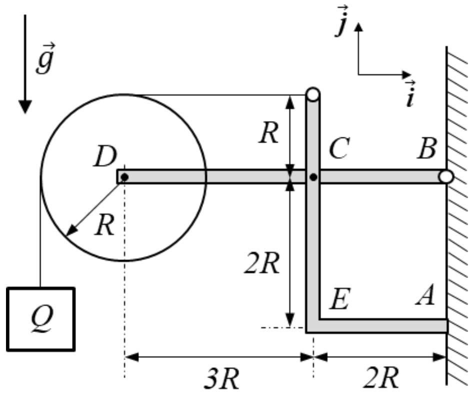
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

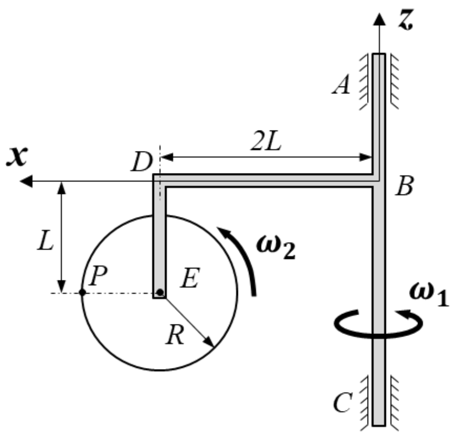
Departamento de Engenharia Mecânica

**MECÂNICA I (Reoferecimento) - PME 3100 – Prova de Recuperação - 26 de julho de 2018**
**Duração da Prova: 110 minutos (não é permitido uso de quaisquer dispositivos eletrônicos)**



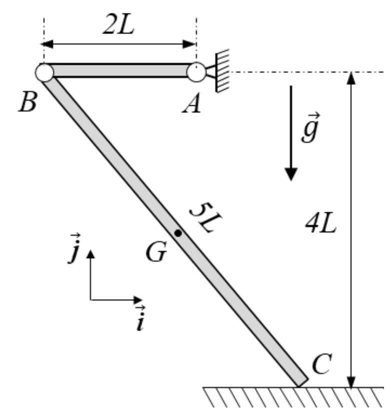

**1ª Questão (3,5 pontos).** Uma polia de centro *D*, raio *R* e peso *P*, é vinculada à extremidade *D* da barra *BCD*. Um bloco de peso *Q* mantém-se em equilíbrio suspenso por um fio ideal apoiado sobre a polia e ligado à barra *AEC*, conforme indicado na figura. As barras *AEC* e *BCD*, ambas de peso desprezível, são ligadas entre si através da articulação *C*. A extremidade *A* da barra *AEC* **apoia-se** em uma parede vertical **rugosa**, ao passo que a extremidade *B* da barra *BCD* é vinculada a essa parede por meio da articulação *B*. Pede-se:

(a) desenhar os diagramas de corpo livre da polia e das barras *BCD* e *AEC*;
(b) determinar os esforços reativos em *A* e em *B*;
(c) determinar o valor mínimo do coeficiente de atrito $\mu_e$ para que o conjunto se mantenha em equilíbrio estático.




**2ª Questão (3,0 pontos).** A peça *ABCDE* gira em torno do eixo vertical *z* com velocidade angular constante $\vec{\omega}_1 = \omega_1\vec{k}$, transportando em sua extremidade *E* um disco de raio *R*, o qual, por sua vez, gira com velocidade angular $\vec{\omega}_2 = \omega_2\vec{j}$ ($\omega_2$ constante) em relação à peça *ABCDE*. Utilizando o sistema de referência *Bxyz*, solidário à peça *ABCDE*, e considerado o instante ilustrado na figura, determine:

(a) o vetor rotação absoluta do disco;
(b) o vetor aceleração rotacional absoluta do disco;
(c) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto *P* do disco;
(d) as acelerações relativa, de arrastamento, de Coriolis e absoluta do ponto *P* do disco.




**3ª Questão (3,5 pontos).** As barras *AB*, de massa *m*, e *BC*, de massa *4m*, são articuladas entre si no ponto *B*, conforme mostrado na figura. A extremidade *A* da barra *AB* é vinculada a uma parede vertical por meio de uma articulação. A extremidade *C* da barra *BC* é apoiada em uma superfície horizontal isenta de atrito. Admitindo que as barras se encontrem inicialmente em repouso na configuração indicada na figura, pede-se, para o instante em que o sistema inicia o seu movimento:

(a) os diagramas de corpo livre das barras *AB* e *BC*;
(b) a relação entre as acelerações angulares $\alpha_{AB}$ e $\alpha_{BC}$ das barras *AB* e *BC*, respectivamente;
(c) a aceleração do centro de massa *G* da barra *BC* em função da aceleração angular $\alpha_{BC}$;
(d) as acelerações angulares $\alpha_{AB}$ e $\alpha_{BC}$ das barras em função dos parâmetros dados;
(e) a reação na extremidade C da barra *BC*.

Dado: $I^z_{Gbarra} = \dfrac{M_{barra} \cdot L^2_{barra}}{12}$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

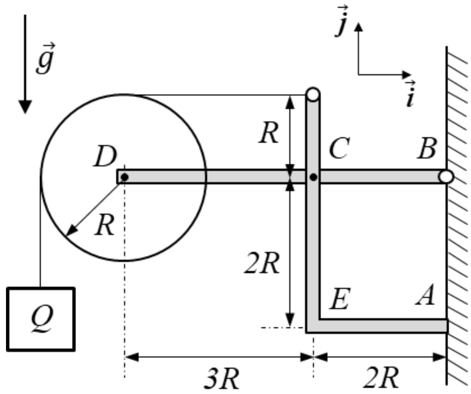
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

# RESOLUÇÃO

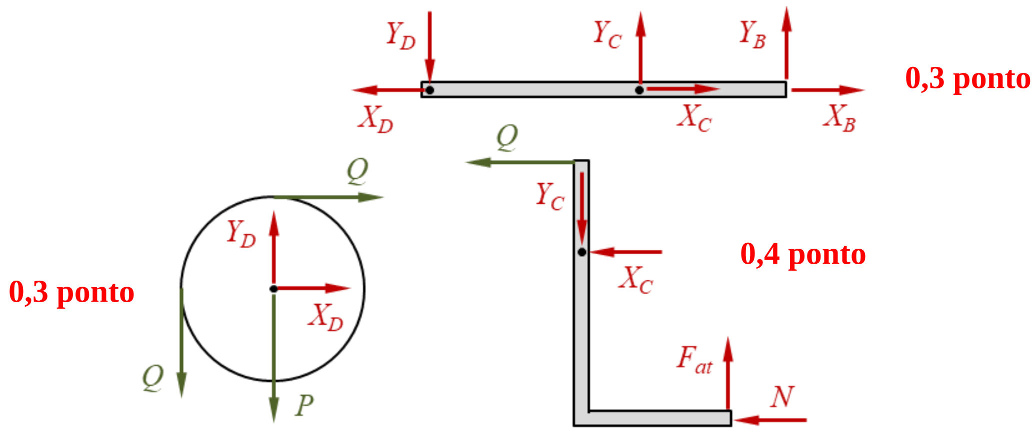
(Versão: 27/07/2018)

**1ª Questão (3,5 pontos).** Uma polia de centro $D$, raio $R$ e peso $P$, é vinculada à extremidade $D$ da barra $BCD$. Um bloco de peso $Q$ mantém-se em equilíbrio suspenso por um fio ideal apoiado sobre a polia e ligado à barra $AEC$, conforme indicado na figura. As barras $AEC$ e $BCD$, ambas de peso desprezível, são ligadas entre si através da articulação $C$. A extremidade $A$ da barra $AEC$ **apoia-se** em uma parede vertical **rugosa**, ao passo que a extremidade $B$ da barra $BCD$ é vinculada a essa parede por meio da articulação $B$. Pede-se:




(a) desenhar os diagramas de corpo livre da polia e das barras $BCD$ e $AEC$;
(b) determinar os esforços reativos em $A$ e em $B$;
(c) determinar o valor mínimo do coeficiente de atrito $\mu_e$ para que o conjunto se mantenha em equilíbrio estático.

(a) desenhar os diagramas de corpo livre da polia e das barras $BCD$ e $AEC$;




(b) determinar os esforços reativos em $A$ e em $B$;

- Equilíbrio da polia:

$$\vec{R} = \vec{0} \;\rightarrow\; \begin{cases} X_D + Q = 0 \\ Y_D - P - Q = 0 \end{cases} \;\rightarrow\; \begin{matrix} X_D = -Q \\ Y_D = P + Q \end{matrix} \qquad \textbf{0,5 ponto} \qquad (1)$$

- Equilíbrio da barra $BCD$:

$$\begin{matrix} \vec{R} = \vec{0} \;\rightarrow\; \begin{cases} -X_D + X_C + X_B = 0 \\ -Y_D + Y_C + Y_B = 0 \end{cases} \\ \vec{M}_D = \vec{0} \;\rightarrow\; \{Y_C.3R + Y_B.5R = 0 \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} X_C + X_B = -Q \\ Y_C + Y_B = P + Q \\ Y_C = -\frac{5}{3}Y_B \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} X_C + X_B = -Q \\ Y_B = -\frac{3}{2}(P+Q) \\ Y_C = \frac{5}{2}(P+Q) \end{matrix} \qquad (2)$$

**0,5 ponto**

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886



- Equilíbrio da peça *AEC*:

$$\vec{R} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} -Q - X_C - N = 0 \\ -Y_C + F_{at} = 0 \end{cases}$$
$$\vec{M}_C = \vec{0} \rightarrow \{QR - N.2R + F_{at}.2R = 0$$
$$\rightarrow \quad X_C = -\frac{(5P+8Q)}{2} \quad F_{at} = \frac{5}{2}(P+Q) \quad N = \frac{(5P+6Q)}{2}$$

**0,5 ponto** (3)

Portanto, as reações em A e B são:

$$\boldsymbol{N = \frac{(5P+6Q)}{2}} \qquad \boldsymbol{X_B = \frac{(5P+6Q)}{2}}$$
$$\boldsymbol{F_{at} = \frac{5}{2}(P+Q)} \qquad \boldsymbol{Y_B = -\frac{3}{2}(P+Q)}$$

**0,5 ponto**

(c) determinar o valor mínimo do coeficiente de atrito $\mu_e$ para que o conjunto se mantenha em equilíbrio estático.

$$|F_{at}| \leq \mu_e |N| \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\mu_e \geq \frac{5(P+Q)}{(5P+6Q)}}$$

**0,5 ponto** (4)

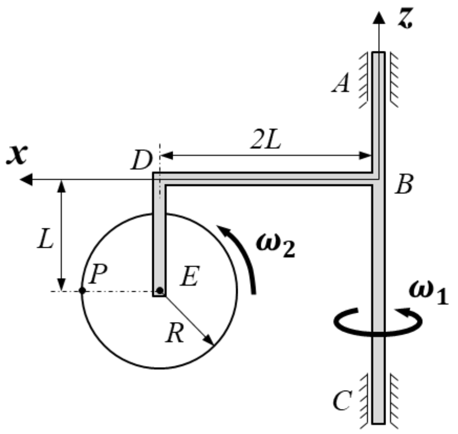
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

**2ª Questão (3,0 pontos).** A peça *ABCDE* gira em torno do eixo vertical $z$ com velocidade angular constante $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$, transportando em sua extremidade $E$ um disco de raio $R$, o qual, por sua vez, gira com velocidade angular $\vec{\omega}_2 = \omega_2 \vec{j}$ ($\omega_2$ constante) em relação à peça *ABCDE*. Utilizando o sistema de referência *Bxyz*, solidário à peça *ABCDE*, e considerado o instante ilustrado na figura, determine:

(a) o vetor rotação absoluta do disco;
(b) o vetor aceleração rotacional absoluta do disco;
(c) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto $P$ do disco;
(d) as acelerações relativa, de arrastamento, de Coriolis e absoluta do ponto $P$ do disco.




(a) vetor rotação absoluta do disco;

$$\vec{v}_P^{abs} = \vec{v}_P^{rel} + \vec{v}_P^{arr} \rightarrow \begin{cases} \vec{v}_P^{rel} = \vec{\omega}_2 \wedge (P-E) \\ \vec{v}_P^{arr} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_1 \wedge (P-B) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\vec{v}_P^{rel} = -\omega_2 R \vec{k}} & \textbf{0,5 ponto} \\ \boldsymbol{\vec{v}_P^{arr} = \omega_1 (2L+R) \vec{j}} & \textbf{0,5 ponto} \\ \boldsymbol{\vec{v}_P^{abs} = \omega_1 (2L+R) \vec{j} - \omega_2 R \vec{k}} & \end{cases} \tag{1}$$

(b) o vetor aceleração rotacional absoluta do disco;

$$\vec{a}_P^{abs} = \vec{a}_P^{rel} + \vec{a}_P^{arr} + \vec{a}_P^{Cor} \rightarrow \begin{cases} \vec{a}_P^{rel} = \vec{\alpha}_2 \wedge (P-E) + \vec{\omega}_2 \wedge [\vec{\omega}_2 \wedge (P-E)] \\ \vec{a}_P^{arr} = \vec{a}_B + \vec{\alpha}_1 \wedge (P-B) + \vec{\omega}_1 \wedge [\vec{\omega}_1 \wedge (P-B)] \\ \vec{a}_P^{Cor} = 2\vec{\omega}_1 \wedge \vec{v}_P^{rel} \end{cases}$$

Como as velocidades angulares da estrutura e do disco possuem módulo constante, $\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2 = \vec{0}$, então:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\vec{a}_P^{rel} = -\omega_2^2 R \vec{i}} & \textbf{0,3 ponto} \\ \boldsymbol{\vec{a}_P^{arr} = -\omega_1^2 (2L+R) \vec{i}} & \textbf{0,3 ponto} \\ \boldsymbol{\vec{a}_P^{Cor} = 2(\omega_1 \vec{k}) \wedge (-\omega_2 R \vec{k}) = \vec{0}} & \textbf{0,4 ponto} \\ \boldsymbol{\vec{a}_P^{abs} = -[\omega_2^2 R + \omega_1^2 (2L+R)] \vec{i}} & \end{cases} \tag{2}$$

(c) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto $P$ do disco;

$$\vec{\omega}^{abs} = \vec{\omega}^{rel} + \vec{\omega}^{arr} \rightarrow \boldsymbol{\vec{\omega}^{abs} = \omega_2 \vec{j} + \omega_1 \vec{k}} \quad \textbf{0,5 ponto} \tag{3}$$

(d) as acelerações relativa, de arrastamento, de Coriolis e absoluta do ponto $P$ do disco.

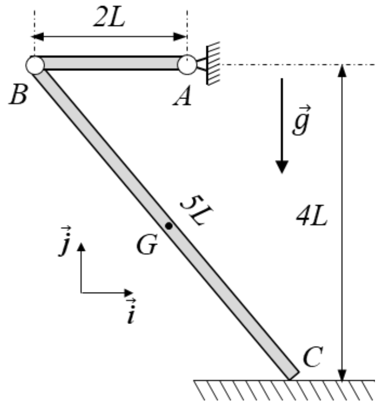
$$\vec{\alpha}^{abs} = \vec{\alpha}^{rel} + \vec{\alpha}^{arr} + \vec{\omega}^{arr} \wedge \vec{\omega}^{rel} \rightarrow \boldsymbol{\vec{\alpha}^{abs} = -\omega_1 \omega_2 \vec{i}} \quad \textbf{0,5 ponto} \tag{4}$$

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

**3ª Questão (3,5 pontos).** As barras *AB*, de massa *m*, e *BC*, de massa *4m*, são articuladas entre si no ponto *B*, conforme mostrado na figura. A extremidade *A* da barra *AB* é vinculada a uma parede vertical por meio de uma articulação. A extremidade *C* da barra *BC* é apoiada em uma superfície horizontal isenta de atrito. Admitindo que as barras se encontrem inicialmente em repouso na configuração indicada na figura, pede-se, para o instante em que o sistema inicia o seu movimento:

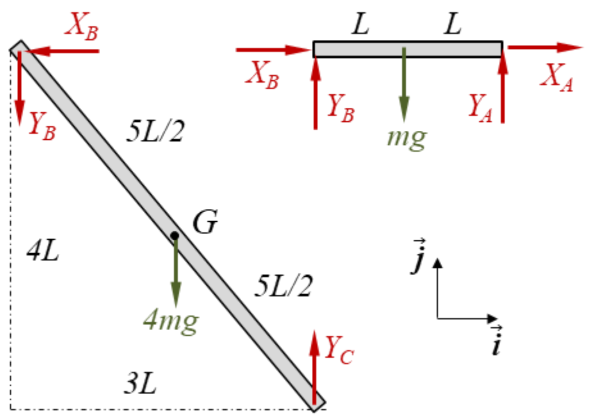



(a) os diagramas de corpo livre das barras *AB* e *BC*;
(b) a relação entre as acelerações angulares $\alpha_{AB}$ e $\alpha_{BC}$ das barras *AB* e *BC*, respectivamente;
(c) a aceleração do centro de massa *G* da barra *BC* em função da aceleração angular $\alpha_{BC}$;
(d) as acelerações angulares $\alpha_{AB}$ e $\alpha_{BC}$ das barras em função dos parâmetros dados;
(e) a reação na extremidade C da barra *BC*.

Dado: $I^z_{Gbarra} = \dfrac{M_{barra} \cdot L^2_{barra}}{12}$

(a) os diagramas de corpo livre das barras *AB* e *BC*;

0,3 ponto




0,3 ponto

(b) a relação entre as acelerações angulares $\alpha_{AB}$ e $\alpha_{BC}$ das barras *AB* e *BC*, respectivamente;

Devido às características geométricas do problema, tem-se:

$$\vec{a}_B = (-2L\alpha_{AB})\vec{j} \quad \text{e} \quad \vec{a}_C = a_C\vec{i} \tag{1}$$

Como o sistema parte do repouso, $\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_{BC} = \vec{0}$, logo as acelerações $\vec{a}_B$ e $\vec{a}_C$ podem ser correlacionadas, como segue:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \alpha_{BC}\vec{k} \wedge (C - B)$$

$$a_C\vec{i} = (-2L\alpha_{AB})\vec{j} + \alpha_{BC}\vec{k} \wedge (3L\vec{i} - 4L\vec{j}) \rightarrow \begin{aligned} a_B &= -3L\alpha_{BC} \\ a_C &= 4L\alpha_{BC} \\ \boldsymbol{\alpha_{AB}} &= \boldsymbol{\tfrac{3}{2}\alpha_{BC}} \end{aligned} \tag{2}$$

**1,0 ponto**

(c) a aceleração do centro de massa *G* da barra *BC* em função da aceleração angular $\alpha_{BC}$;

Novamente, como o sistema parte do repouso, $\vec{\omega}_{AB} = \vec{\omega}_{BC} = \vec{0}$, a aceleração do centro de massa da barra BC pode ser escrita como:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C + \alpha_{BC}\vec{k} \wedge (G - C)$$

$$\vec{a}_G = (4L\alpha_{BC})\vec{i} + \alpha_{BC}\vec{k} \wedge \left(-\frac{3L}{2}\vec{i} + 2L\vec{j}\right) \rightarrow \boldsymbol{\vec{a}_G = \alpha_{BC}L\left(2\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}\right)} \quad \textbf{0,4 ponto} \quad (3)$$

(d-e) as acelerações angulares $\alpha_{AB}$ e $\alpha_{BC}$ das barras em função dos parâmetros dados, e a reação na extremidade C da barra *BC*.

- TQMA para a barra *AB* com respeito ao pólo *A* (movimento plano):

$\vec{M}_A = m(G - A) \wedge \vec{a}_A + (J_A\alpha_{AB})\vec{k}$ ; sendo $\vec{a}_A = \vec{0}$ e $\alpha_{AB} = \frac{3}{2}\alpha_{BC}$ (Eq. 2) , tem-se:

$$(mgL - 2LY_B)\vec{k} = \left(\frac{m4L^2}{12} + mL^2\right)\alpha_{AB}\vec{k} \rightarrow mg - 2Y_B = 2mL\alpha_{BC} \quad \textbf{0,4 ponto} \quad (4)$$

- TQMA para a barra *BC* com respeito ao pólo *G* (movimento plano):

$\vec{M}_G = (J_G\alpha_{BC})\vec{k}$ ; logo:

$$\left(Y_B\frac{3L}{2} + Y_C\frac{3L}{2} + X_B 2L\right)\vec{k} = \left(\frac{4m25L^2}{12}\right)\alpha_{BC}\vec{k} \rightarrow 3(Y_B + Y_C) + 4X_B = \frac{50mL}{3}\alpha_{BC} \quad (5)$$

**0,4 ponto**

- TQM para a barra *BC* (movimento plano):

$$\vec{R} = 4m\vec{a}_G \rightarrow \begin{cases} -X_B = 8mL\alpha_{BC} \\ -Y_B - 4mg + Y_C = -6mL\alpha_{BC} \end{cases} \quad \textbf{0,4 ponto} \quad (6)$$

Portanto, resolvendo o sistema de Eqs. 4-6, tem-se:

$$\boldsymbol{\alpha_{BC} = \frac{45g}{218L}} \;;\; \boldsymbol{\alpha_{AB} = \frac{135g}{436L}} \;;\; \boldsymbol{Y_C = \frac{333mg}{109}} \quad \textbf{0,3 ponto} \quad (7)$$