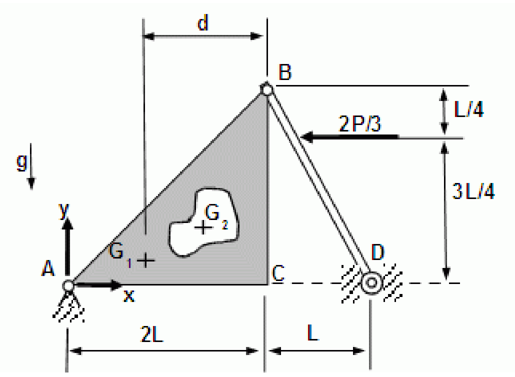
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Avenida Professor Mello Moraes, nº 2231. cep 05508-900, São Paulo, SP.
Telefone: (0xx11) 3091 5337 Fax: (0xx11) 3813 1886

Departamento de Engenharia Mecânica

PME2100 – REOFERECIMENTO – PROVA DE RECUPERAÇÃO

QUESTÃO 1 (3 pontos): Uma estrutura em equilíbrio é composta pela placa furada *ABC* de peso *P* e por uma barra *BD* de massa desprezível. Nos pontos *A* e *B* da placa existem articulações; no ponto *D* há um anel. A articulação em *A* é fixa ao solo. A barra *BD* é submetida à força de módulo **2P/3** conforme mostrado na figura. O centro de massa G_1 da placa furada dista ***d*** da aresta *BC*. Pedem-se:



(a) os diagramas de corpo livre da barra e da placa;

(b) o valor de ***d***;

(c) supondo-se que a placa seja homogênea, que sua massa inicial era **3m** e que a massa de material retirado foi ***m***, determine a abcissa do centro de massa G_2 do material retirado, em relação ao sistema de coordenadas mostrado;

(d) as reações nos vínculos *A*, *B* e *D*;

SOLUÇÃO

Os diagramas de corpo livre da placa e da barra são apresentados nas figuras 1-1 e 1-2 abaixo.

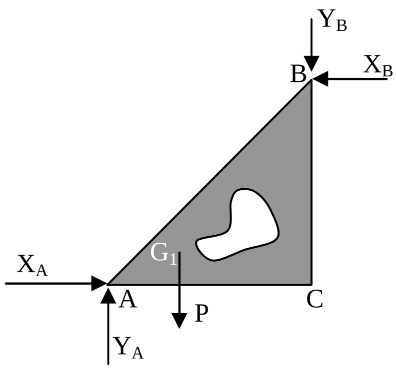


Figura 1.1. D.C.L. da placa *ABC*.

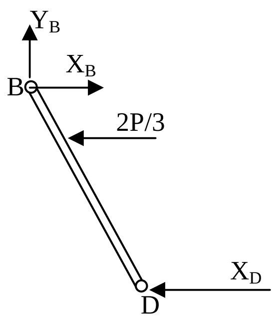


Figura 1-2. D.C.L. da barra *BD*. **(a)**

Como a estrutura está em equilíbrio, tem-se:

$$\sum M_{Az} = 0 \Rightarrow -\frac{2P}{3}\times\frac{3\ell}{4} + (2\ell - d) = 0 \Rightarrow d = \frac{3\ell}{2} \qquad \textbf{(b)}$$

A abcissa do baricentro do material retirado pode ser determinada considerando-se a composição de baricentros da 'placa sem furos' e da 'placa furada', ou seja:

$$(3m - m)\times\frac{\ell}{2} = 3m\times\frac{2\ell}{3} - m\times X_{G2} \Rightarrow X_{G2} = \ell \qquad \textbf{(c)}$$

Notando que a barra *BD* está em equilíbrio sob a ação de 3 forças e que duas delas são paralelas (a força externa 2P/3 e a reação vincular X_D imposta pelo anel D), a reação em B será, necessariamente paralela, ou seja:

$$Y_B = 0 \qquad \textbf{(d-1)}$$

As equações de equilíbrio para a barra *BD* relativas aos eixos *x* e *z*, fornecem:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_B - X_D - \frac{2P}{3} = 0$$

$$\sum M_{Dz} = 0 \Rightarrow \frac{2P}{3} \times \frac{3\ell}{4} - X_B \times \ell = 0 \Rightarrow X_B = \frac{P}{2} \qquad \textbf{(d-2)}$$

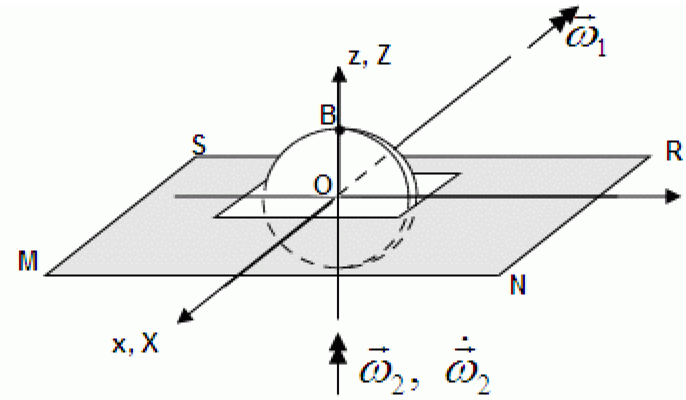
$$\Rightarrow X_D = \frac{P}{2} - \frac{2P}{3} = -\frac{P}{6} \qquad \textbf{(d-3)}$$

As equações de equilíbrio para a placa *ABC* relativas aos eixos *x* e *y*, fornecem:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow X_A - X_B = 0 \Rightarrow X_A = \frac{P}{2} \qquad \textbf{(d-4)}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow Y_A - P = 0 \Rightarrow Y_A = P \qquad \textbf{(d-5)}$$

QUESTÃO 2 (3,5 pontos): O disco de centro ***O*** e raio ***r*** gira em torno do eixo ***Ox*** com rotação de módulo constante ω_1. O eixo ***Ox*** é fixado na placa *MNRS* que, por sua vez, possui rotação $\vec{\omega}_2$ e aceleração rotacional $\dot{\vec{\omega}}_2$. O sistema de referência *Oxyz* é solidário à placa *MNRS*; o sistema de referência *OXYZ* é fixo (inercial) e, no instante mostrado, seus eixos coincidem com os do sistema *Oxyz*. Nessas condições pedem-se:



(a) o vetor rotação absoluta $\vec{\Omega}$ do disco;
(b) a velocidade absoluta do ponto *B* do disco, identificando suas componentes;
(c) o vetor aceleração angular absoluta $\dot{\vec{\Omega}}$ do disco;
(d) a aceleração absoluta do ponto *B* do disco, identificando suas componentes;

SOLUÇÃO

O vetor rotação instantânea do disco de centro *O* é dado por:

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega}_{arr} + \vec{\omega}_{rel} = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1 = \omega_2 \vec{k} - \omega_1 \vec{i} \qquad \textbf{(a)}$$

A velocidade absoluta do ponto *B* do disco é dada por:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge (B - O) = \vec{0} + \left(\omega_2 \vec{k} - \omega_1 \vec{i}\right) \wedge r\vec{k} = \omega_1 r \vec{j} \qquad \textbf{(b-1)}$$

Logo, a velocidade relativa do ponto *B*, identificada com o vetor rotação relativa $\vec{\omega}_1$, é

$$\vec{v}_{Brel} = \omega_1 r \vec{j} \qquad \textbf{(b-2)}$$

e a velocidade de arrastamento do ponto *B*, identificada com o vetor rotação de arrastamento $\vec{\omega}_2$, é

$$\vec{v}_{Barr} = \vec{0} \qquad \textbf{(b-3)}$$

O vetor aceleração angular absoluta do disco, é dado por:

$$\dot{\Omega} = \dot{\vec{\omega}}_{rel} + \dot{\vec{\omega}}_{arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel} = \vec{0} + \dot{\omega}_2 \vec{k} + \omega_2 \vec{k} \wedge \left(-\omega_1 \vec{i}\right) = -\omega_1 \omega_2 \vec{j} + \dot{\omega}_2 \vec{k} \qquad \textbf{(c)}$$

A aceleração absoluta do ponto B do disco, é dada por:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + \dot{\vec{\Omega}} \wedge (B - O) + \vec{\Omega} \wedge \left[\vec{\Omega} \wedge (B - O)\right] = \vec{0} + \left(-\omega_1\omega_2\vec{j} + \dot{\omega}_2\vec{k}\right) \wedge r\vec{k} + \left(\omega_2\vec{k} - \omega_1\vec{i}\right) \wedge \left[\left(\omega_2\vec{k} - \omega_1\vec{i}\right) \wedge r\vec{k}\right]$$

Desenvolvendo-se a expressão acima, obtém-se:

$$\vec{a}_B = -2\omega_1\omega_2 r\vec{i} - \omega_1^2 r\vec{k} \qquad \textbf{(d-1)}$$

Analisando-se a expressão da aceleração absoluta do ponto B, constatamos que:

- a aceleração relativa, associada aos vetores rotação e aceleração angular relativas (respectivamente, $\vec{\omega}_1$ e $\dot{\vec{\omega}}_1$, é dada por

$$\vec{a}_{Brel} = -\omega_1^2 r\vec{k} \qquad \textbf{(d-2)}$$

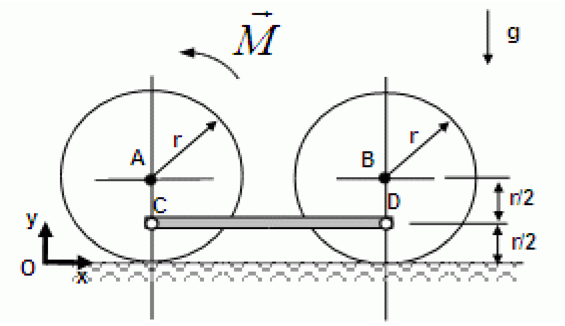
- a aceleração de arrastamento, associada aos vetores rotação e aceleração angular de arrastamento ($\vec{\omega}_2$ e $\dot{\vec{\omega}}_2$), é

$$\vec{a}_{Barr} = \vec{0} \qquad \textbf{(d-3)}$$

- a aceleração de Coriolis, termo remanescente da expressão da aceleração absoluta de B, é:

$$\vec{a}_{Bc} = -2\omega_1\omega_2 r\vec{i} \qquad \textbf{(d-4)}$$

QUESTÃO 3 (3,5 pontos): Dois discos ***A*** e ***B***, homogêneos e de massa ***m*** cada um estão ligados por meio de uma barra ***CD*** de massa desprezível articulada em ***C*** e ***D***. Um binário de módulo ***M*** constante é aplicado ao disco de centro ***A***. Sabe-se que os discos rolam sem escorregar sobre o plano horizontal. No instante mostrado, a barra ***CD*** está paralela ao plano horizontal. Nestas condições pedem-se:



(a) os diagramas de corpo livre dos discos e da barra;

(b) a aceleração do centro de massa de cada disco;

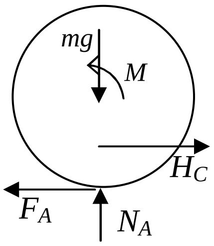
(c) determinar a força que age na barra, identificando se de tração ou compressão.

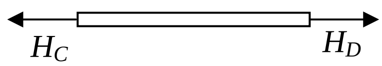
(d) os valores mínimos dos coeficientes de atrito μ_1 e μ_2 para cada disco, compatíveis com o movimento de rolamento sem escorregamento;

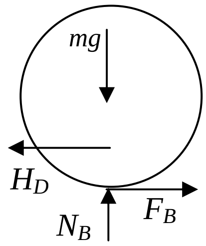
Dado: Para um disco homogêneo de raio r, $\mathbf{J_{Gz}=mr^2/2}$

SOLUÇÃO

Os diagramas de corpo livre dos discos e da barra são apresentados nas figuras 3-1, 3-2 e 3-3 abaixo:







Item a

Figura 3-1: D.C.L do disco de centro *A*. Figura 3-2: D.C.L. da barra *CD*. Figura 3-3: D.C.L. do disco de centro *B*.

Aplicando-se o *TMB* e o *TMA* ao disco de centro *A*, obtêm-se:

$$F_A - H_C = ma \tag{1}$$

$$N_A = mg \tag{2}$$

$$J_{Az}\dot{\omega} = M - F_A r + H_C \frac{r}{2} \tag{3}$$

Como ambos os discos têm o mesmo raio e rolam sem escorregar, a aceleração de seus baricentros é dada por:

$$a = \dot{\omega} r \tag{4}$$

onde $\dot{\omega}$ é a aceleração angular (incógnita) dos discos.

Aplicando-se o *TMB* e o *TMA* ao disco de centro *B*, obtêm-se:

$$H_D - F_B = ma = m\dot{\omega} r \tag{5}$$

$$N_D = mg \tag{6}$$

$$J_{Bz}\dot{\omega} = F_B r - H_D \frac{r}{2} \tag{7}$$

Aplicando-se o *TMB* à barra *CD* e lembrando que esta possui massa desprezível, resulta que:

$$H_C = H_D \tag{8}$$

Da equação (3), decorre que

$$H_C = \frac{2}{r}\left(J_{Az}\dot{\omega} - M + F_A r\right)$$

e da equação (7), decorre que

$$H_D = \frac{2}{r}\left(F_B r - J_{Bz}\dot{\omega}\right)$$

Igualando-se as expressões acima, resulta:

$$J_{Az}\dot{\omega} + J_{Bz}\dot{\omega} - M + \left(F_A - F_B\right)r = 0 \tag{9}$$

Das equações (1) e (5), resultam:

$$H_C = F_A - m\dot{\omega} r \tag{10}$$

$$H_D = m\dot{\omega} r + F_B \tag{11}$$

Igualando-se as expressões acima, resulta:

$$F_A - F_B = 2m\dot{\omega} r \tag{12}$$

Substituindo-se a expressão acima em (9), obtém-se:

$$\left(J_{Az} + J_{Bz}\right)\dot{\omega} - M + r\left(2m\dot{\omega} r\right) = 0 \tag{13}$$

Substituindo-se as expressões de J_{Az} e J_{Bz} acima, obtém-se $\dot{\omega}$:

$$\dot{\omega} = \frac{M}{3mr^2} \tag{14}$$

Logo, a aceleração dos baricentros dos discos, é dada por:

$$a = \dot{\omega} r = \frac{M}{3mr} \tag{15}$$

Item <u>b</u>

A partir de (8), (10) e (11), obtém-se:

$$H_C = m\dot{\omega}r + F_B \qquad (16)$$

Substituindo-se (16) em (9), obtém-se:

$$\left(J_{Bz} + \frac{mr^2}{2}\right)\dot{\omega} = F_B \frac{r}{2} \Rightarrow \left(\frac{mr^2}{2} + \frac{mr^2}{2}\right)\dot{\omega} = F_B \frac{r}{2} \Rightarrow F_B = 2mr\dot{\omega} = \frac{2M}{3r} \qquad (17)$$

Substituindo-se (17) em (16), resulta:

$$H_C = H_D = mr\frac{M}{3mr^2} + \frac{2M}{3r} = \frac{M}{r} \qquad (18)$$

Portanto, na barra CD age uma força de tração de módulo M/r **Item <u>c</u>**

Substituindo-se (18) em (3), obtém-se:

$$F_A = \frac{1}{r}\left(M - J_{Az}\dot{\omega} + \frac{r}{2}H_C\right) = \frac{1}{r}\left(M - \frac{mr^2}{2}\frac{M}{3mr^2} + \frac{r}{2}\frac{M}{r}\right) = \frac{4M}{3r} \qquad (19)$$

Para que ambos os discos rolem sem escorregar, deve-se ter:

$$F_A \le \mu_A N_A \Rightarrow \frac{4M}{3r} \le \mu_A mg \Rightarrow \mu_A \ge \frac{4M}{3rmg} \qquad (20)$$

$$F_B \le \mu_B N_B \Rightarrow \frac{2M}{3r} \le \mu_B mg \Rightarrow \mu_B \ge \frac{2M}{3rmg} \qquad (21)$$

Item <u>d</u>