(b) desenhar os diagramas de corpo livre das barras FM, AL e KI e da placa $ABCDEFHIA$;

(c) determinar a reação na articulação H;

(d) determinar as forças nas barras AL, KI e FM.



RESOLUÇÃO

(a) Centro de massa da placa $ABCDEFHIA$

Como a placa $ABCDEFHIA$ homogênea está situada no plano xz e possui um eixo vertical de simetria axial, resulta:

$y_G = 0$ e $x_G = 2a$.

Para determinar a coordenada x_G da placa homogênea aplicamos o método de composição de centros de massa:

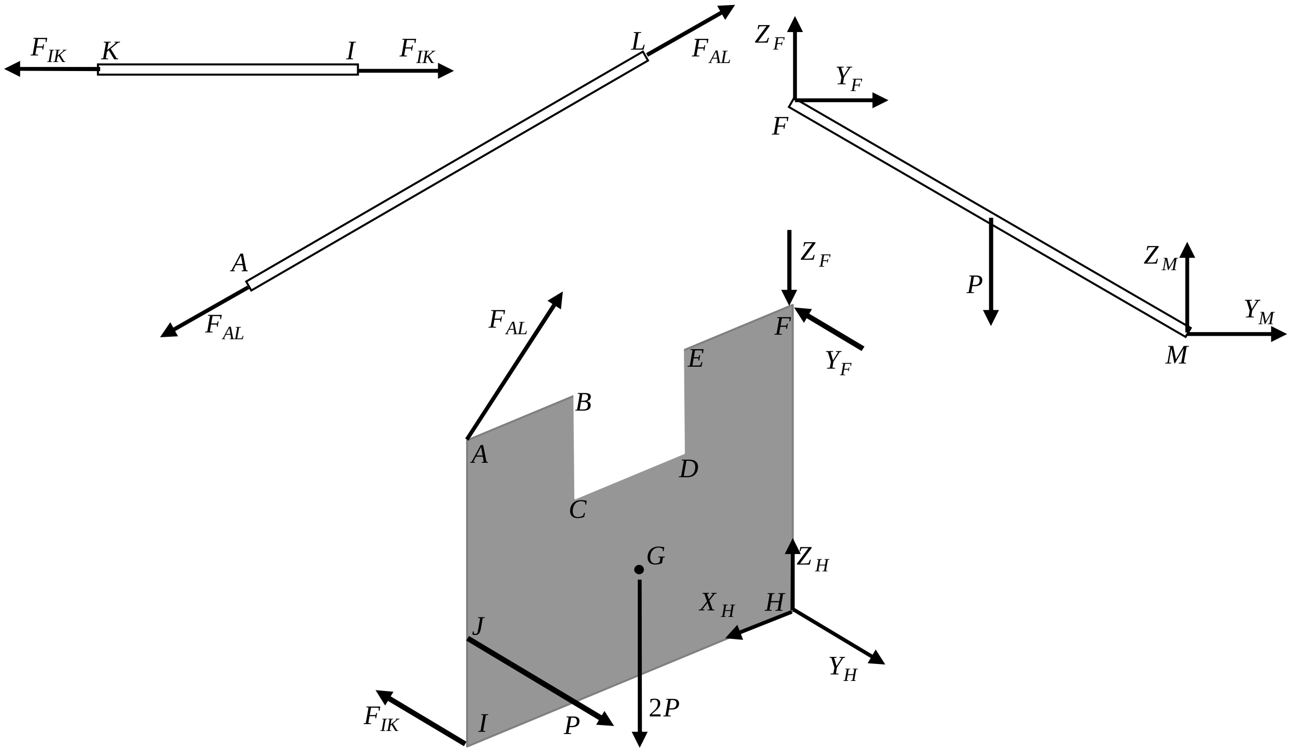
$$x_G = \frac{4a \cdot 3a \cdot \frac{3a}{2} - 2a \cdot a \cdot \left(2a + \frac{a}{2}\right)}{4a \cdot 3a - 2a \cdot a} = \frac{13}{10}a$$

Portanto, o centro de massa da placa se situa no ponto $G = \left(2a, 0, \frac{13}{10}a\right)$

(½ ponto)

(b) Diagramas de corpo livre

Os diagramas de corpo da placa $ABCDEFHIA$ e das barras AL, KI e FM são apresentados na Figura abaixo.



(1½ ponto)

(c) e (d) Reações e forças nas barras

Tomando como referência os diagrams de corpo livre acima, escrevemos as equações de equilíbrio da barra FM e da placa $ABCDEFHIA$.

Para a barra FM tem-se:

$$Y_F + Y_M = 0 \tag{1}$$

$$Z_F + Z_M - P = 0 \tag{2}$$

$$-Z_F \cdot 4a - Y_F \cdot 3a + P \cdot 2a = 0 \Rightarrow 4Z_F + 3Y_F - 2P = 0 \tag{3}$$

Para a placa $ABCDEFHIA$ tem-se:

$$X_H - F_{AL} \cdot \frac{4}{5} = 0 \tag{4}$$

$$Y_H - F_{IK} + P - Y_F = 0 \tag{5}$$

$$Z_H - 2P + F_{AL} \cdot \frac{3}{5} - Z_F = 0 \tag{6}$$

$$\sum \vec{M}_H = \vec{0} \Rightarrow (I-H) \wedge \left(-F_{IK}\vec{j}\right) + (J-H) \wedge P\vec{j} + (G-H) \wedge \left(-2P\vec{k}\right) + (A-H) \wedge \vec{F}_{AL} + (F-H) \wedge \left(-Y_F\vec{j}\right) = \vec{0}$$

Desenvolvendo-se a equação vetorial acima, tem-se:

$$\Rightarrow 4a\vec{i} \wedge \left(-F_{IK}\vec{j}\right) + \left(4a\vec{i} + a\vec{k}\right) \wedge P\vec{j} + \left(2a\vec{i} + \frac{13}{10}a\vec{k}\right) \wedge \left(-2P\vec{k}\right) + \left(4a\vec{i} + 3a\vec{k}\right) \wedge F_{AL}\left(-\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{k}\right) + 3a\vec{k} \wedge \left(-Y_F\vec{j}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow -4F_{IK}\vec{k} + 4P\vec{k} - P\vec{i} + 4P\vec{j} - \frac{12}{5}F_{AL}\vec{j} - \frac{12}{5}F_{AL}\vec{j} + 3Y_F\vec{i} = \vec{0}$$

Desdobrando-se a equação vetorial acima em três equações escalares, obtém-se:

$$-P + 3Y_F = 0 \qquad (7)$$

$$4P - \frac{24}{5}F_{AL} = 0 \qquad (8)$$

$$-4F_{IK} + 4P = 0 \qquad (9)$$

(1 ponto)

Resolvendo-se o sistema de equações (1) a (9), obtém-se as reações e forças solicitadas:

$$X_H = \frac{2}{3}P \quad Y_H = \frac{1}{3}P \quad Z_H = \frac{7}{4}P$$

$$Y_F = \frac{1}{3}P \quad Z_F = \frac{1}{4}P$$

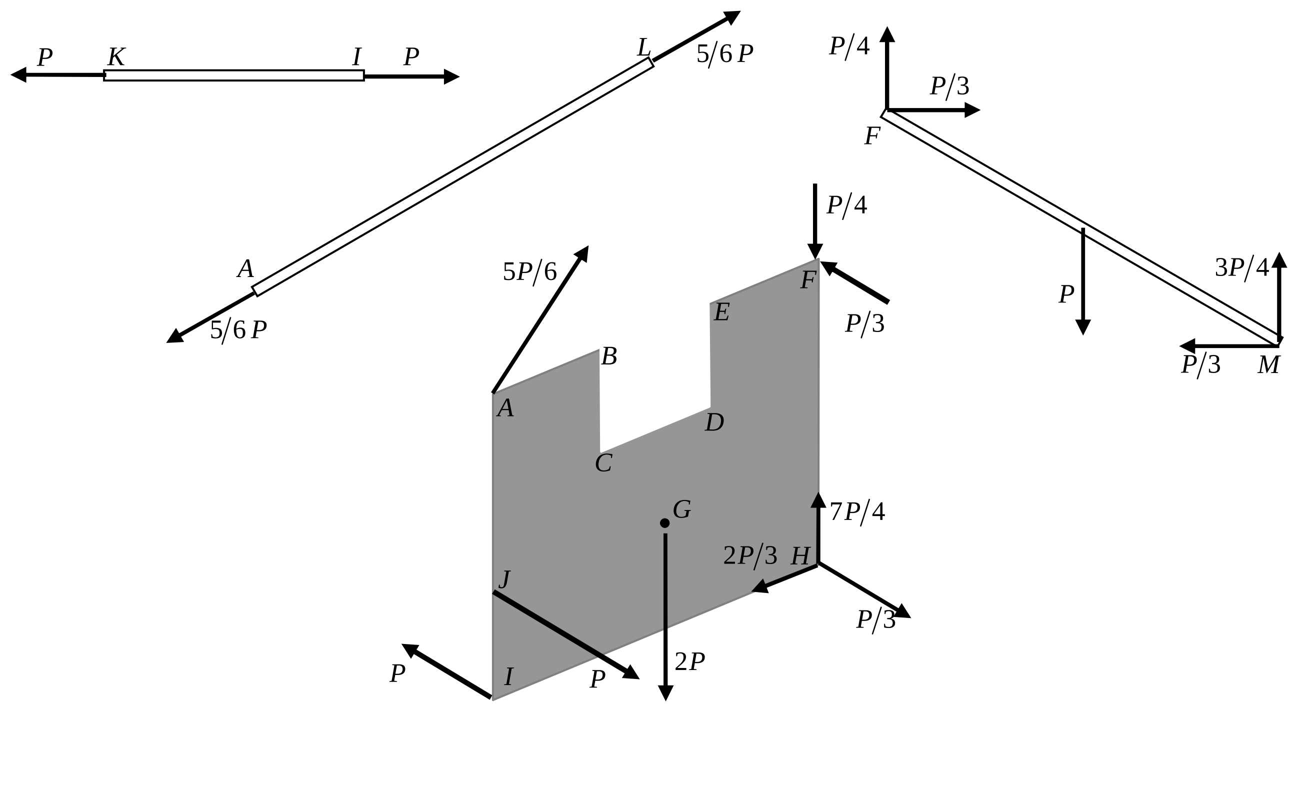
$$Y_M = -\frac{1}{3}P \quad Z_M = \frac{3}{4}P$$

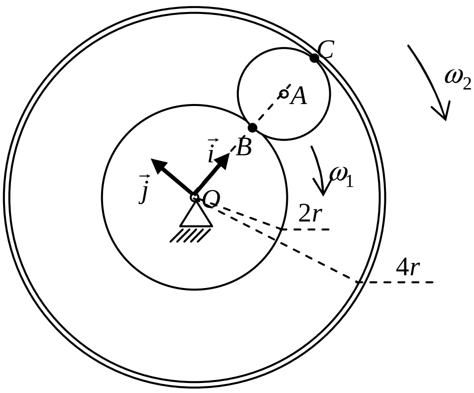
$$F_{AL} = \frac{5}{6}P$$

$$F_{IK} = P$$

(½ ponto)

Na figura abaixo apresentam-se os diagramas de corpo livre da placa $ABCDEFHIA$ e das barras AL, KI e FM com os valores corretos das forças e reações.





2ª Questão (3 pontos). Na figura, o aro de centro fixo O e raio $4r$ gira com velocidade angular ω_2 constante, o disco de centro O e raio $2r$ gira com velocidade ω_1 constante e o disco de centro A e raio r rola sem escorregar em contato com o aro e o disco de raio $2r$. Nestas condições, determinar:

(a) a velocidade angular do disco de centro A;
(b) a aceleração angular do disco de centro A;
(c) a velocidade do ponto A;
(d) a aceleração do centro A;
(e) a posição do CIR do disco de centro A;
(f) a aceleração do ponto B pertencente ao disco de centro A.

RESOLUÇÃO

(a) Velocidade angular do disco de centro A

A velocidade do ponto B do disco de centro O, é:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O - \omega_1\vec{k} \wedge 2r\vec{i} = -2\omega_1 r\vec{j}$$

A velocidade do ponto C do aro, é:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_O - \omega_2\vec{k} \wedge 4r\vec{i} = -4\omega_2 r\vec{j}$$

Como o disco de centro A rola sem escorregar entre o aro e disco de centro O, tem-se:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \omega\vec{k} \wedge (C - A) \Rightarrow -4\omega_2 r\vec{j} = -2\omega_1 r\vec{j} + \omega\vec{k} \wedge 2r\vec{i} = -2\omega_1 r\vec{j} + 2\omega r\vec{j}$$

Portanto, a velocidade angular do disco de centro A é:

$$\vec{\omega} = (\omega_1 - 2\omega_2)\vec{k}$$

(½ ponto)

(b) Aceleração angular do disco de centro A

Como, na expressão acima, as velocidades angulares ω_1 e ω_2 são constantes, resulta que a aceleração angular do disco de centro A é nula:

$$\dot{\omega} = 0$$

(½ ponto)

(c) Velocidade do ponto A

É dada, simplesmente, por:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \omega\vec{k} \wedge (A - B) = -2\omega_1 r\vec{j} + (\omega_1 - 2\omega_2) \wedge \vec{k} r\vec{i} = -2\omega_1 r\vec{j} = -(\omega_1 + 2\omega_2) r\vec{j}$$

(½ ponto)

(d) Aceleração do ponto A

O ponto A descreve um movimento circular uniforme com velocidade de módulo $|\vec{v}_A| = (\omega_1 + 2\omega_2)r$; logo, sua aceleração é centrípeta, com módulo $v_A^2/3r$, ou seja:

$$\vec{a}_A = -\frac{(\omega_1 + 2\omega_2)^2 r}{3}\vec{i}$$

(½ ponto)

(e) Posição do CIR do disco de centro A

Notemos que as velocidades dos pontos A e C do disco têm a mesma direção ($\vec{j}$). Portanto, o CIR do disco de centro A situa-se em algum ponto do eixo $O\vec{i}$, a uma certa distância d do potno A . Portanto, o ponto material I da extensão material do disco coincidente com o CIR é obtido a partir de:

$$\vec{v}_{I\equiv CIR, I\in Disco} = \vec{0} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (I - A) \Rightarrow \vec{0} = -(\omega_1 + 2\omega_2) r\vec{j} + (\omega_1 - 2\omega_2)\vec{k} \wedge d\vec{i} \Rightarrow d = \frac{\omega_1 + 2\omega_2}{\omega_1 - 2\omega_2} r$$

Note que, se $\omega_1 = 2\omega_2$, o disco de centro A realiza movimento de translação curvilínea. Portanto, excluindo-se esse caso, o CIR do disco de centro A situa-se em

$$CIR = \left(\frac{\omega_1 + 2\omega_2}{\omega_1 - 2\omega_2}, 0 \right)$$

(½ ponto)

(f) Aceleração do ponto B pertencente ao disco de centro A

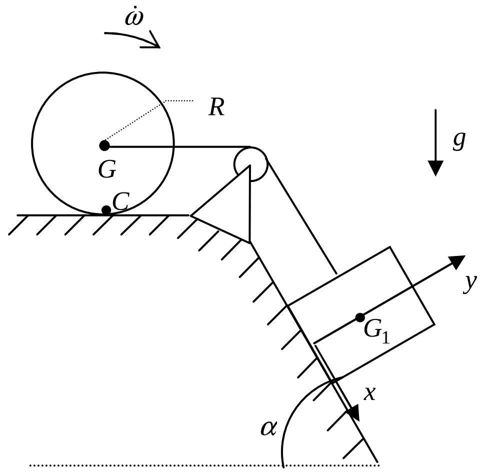
Para determiná-la, aplicamos a fórmula do campo de acelerações, ou seja:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B - A) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (B - A)] = -\frac{(\omega_1 + 2\omega_2)^2 r}{3}\vec{i} + \vec{0} \wedge (-r\vec{i}) + (\omega_1 - 2\omega_2)\vec{k} \wedge [(\omega_1 - 2\omega_2)\vec{k} \wedge (-r\vec{i})] = -\frac{4}{3} r(\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 + 4\omega_2^2)\vec{i}$$

(½ ponto)

3ª Questão (3,5 pontos). O disco de raio R e massa M rola sem escorregar num plano horizontal. Um cabo ideal une, por meio de uma polia de massa desprezível, o centro G do disco a um bloco de massa m que desliza sobre o plano de inclinação α. O coeficiente de atrito entre o bloco e o plano inclinado é μ. Admitindo que o sistema parta do repouso na posição $x = 0$, pede-se:

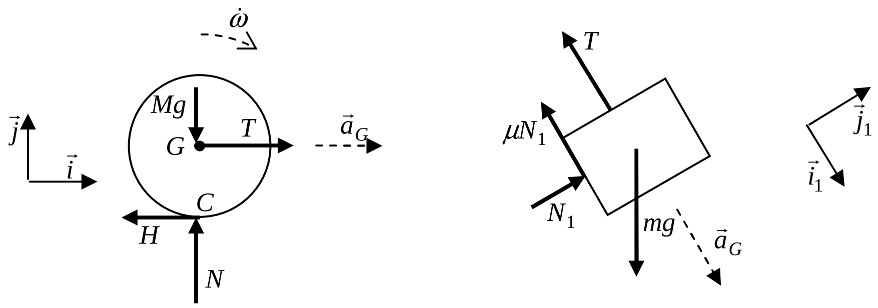
(a) construir os diagramas de corpo livre do disco e do bloco;
(b) identificar as forças que realizam trabalho nulo para o sistema bloco+cabo+disco (justificar);
(c) determinar a aceleração angular do disco em função de x;
(d) determinar o tempo necessário para que o bloco percorra uma distância $x = \ell$.



RESOLUÇÃO

(a) Diagramas de corpo livre

Nas figuras abaixo apresentam-se os diagramas solicitados.



(½ ponto)

(b) Forças que realizam trabalho nulo

São elas:

- Força de peso $-Mg\vec{j}$ do disco: normal à direção do deslocamento
- Força de contato $-H\vec{i} + N\vec{j}$ do disco com a pista horizontal: aplicada, a cada instante, a diferentes pontos, todos com velocidade nula;
- Pares de forças $(T, -T)$: aplicados a pontos de um cabo inextensível, os quais realizam o mesmo deslocamento a cada instante.
- Força normal de contato $N_1\vec{j}_1$: normal à direção do deslocamento.

Portanto, as forças que realizam trabalho efetivo são a força peso do bloco e a força de atrito entre o bloco e o plano inclinado.

(1 ponto)

(c) Aceleração angular do disco

A energia cinética do sistema, em um instante t arbitrário, é dada por:

$$T = T_{Disco} + T_{Bloco} = \frac{1}{2} J_{Cz}\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{G_1}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} MR^2 + MR^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2} m v_G^2 = \frac{3}{4} MR^2\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{G_1}^2 \qquad (1)$$

Como o cabo é inextensível, tem-se:

$$v_{G_1} = \omega R \qquad (2)$$

de modo que

$$T = \frac{3}{4} MR^2\omega^2 + \frac{1}{2} mR^2\omega^2 = \frac{3M + 2m}{4} R^2\omega^2 \qquad (3)$$

O trabalho realizado pelas forças agentes no sistema durante um intervalo de tempo t tal que o bloco se desloque de uma distância x ao longo da rampa e o disco realize um deslocamento angular correspondente, é:

$$\tau_0^t = mg\sin\alpha \cdot x - \mu N_1 \cdot x = (mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)x = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)x \qquad (4)$$

Aplicando-se o Teorema da Energia Cinética, obtém-se:

$$T(t) - T(0) = \tau_0^t \Rightarrow \frac{3M + 2m}{4} R^2\omega^2 = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)x \qquad (5)$$

(½ ponto)

Derivando-se a expressão acima, resulta:

$$\frac{3M + 2m}{2} R^2\omega\dot{\omega} = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\dot{x} = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\omega R \qquad (6)$$

A equação acima fornece as soluções

$\omega = 0$ (trivial) e

$$\dot{\omega} = \frac{2m}{3M + 2m}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{g}{R} \qquad (7)$$

(1 ponto)

(d) Tempo necessário para que o bloco percorra uma distância $x = \ell$

Notando, na equação (7), que a aceleração angular do disco é constante, chega-se à equação diferencial separável

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2m}{3M + 2m}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{g}{R} \qquad (8)$$

que pode ser facilmente integrada:

$$d\omega = \frac{2m}{3M + 2m}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{g}{R}dt \Rightarrow \omega = \frac{2m}{3M + 2m}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{g}{R}t \qquad (9)$$

Mas

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{2m}{3M + 2m}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{g}{R}t \Rightarrow d\theta = \frac{2m}{3M + 2m}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{g}{R}t \qquad (10)$$

Integrando-se a equação diferencial acima, resulta

$$\theta = \frac{2m}{3M + 2m}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{g}{R}\frac{t^2}{2} \quad (11)$$

Como o disco rola sem escorregar, tem-se:

$$x = R\theta \quad (12)$$

de modo que

$$x = \frac{m}{3M + 2m}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)gt^2 \quad (13)$$

Portanto, o tempo requerido para que o bloco se desloque de uma distância $x = \ell$**, é:**

$$t = \sqrt{\frac{(3M + 2m)\cdot\ell}{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} \quad (14)$$

(½ ponto)