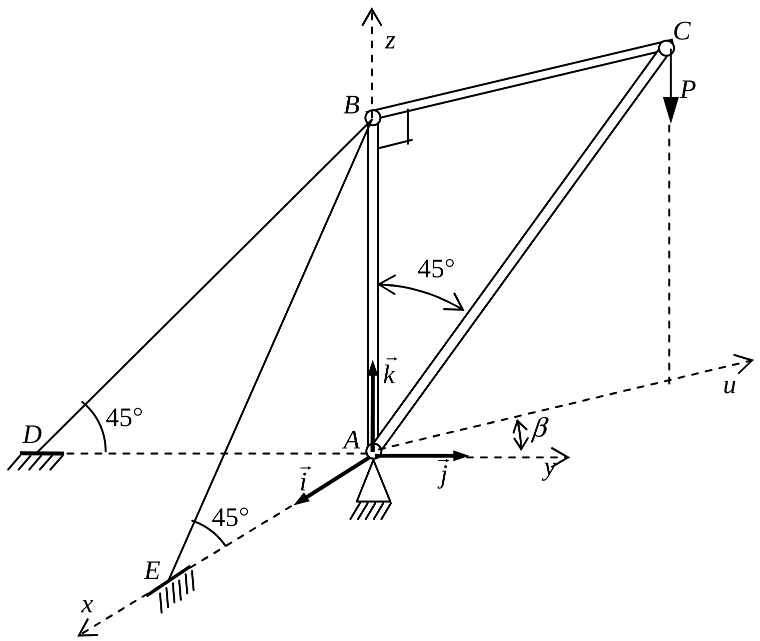
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 –Prova de recuperação – 26 de julho de 2017 - Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido o uso de calculadoras, celulares, *tablets, notebooks* e dispositivos similares)



1ª Questão (3,5 pontos). O quadro *ABC*, com a forma de um triângulo retângulo isósceles, é constituído por três barras articuladas entre si e de peso desprezível. O quadro é articulado em *A* e ligado em *B* a dois cabos *BD* e *BE* inclinados de 45º com a vertical, conforme indicado na figura. O plano *ABC* forma um ângulo β ($0 \leq \beta \leq 90$) conhecido com o plano *yz*. Em *C* aplica-se uma carga vertical *P*. Pede-se:

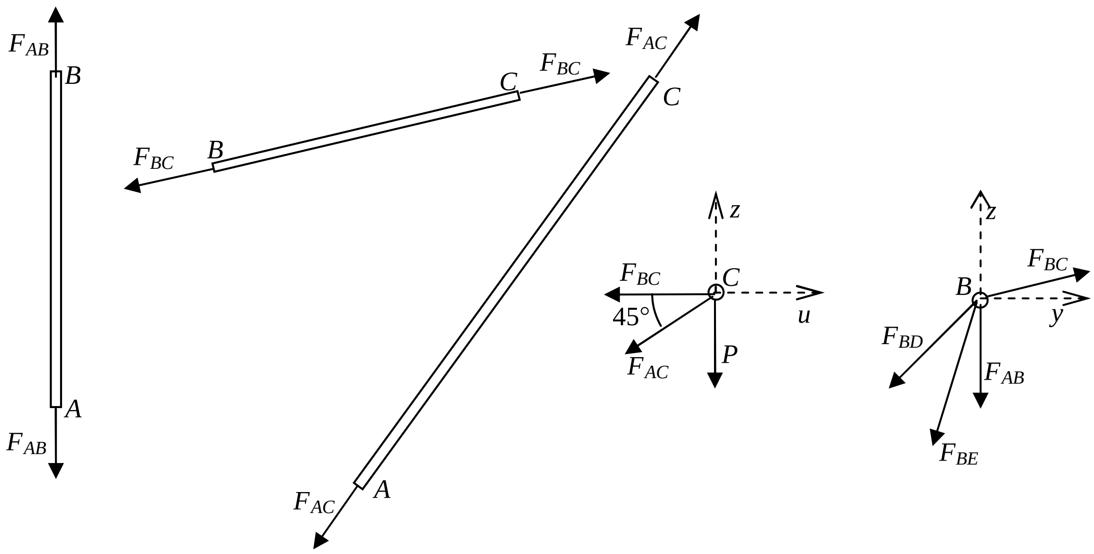
(a) indicar se a estrutura da figura é isostática, hipostática ou hiperestática;
(b) desenhar os diagramas de corpo livre das barras *AB*, *BC* e *AC* e dos nós *B* e *C*.
(c) determinar as trações nos cabos *BD* e *BE* e as forças nas barras *AB*, *BC* e *AC*, indicando se são de tração ou de compressão.

RESOLUÇÃO

A estrutura é hipostática, pois não existem vínculos que a impeçam de girar em torno do eixo z. Por outro lado, as forças nela atuantes não introduzem momentos em torno de z, o que possibilita o equilíbrio.

(½ ponto)

Os diagramas de corpo livre solicitados são apresentados nas figuras abaixo.



(1 ponto)

Escrevendo-se as equações de equilíbrio para o nó *C*, tem-se:

$$\sum F_{ui} = 0 \Rightarrow -F_{BC} - F_{AC}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F_{BC} = -F_{AC}\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$\sum F_{zi} = 0 \Rightarrow -P - F_{AC}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow F_{AC} = -P\sqrt{2} \text{ (comprimida)} \qquad (2)$$

$(1) e (2) \Rightarrow F_{BC} = P$ (tracionada) **(½ponto)**

Considerando-se agora o equilíbrio do nó *B*, temos as seguintes forças atuantes:

- $\vec{F}_{BD} = -F_{BD}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{j} + \vec{k}\right)$ (3)
- $\vec{F}_{BE} = F_{BE}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} - \vec{k}\right)$ (4)
- $\vec{F}_{BC} = F_{BC}\cos\beta\vec{j} - F_{BC}\sin\beta\vec{i} = P\cos\beta\vec{j} - P\sin\beta\vec{i}$ (5)
- $\vec{F}_{AB} = -F_{AB}\vec{k}$ (6)

Escrevendo-se a equação vetorial de equilíbrio do nó *B*, tem-se:

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{BD} + \vec{F}_{BE} + \vec{F}_{BC} + \vec{F}_{AB} = \vec{0} \Rightarrow -F_{BD}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{j} + \vec{k}\right) + F_{BE}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} - \vec{k}\right) + P\left(\cos\beta\vec{j} - \sin\beta\vec{i}\right) - F_{AB}\vec{k} = \vec{0}$$

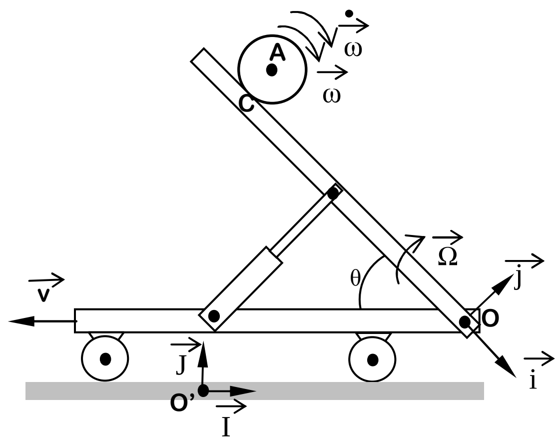
A resolução do correspondente sistema de equações escalares permite determinar as incógnitas remanescentes do problema:

- $F_{BE}\frac{\sqrt{2}}{2} - P\sin\beta = 0 \Rightarrow F_{BE} = P\sqrt{2}\sin\beta$ **(½ponto)**
- $-F_{BD}\frac{\sqrt{2}}{2} + P\cos\beta = 0 \Rightarrow F_{BD} = P\sqrt{2}\cos\beta$ **(½ponto)**
- $-F_{BD}\frac{\sqrt{2}}{2} - F_{BE}\frac{\sqrt{2}}{2} - F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = -P(\sin\beta + \cos\beta)$ (comprimida) **(½ponto)**

	ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
	Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 –Prova de recuperação – 26 de julho de 2017 - Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido o uso de calculadoras, celulares, *tablets, notebooks* e dispositivos similares)

2ª Questão (3,0 pontos). A plataforma de transporte ao lado desloca-se com velocidade constante $\vec{v}$ em relação ao referencial fixo $O'\vec{I}\vec{J}\vec{K}$. Um atuador hidráulico faz com que a rampa inclinada seja erguida com velocidade angular $\vec{\Omega}$ de módulo constante. Um cilindro de centro *A* e raio *R* rola sem escorregar sobre a rampa inclinada, tendo *C* como ponto de contato. O cilindro possui, no instante mostrado, velocidade angular $\vec{\omega}$ e aceleração angular $\dot{\vec{\omega}}$ em relação à rampa. No mesmo instante, o ângulo entre a rampa inclinada e a horizontal é θ=45º e a distância entre os pontos *C* e *O* é *d*. Pede-se, descrevendo os resultados no sistema $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, solidário à rampa inclinada:



(a) as velocidades relativa, de arrastamento e absoluta do ponto *A*;
(b) as acelerações relativa, de arrastamento, complementar e absoluda do do ponto *A*;
(c) os vetores rotação e aceleração angular absolutos do cilindro de centro *A*.

RESOLUÇÃO

Para um observador solidário à rampa, o ponto *C* do cilindro tem velocidade nula, já que este realiza movimento de rolamento puro sobre a rampa. Dessa forma, tem-se:

$$\vec{v}_{rA} = \vec{v}_{rC} + \left(-\omega\vec{k}\right)\wedge R\vec{j} = \omega R\vec{i}$$ **(½ ponto)**

A velocidade de arrastamento do ponto *A* do cilindro, é:

$$\vec{v}_{aA} = \vec{v}_O + \left(-\Omega\vec{k}\right)\wedge(A-O) = -v\vec{I} - \Omega\vec{k}\wedge\left(-d\vec{i} + R\vec{j}\right) = -v\vec{I} + \Omega R\vec{i} + \Omega d\vec{j} = -v\left[\left(\vec{I}.\vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{I}.\vec{j}\right)\vec{j}\right] + \Omega R\vec{i} + \Omega d\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{aA} = -v\left[\cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}\right] + \Omega R\vec{i} + \Omega d\vec{j} = \left(\Omega R - v\cos\theta\right)\vec{i} + \left(\Omega d - v\sin\theta\right)\vec{j} = \left(\Omega R - v\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + \left(\Omega d - v\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}$$ **(½ponto)**

Portanto, a velocidade absoluta de *A*, é:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{rA} + \vec{v}_{aA} = \omega R\vec{i} + \left(\Omega R - v\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + \left(\Omega d - v\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j} = \left(\omega R + \Omega R - v\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + \left(\Omega d - v\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j}$$

Como o centro *A* do cilindro realiza movimento retilíneo, a sua aceleração relativa ao referencial $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ móvel, é:

$$\vec{a}_{rA} = \dot{\vec{v}}_{rA} = \dot{\omega}R\vec{i}$$ **(½ponto)**

A aceleração de arrastamento de *A*, é:

$$\vec{a}_{aA} = \vec{a}_{aO} + \dot{\vec{\Omega}}\wedge(A-O) + \vec{\Omega}\wedge\left[\vec{\Omega}(A-O)\right] = \vec{0} + \vec{0}\wedge(A-O) - \Omega\vec{k}\wedge\left[-\Omega\vec{k}\wedge\left(-d\vec{i} + Rj\right)\right] = \Omega^2\left(d\vec{i} - R\vec{j}\right)$$

(½ponto)

A aceleração complementar de *A* é:

$$\vec{a}_{cA} = 2\vec{\omega}_a\wedge\vec{v}_{rA} = 2\left(-\Omega\vec{k}\right)\wedge\left(\omega R\vec{i}\right) = -2\Omega\omega R\vec{j}$$ **(½ponto)**

	ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
	Departamento de Engenharia Mecânica

PME 3100 – MECÂNICA 1 –Prova de recuperação – 26 de julho de 2017 - Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido o uso de calculadoras, celulares, *tablets*, *notebooks* e dispositivos similares)

A aceleração absoluta de *A*, é:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{rA} + \vec{a}_{aA} + \vec{a}_{cA} = \dot{\omega} R\vec{i} + \Omega^2 \left(d\vec{i} - R\vec{j} \right) - 2\Omega\omega R\vec{j} = \left(\dot{\omega} R + \Omega^2 \right)\vec{i} - \left(\Omega^2 + 2\Omega\omega \right) R\vec{j}$$

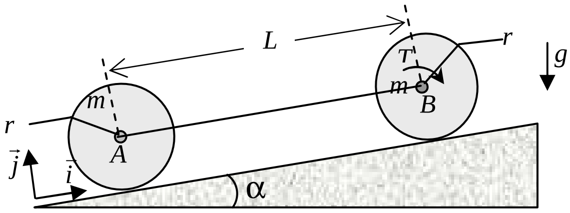
O vetor rotação absoluta do disco, é:

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_a = -\left(\omega + \Omega \right)\vec{k}$$

O vetor aceleração rotacional absoluta do disco, é:

$$\dot{\vec{\omega}}_{abs} = \dot{\vec{\omega}}_r + \dot{\vec{\omega}}_a + \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r = -\dot{\omega}\vec{k}$$ **(½ponto)**

PME 3100 – MECÂNICA 1 –Prova de recuperação – 26 de julho de 2017 - Duração da Prova: 110 minutos
(não é permitido o uso de calculadoras, celulares, *tablets, notebooks* e dispositivos similares)

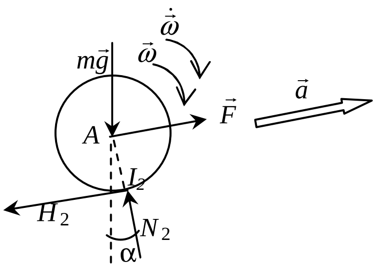


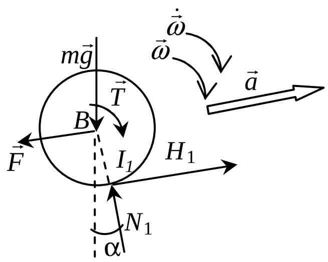
3ª Questão (3,5 pontos). Dois cilindros iguais de raio r e massa m, interligados por meio de articulações a um cabo inextensível AB de comprimento L e massa desprezível, sobem uma rampa de inclinação α sob a ação de um torque T aplicado ao cilindro dianteiro. Admitindo-se que ambos os cilindros rolem sem escorregar e que o coeficiente de atrito entre eles e a rampa seja μ, pede-se:

a. desenhar os diagramas de corpo livre dos dois cilindros;
b. calcular a aceleração angular dos cilindros;
c. calcular a força de tração no cabo;
d. determinar o máximo valor do torque aplicado em B para que não ocorra escorregamento do cilindro dianteiro.

RESOLUÇÃO

Ambos os cilindros realizam movimento de rolamento puro. O cilindro traseiro movimenta-se sob a ação da força peso, da força de contato $-H_2\vec{i}+N_2\vec{j}$ e da força $F\vec{i}$ transmitida pela barra; o cilindro dianteiro move-se sob a ação da força peso, da força de contacto $H_1\vec{i}+N_1\vec{j}$, do torque $-T\vec{k}$ aplicado ao eixo e da força $-F\vec{i}$ transmitida pela barra.





(1 ponto)

Aplicando-se ao cilindro traseiro o *TMB* e o *TQMA* (pólo I_2), tem-se:

$$F - H_2 - mg\sin\alpha = ma \qquad \text{(Eq.1)}$$

$$N_2 - mg\cos\alpha = 0 \qquad \text{(Eq.2)}$$

$$mgr\sin\alpha - Fr = J_{I_2z}\dot{\omega} = \left(\frac{1}{2}mr^2 + mr^2\right)(-\dot{\omega}) = -\frac{3}{2}mr^2\dot{\omega} \qquad \text{(Eq.3)}$$

Aplicando-se ao cilindro dianteiro o *TMB* e o *TQMA* (pólo I_1), tem-se:

$$H_1 - F - mg\sin\alpha = ma \qquad \text{(Eq.4)}$$

$$N_1 - mg\cos\alpha = 0 \qquad \text{(Eq.5)}$$

$$Fr + mgr\sin\alpha - T = J_{I_2z}(-\dot{\omega}) = -\frac{3}{2}mr^2\dot{\omega} \qquad \text{(Eq.6)}$$

(½ponto)

Como ambos os cilindros realizam movimento de rolamento puro, tem-se:

$$a = \dot{\omega}r \qquad \text{(Eq.7)}$$

(½ ponto)

Somando-se as equações (3) e (6), obtém-se:

$$2mgr\sin\alpha - T = -3mr^2\dot{\omega}$$

$$\therefore\ \dot{\omega} = \frac{T - 2mgr\ \sin\ \alpha}{3mr^2} \qquad \text{(Eq.8)}$$

(½ ponto)

Substituindo-se (8) em (3), obtém-se:

$$F = mg\sin\alpha + \frac{3}{2}mr\dot{\omega} = mg\sin\alpha + \frac{1}{2r}\left(T - 2mgr\sin\alpha\right)$$

$$\therefore F = \frac{T}{2r} \qquad \text{(Eq.9)}$$

(½ponto)

Substituindo-se (7) e (9) em (4), obtém-se:

$$H_1 = \frac{T}{2r} + mg\sin\alpha + \frac{T - 2mgr\sin\alpha}{3r}$$

$$\therefore H_1 = \frac{5T}{6r} + \frac{mg\sin\alpha}{3} \qquad \text{(Eq.10)}$$

Para que não ocorra deslizamento do cilindro dianteiro, deve-se ter:

$$H_1 = \frac{5T}{6r} + \frac{mg\sin\alpha}{3} \le \mu N_1 = \mu mg\cos\alpha$$

$$\therefore\ T \le \frac{2}{5}\left(3\mu\cos\alpha - \sin\alpha\right)mrg \qquad \text{(Eq.11)}$$

(½ ponto)